

平面グラフで長さの総和最小な非交差道を求めるアルゴリズム

非会員 高橋 淳也[†] 正員 鈴木 均[†] 正員 西関 隆夫[†]

Algorithms for Finding Non-Crossing Paths with Minimum Total Length in Plane Graphs

Jun-ya TAKAHASHI[†], *Nonmember*, Hitoshi SUZUKI[†] and Takao NISHIZEKI[†], *Members*

あらまし G は無向平面グラフであり、 G の辺の長さは非負実数であるとする。本論文では G の二つの面の周上に k 組の端子対が指定されたときに、それぞれの端子対を結び、長さの総和が最小な“非交差道”を求めるアルゴリズムを与える。なお、非交差道とは点や辺を共有するかもしれないが、互いに平面上で交差はしていない道のことである。このアルゴリズムの計算時間は $O(n \log n)$ である。ここで n は平面グラフ G の点数である。また、 k は必ずしも定数とは限らないものとする。

キーワード 平面グラフ、アルゴリズム、VLSI 一層配線、最短路問題、非交差道

1. まえがき

平面に埋め込まれているグラフ、すなわち平面グラフで、指定された k 個の端子対間の互いに点素で長さの総和が最小な k 本の道を求める問題は VLSI の一層配線問題等に应用可能である。しかし、この問題は NP-完全であるので^{(1),(2)}、効率の良いアルゴリズムはありそうにない。ここで、グラフの辺は VLSI の配線領域に対応している。一つの配線領域に複数の配線を通せる配線モデルでは、この一層配線問題は長さの総和が最小な“非交差道”を求める問題に帰着する。こ

こで、“非交差道”とは点や辺を共有するかもしれないが互いに平面上で交差はしていない道のことである。端子が置かれる面の個数に制約がある場合には非交差道を求める問題が効率良く解けることが期待される。

本論文では、 k 個の端子対が平面グラフ G の指定された二つの面の周上にのみ存在する場合に、長さの総和最小な k 本の非交差道を求める $O(n \log n)$ 時間アルゴリズムを与える。ここで n は G の点数である。また、 k は必ずしも定数とは限らない。このアルゴリズムは、例えば VLSI 配線の最終段階に現れる、チップの外周におかれたパッドと内部ブロック周囲にあるピン間を結ぶ一層配線問題に適用できる(図 1 参照)。なお、平面グラフの二つの面の周上に端子が指定されているとき、(長さの総和最小とは限らない)点素な道を求める $O(n \log n)$ 時間のアルゴリズムが知られている^{(3)~(5)}。

本論文の構成は次のとおりである。2. で種々の定義と用語を説明する。3. で一つの面の周上にだけ端子がある場合に対するアルゴリズムを与える。次に 4. で二つの面の周上に端子がある場合に対するアルゴリズムを与える。5. は結論である。

2. 準備

本章では用語と問題の定義を与える。点集合 V 、辺集合 E をもつグラフ G を $G=(V, E)$ と書く。 G の点の集合を $V(G)$ 、辺の集合を $E(G)$ と書くこともある。本論文では G は 2-連結無向平面グラフであり、 G の

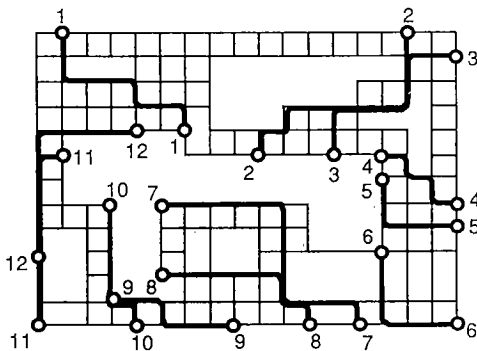


図 1 格子グラフの非交差道
Fig. 1 Non-crossing paths in a grid graph.

[†] 東北大学工学部情報工学科, 仙台市
Faculty of Engineering, Tohoku University, Sendai-shi, 980
Japan

辺の長さは非負であるとする。 G は平面 R^2 上に埋め込まれているとする。 G の R^2 上の像を $Image(G)$ と書く。 $R^2 - Image(G)$ の連結成分を G の面という。 一つの面の閉包に含まれる G の極大部分グラフをその面の周と呼ぶ。 G の二つの部分グラフ $H_1=(V_1, E_1)$, $H_2=(V_2, E_2)$ について $H_1+H_2=(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$ と定義する。 道で連結したい点(端子) s_i と t_i となる対 (s_i, t_i) を端子対と呼ぶ。 端子対の集合を S とする。 本論文では、端子対の個数を k と表す。 すなわち、 $|S|=k$ である。 また、端子はすべて G の指定された二つの面 f_1, f_2 の周 B_1, B_2 上にあるものとする。 本論文では、簡単のために $V(B_1) \cap V(B_2) = \phi$ であるとし、すべての端子は異なる点であるとする。 長さ 0 の新しい辺を導入すれば、こう仮定しても一般性を失わない。 G の 2 本の道 P, Q の両方に点 v が含まれるとき、 P と Q は点 v を共有するといひ、 v は P と Q の共有点であるという。

位相幾何学的な繁雑さを避けて、“非交差道”の定義を与えよう。 図 2(a) に示す道 P_1, P_2 では $Image(P_1)$

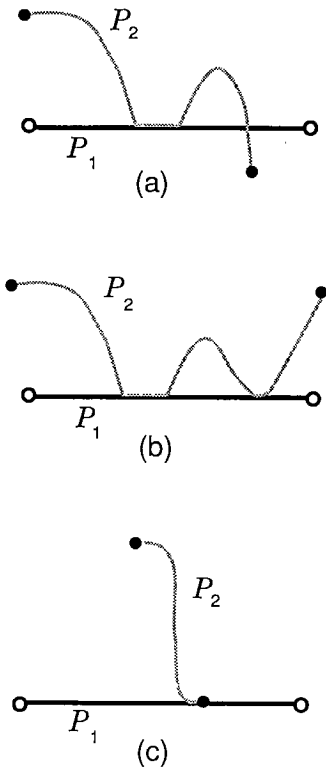


図 2 平面上の交差
Fig. 2 Crossing on the plane.

と $Image(P_2)$ は交差しているが、同図(b)および(c)で $Image(P_1)$ と $Image(P_2)$ は交差していない。 平面グラフ G の二つの面 f_1 と f_2 の周 B_1 と B_2 上にある k 組の端子対を結び道を P_1, P_2, \dots, P_k とする。 面 f_1 の内部に新しい点 v_{f_1} を加え、 v_{f_1} と B_1 上の各端子を新しい辺で結ぶ。 同様に、面 f_2 の内部に新しい点 v_{f_2} を加え、 v_{f_2} と B_2 上の各端子を新しい辺で結ぶ。 G からこのようにして得られた平面グラフを G^+ とする。 道 P_i ($1 \leq i \leq k$) の前後に上の新しい辺を 1 本ずつ付け加えて得られる G^+ の道(あるいは閉路)を P'_i とする。 ここで P'_i の始点、終点は v_{f_1} あるいは v_{f_2} である。 $Image(P'_1), Image(P'_2), \dots, Image(P'_k)$ が互いに交差しないときに、平面グラフ G の道 P_1, P_2, \dots, P_k は(面 f_1, f_2 に関して)互いに交差しないと定義する。 特に長さの総和が最小であるとき、 P_1, P_2, \dots, P_k を最短非交差道という。 図 3(a) に示すグラフ G において道 P_1 と P_2

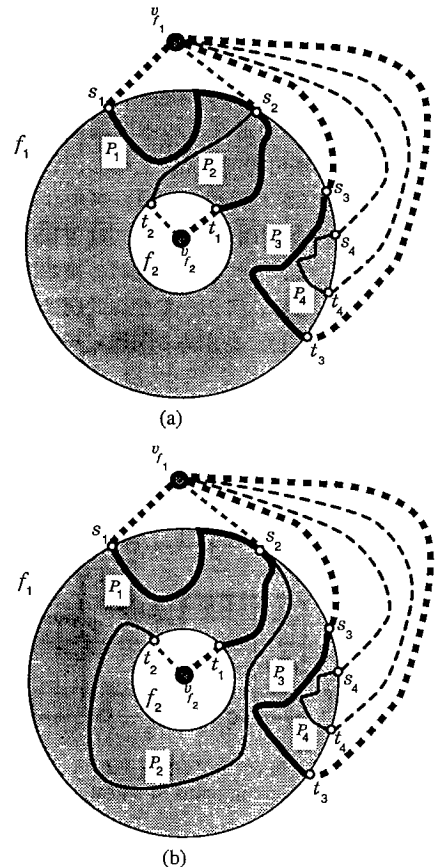


図 3 (a)交差道と(b)非交差道
Fig. 3 (a) Crossing paths and (b) non-crossing paths.

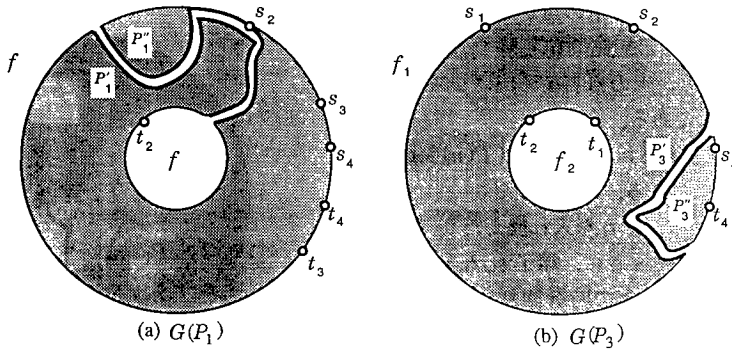


図4 切れ目グラフ
Fig.4 Slit graphs.

は(面 f_1, f_2 に関して)交差している。一方同図(b)の4本の道 P_1, P_2, P_3, P_4 は互いに交差していない。まえがきで述べた VLSI の一層配線問題に適用するとき、この定義は妥当である。図1の格子グラフの辺の長さがすべて1であるとき、同図に太線で描いた12本の道は最短非交差道である。

本論文では、非交差道がある限り最短非交差道を求めるアルゴリズムを与える。なお非交差道が存在しないときには、ないと判定するようにアルゴリズムを変更することは容易である。

端子対 (s_i, t_i) を結ぶ s_i から t_i へ行く道を P_i と決定したとき、残りの端子対間の道 P_2, P_3, \dots, P_k で、 P_1, P_2, \dots, P_k が(面 f_1, f_2 に関して)非交差なものを求めるには、次に定義する G の P_1 に関する切れ目グラフで残りの非交差な道 P_2, P_3, \dots, P_k を求めればよい。 G の P_1 に関する切れ目グラフ $G(P_1)$ を次のように P_1 を P_1 と P'_1 という2本の道に置き換えて得られるグラフであるとする。まず P_1 の各点 v を二つの点 v' と v'' で置き換える。 P_1 上の各辺 (v_i, v_{i+1}) を2本の平行な辺 (v'_i, v'_{i+1}) と (v''_i, v''_{i+1}) で置き換える。 P_1 の辺ではないが、 P_1 の点 v に接続している辺 (v, w) に対して、 (v, w) が P_1 の進行方向の右側にあるならば (v', w) として置き換え、左側にあるならば (v'', w) として置き換える。但し、切れ目を入れる道 P_1 の点 v が s_1, t_1 以外の端子として指定されていた場合には、 v' と v'' のどちらか G^+ において v_{f_1} あるいは v_{f_2} と隣接している方を切れ目グラフ上の端子とする。以上の操作をグラフ G に P_1 に沿って切れ目を入れるという。図3(a)に示したグラフ G の道 P_1 に関する切れ目グラフ $G(P_1)$ を図4(a)に、道 P_3 に関する切れ目グラフ $G(P_3)$ を図4(b)に描く。

切れ目を入れる道 P_i の始点と終点が異なる周上にある場合には、図4(a)に示すように $G(P_i)$ において面 f_1 と f_2 は同一の面 f となり、残りの端子対 $(s_2, t_2), (s_3, t_3), \dots, (s_k, t_k)$ はその周上にある。従って、 $G(P_i)$ において(面 f に関して)非交差な道 P_2, P_3, \dots, P_k を求めて、 P_i と合わせれば、 G における(面 f_1, f_2 に関して)非交差な道 P_1, P_2, \dots, P_k が求まる。図4(b)に示すように、切れ目を入れる道 P_3 の始点と終点と同じ周上にあるときには、 $G(P_3)$ は二つの連結成分に分離する。しかも G に P_3 を含む k 本の非交差道が存在するならば、残りの各端子対は各々同じ連結成分に含まれる。従って各連結成分において(適当な面に関する)非交差な道を求め、 P_3 と合わせれば、 G の非交差な道が求まる。

3. 一つの面の周上に端子がある場合

本章では一つの面 f の周 B 上にだけ端子がある場合に対して最短非交差道を求めるアルゴリズムを与える。一般性を失うことなく f は外面であるとしてよい。この場合の自明なアルゴリズムは次のとおりである。

begin

1. **for** $i=1$ to k **do**

begin

2. (s_i, t_i) 間の最短路を G で求める;

3. $G:=G(P_i)$; $\{P_i$ に沿って G に切れ目を入れる}

end;

end;

このようにして求めた各道 P_i は G においても (s_i, t_i) 間の最短路であるので、 P_1, P_2, \dots, P_k の長さの総和は

最小である。辺の長さが非負の n 個の点からなる平面グラフで、1点から全点への最短路問題を解くのに要する時間を $T(n)$ とすると、上の自明なアルゴリズムの計算時間は $O(kT(n))$ である。

本章では次の二つの場合分けによって $O(T(n) \log k)$ 時間のアルゴリズムを与える。

場合1：必要ならば端子 s_i と t_i を入れ換えたり、端子対番号を付け替えたりしたときに、端子 $s_1, t_1, s_2, t_2, \dots, s_k, t_k$ がこの順序で外周 B 上で時計回りに現れる場合。

場合2：その他の場合。

まず場合1に対するアルゴリズム PATH1 を与え、次に場合2に対するアルゴリズム PATH2 を与える。PATH1 はグラフ G を k 個の部分グラフ G_1, G_2, \dots, G_k に分割し、各 G_i には端子 s_i と t_i が含まれるようにする。次に各 G_i で s_i と t_i 間の最短路を求め、 k 本の非交差道を出力する。 G の道(あるいは木) P の2点 v, w に対して、 v から w へ行く P 上の道を $P[v;w]$ と書く。また特にことわらないかぎり“閉路の内部”には閉路自身も含むとする。

procedure PATH1 (G, S);

begin

1. s_1 から $s_i (2 \leq i \leq k)$ までの最短路木を T とする; $\{T$ における s_1 から各 s_i までの道はグラフ G における s_1 から s_i までの最短路になっている}
2. for $i:=1$ to k do
 - begin
 - 3. s_i から T 上を s_{i+1} まで行く道 $T[s_i; s_{i+1}]$ および s_{i+1} から外周 B 上を反時計回りに s_i まで戻ってくる道からなる閉路の内部にある G の極大部分グラフを G_i とする; $\{s_{k+1}=s_1$ とする}
 - 4. グラフ G_i において s_i と t_i の間の最短路 P_i を求める
 - end;
 - 5. $\{P_i | 1 \leq i \leq k\}$ を出力 {最短非交差道}

end;

図5に PATH1 の説明図を示す。同図で、最短路木 T は点線で、道 P_i は太線で描かれており、部分グラフ G_1, G_2, G_3 は色分けされている。上に示した手続き PATH1 が正しく最短非交差道を求めることは次の補題からも明らかである。

[補題1] PATH1 で求めた G の部分グラフを $G_i (1 \leq i \leq k)$ とすると、グラフ G における端子 s_i と t_i の間

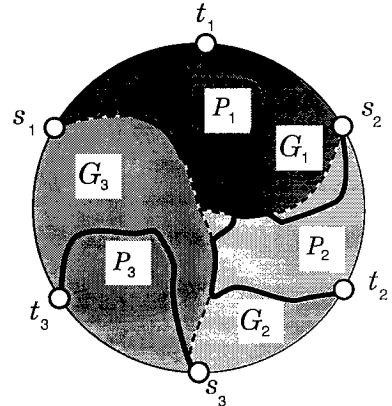


図5 PATH1 の説明図
Fig. 5 Illustration for PATH1.

の最短路の一つはグラフ G_i に存在する。

(証明) グラフ G における s_i と t_i の間の任意の最短路を P_i^* とする。 P_i^* より長くない道が G_i に存在することを示せばよい。 T において s_1 から $s_i (2 \leq i \leq k)$ まで行く道を Q_i とする。 Q_i はグラフ G における s_1 から s_i までの最短路である。なお $Q_1=Q_2$ とする。 P_i^* が T と交差しないときは、 P_i^* は G_i に含まれるので、 P_i^* は T と交差するとしてよい。 P_i^* を t_i から s_i まで進むときに最初に現れる T 上の点を a とする。

(1) a が Q_i にある場合。

木 T において s_i から a へ行く道 $T[s_i; a]$ はグラフ G における s_i から a までの最短路であるから、 $P_i = T[s_i; a] + P_i^*[a; t_i]$ は P_i^* より長くない、明らかに G_i に含まれる。

(2) a が Q_i にない場合。

このとき、 $2 \leq i \leq k-1$ である。また a は Q_{i+1} 上にある。 P_i^* 上を s_i から t_i まで進むときに最初に現れる Q_{i+1} 上の点を b とし、 P_i^* 上を b から s_i まで戻るときに最初に現れる Q_i 上の点を c とする。(b が Q_i 上にあるときは $c=b$ である。) b と c の選び方から $P_i^*[c; b]$ は $G_i + Q_{i+1}$ に含まれる。従って(単純とは限らない)道 $P_i = T[s_i; c] + P_i^*[c; b] + T[b; a] + P_i^*[a; t_i]$ も $G_i + Q_{i+1}$ に含まれ、また明らかに P_i^* より長くない。 P_i には s_i から t_i までの単純な道 P_i が存在し、 P_i は P_i^* より長くない G_i に含まれる。□

補題1より、場合1の最短非交差道 P_1, P_2, \dots, P_k の各道 $P_i (1 \leq i \leq k)$ はグラフ G における端子対 (s_i, t_i) を結ぶ最短路であることがわかる。

次に PATH1 の計算時間を解析する。行1, 行4およ

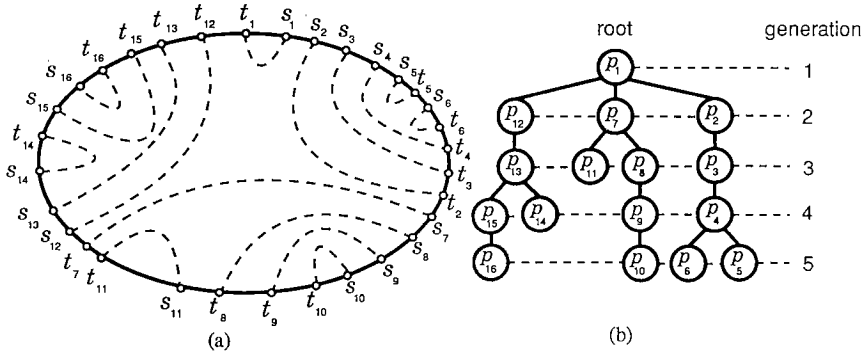


図 6 (a) 端子対の配置と (b) 高さ $g=5$ の世代木 T_g
 Fig. 6 (a) Terminal pairs, and (b) genealogy tree T_g of height $g=5$.

び行 5 以外は明らかに $O(n)$ 時間で実行できる。行 1 は $O(T(n))$ 時間で実行できる。行 4 では k 本の最短路を求めるが、各最短路は木 T と外周 B によって境界づけられている領域 G_1, G_2, \dots, G_k で求められる。 T の辺は G_1, G_2, \dots, G_k のたかだか 2 個にしか現れず、それ以外の G の辺はたかだか 1 個にしか現れない。従って G_1, G_2, \dots, G_k の点数の総和は $O(n)$ であり、 k 回の行 4 の実行時間は全体で $O(T(n))$ である。また各道 $P_i (1 \leq i \leq k)$ は G_i の部分グラフであるから、最短非交差道 P_1, P_2, \dots, P_k の点数の総和は $O(n)$ であり、行 5 は $O(n)$ 時間で実行できる。以上より PATH 1 は $O(T(n))$ 時間で実行できることがわかる。

次に PATH 1 を利用して場合 2 に対するアルゴリズム PATH 2 を与えよう。外周 B 上を時計回りにたどったときに、 v_1, v_2, \dots, v_b の順で B の点が現れるとする。また、一般性を失うことなく $s_1 = v_1$ であり、 $s_1 (= v_1)$ から外周 B 上を反時計回りに t_1 まで行く道に、 s_1, t_1 以外の端子が現れないとしてよい。更に、各端子対 (s_i, t_i) に関して、外周 B を v_1 から時計回りに進んだときに、最初に s_i が現れ、次に t_i が現れるとしてよく、しかも s_1, s_2, \dots, s_k がこの順に現れるとしてよい(図 6(a) 参照)。外周 B 上の各点 v に対して、 $index(v)$ は v の添字を表す。すなわち、 $v = v_i$ ならば $index(v) = i$ である。この記法を用いて端子対の親子関係を定義する。 $index(s_i) < index(s_j) < index(t_j) < index(t_i)$ ならば、 (s_i, t_i) は (s_j, t_j) の先祖であるといい、 (s_j, t_j) は (s_i, t_i) の子孫であるという。交差しない道が存在すると仮定しているので、 $index(s_i) < index(s_j) < index(t_i) < index(t_j)$ ということはない。 (s_i, t_i) の先祖の中で、最大の端子対番号をもつ先祖を (s_i, t_i) の親と呼び、 $(s_i,$

$t_i)$ を親の子と呼ぶ。 S の各端子対 $p_i = (s_i, t_i)$ を一つの節点 p_i としてもち、端子対間の親子関係から誘導される(系統)木を T_g と書く。端子対 (s_i, t_i) は親をもたない。これに対応する節点 p_1 を木 T_g の根という。端子対 (s_i, t_i) に対応する T_g の節点 p_i の深さに 1 を加えた数を端子対 (s_i, t_i) の世代という(図 6(b) 参照)。節点の世代の最大値を g とする。また各端子対 $(s_i, t_i) \in S$ 間を結ぶ道 P_i の間の親子関係を端子対の親子関係として定義する。

場合 2 に対するアルゴリズム PATH 2 のアイデアは二つある。まず最初のアイデアは、同じ世代の端子対の集合は場合 1 の性質を満たすので、同じ世代の端子対間の最短非交差道は PATH 1 によって求められるということである。また、求まった道に沿って G に切れ目を入れて G を分割したとき、各連結成分の端子対間の最短路は G における最短路になっている。従って世代 1 から順に世代ごとに PATH 1 を実行して非交差道を求めればよいが、単純にインプレメントすると $O(gT(n))$ 時間かかってしまう。そこで、まず真ん中の世代の端子対を結ぶ非交差道を求め、それらの道に沿って G に切れ目を入れて得られるグラフの連結成分ごとに上半分と下半分の世代の非交差道を求めるという分割統治法を用いる。これが 2 番目のアイデアである。図 7 に例を示す。この図では、真ん中の世代 3 の端子対を結ぶ非交差道 P_3, P_8, P_{11}, P_{13} を求め(図 7(a) 参照)、求まった非交差道に沿って G に切れ目を入れて G を分割した様子を示している(図 7(b) 参照)。同図では、上半分の世代の端子対が存在する領域を濃い色で、下半分の世代の端子対が存在する領域を薄い色で描いている。このようにして全体の

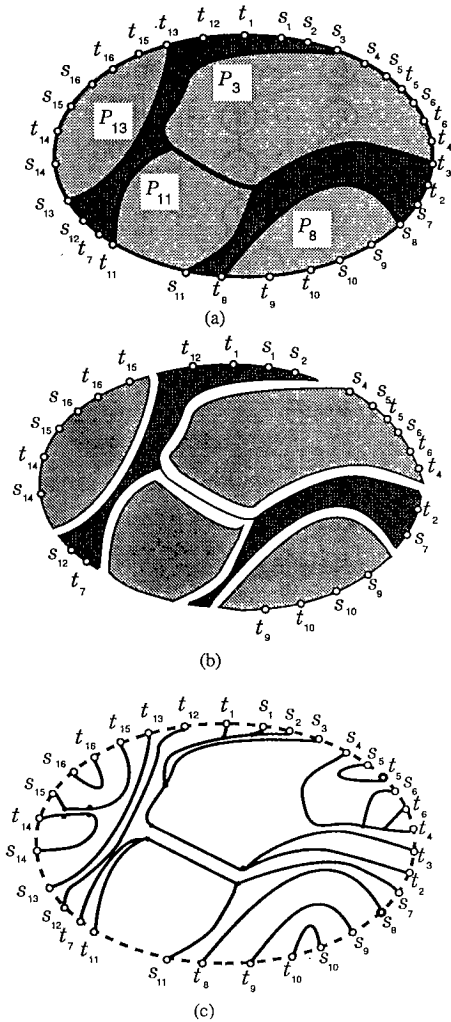


図 7 PATH2の説明図
Fig. 7 Illustration for PATH2.

計算時間が $O(T(n) \log g)$ であるようなアルゴリズムが構成できる。そのアルゴリズムの詳細を示す前に、いくつか定義を与える。

端子対 (s_i, t_i) を結ぶ道 P_i の内部とは、道 P_i を s_i から t_i へ行き、更に t_i から外周上を反時計回りに s_i へ戻る閉路の内部領域であると定義する。また端子対を結ぶ道の集合 \mathcal{P} の内部とは、 \mathcal{P} に含まれる道の内部の和と定義する。また、端子対 (s_i, t_i) を結ぶ道 P_i の外部とは、道 P_i を s_i から t_i へ行き、更に t_i から外周上を時計回りに s_i へ戻る閉路の内部領域であると定義する。また端子対を結ぶ道の集合 \mathcal{P} の外部とは、 \mathcal{P} に含まれる道の外部の共通部分と定義する。

以下では、非交差道を求める代わりに木の集合 \mathcal{F} を求めることにする。各端子対 (s_i, t_i) は \mathcal{F} のいずれかの木に含まれており、その木の s_i と t_i 間の道は非交差道問題の解である。更に、 \mathcal{F} に含まれる木の辺数の合計は $O(n)$ である。 k 本の非交差道の長さの総和は、 \mathcal{F} に含まれる木の最親共有祖先問題 (nearest common ancestor problem) を解くことにより $O(n)$ 時間で求められる^{(6),(7)}。(図 7(c) に示した \mathcal{F} には 12 本の木が含まれ、 $k=16$ 個の端子対はいずれかの木の上にある。)

アルゴリズム PATH2 を以下に与える。

procedure PATH2 (G, S);

begin

1. 端子対の世代を計算し、世代の最大値を g とする;
2. $\mathcal{F} := \phi$;
3. REDUCE ($G, [1, g], \mathcal{F}$);
4. REDUCE の出力 \mathcal{F} を解とする

end;

procedure REDUCE ($G, [l, h], \mathcal{F}$);

begin

1. **if** $l=h$ {一つの世代しかない}
2. **then**

begin

 3. 世代 l の端子対からなる集合を S^l とする;
 4. 手続き PATH1 (G, S^l) を適用して求めた道の集合を \mathcal{P}_l とする;
 5. \mathcal{P}_l によって \mathcal{F} を更新する; {詳細は後で述べる}

end

end

6. **else** $\{l < h\}$

begin

7. $m := \lfloor (l+h)/2 \rfloor$;
8. 世代 m の端子対の集合を S^m とする;
9. 手続き PATH1 (G, S^m) を実行して、求めた道の集合を \mathcal{P}_m とする;
10. \mathcal{P}_m によって \mathcal{F} を更新する; {詳細は後で述べる}
11. \mathcal{P}_m の内部にある極大部分グラフを G_{in} とし、 \mathcal{P}_m の外部にある極大部分グラフを G_{out} として問題を分割する;
12. REDUCE ($G_{in}, [m+1, h], \mathcal{F}$);
13. REDUCE ($G_{out}, [l, m-1], \mathcal{F}$)

end

end;

PATH2の実行時間は REDUCE の実行時間に依存する。REDUCE は端子対の世代に関する分割統治法を用いている。REDUCE が呼び出されたとき、真ん中の世代の端子対を結ぶ非交差道が手続き PATH1 を用いて $O(T(n))$ 時間で求められる。次に、求まった真ん中の世代の道に沿ってグラフに切れ目を入れ、問題を上半分の世代と下半分の世代に分割する。更に、分割された問題に対して REDUCE を再帰的に実行する。再帰の深さは明らかに $O(\log g)$ であるから、再帰の同じ深さで実行される PATH1 の実行時間の合計が $O(T(n))$ であることを示せば、REDUCE 全体の計算時間が $O(T(n)\log g)$ であることが言える。そのため、 G の各辺が切れ目グラフの連結成分のたかだか定数個にしか、例えばたかだか3個にしか現れない

ことを示せばよい。

(図7の例では、道 P_3 と P_{11} の共有部分が切れ目グラフの三つの連結成分に現れている。)以下では、そのようなグラフの分割方法と、 \mathcal{F} の更新法の詳細について述べる。

REDUCE ではまず最初に PATH1 によって真ん中の世代に対する非交差道 P_1, P_2, \dots, P_m を求める。次に、各道 P_i に沿って切れ目を入れてグラフ G を分割し、道 P_i によって \mathcal{F} を更新する。(図8(a)の例では $S^m = \{(s_{m1}, t_{m1}), (s_{m2}, t_{m2})\}$ とし、道 Q_{m1}, Q_{m2} を求める。次に Q_{m1}, Q_{m2} に沿って切れ目を入れると、 G は同図(b)に示すように三つの連結成分 G_1, G_{m1}, G_{m2} に分割される。また、 $\mathcal{F} = \{Q_{m1}, Q_{m2}\}$ となる。)

G の外周には再帰の前段階で既に求まっている非

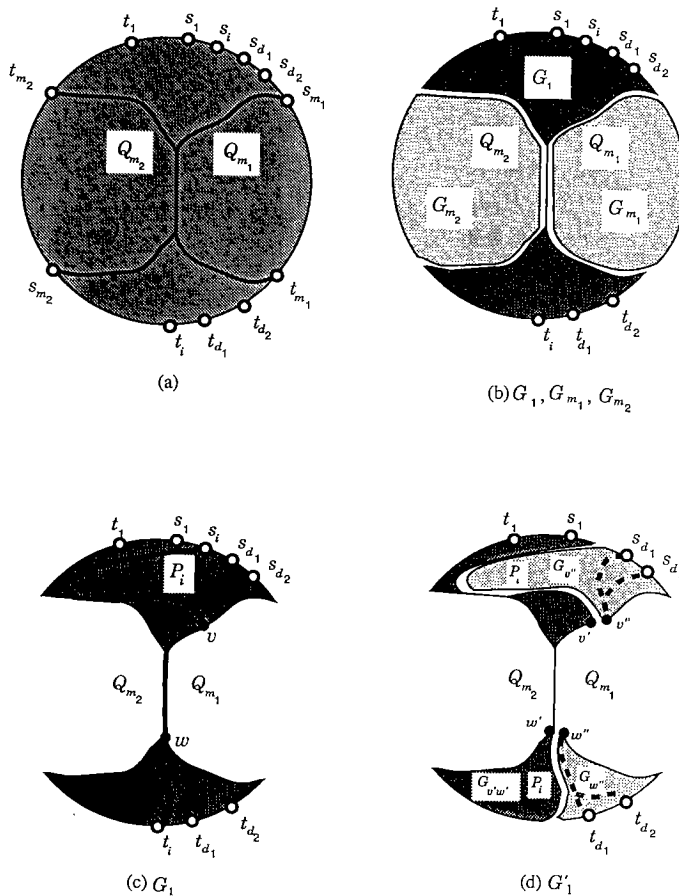


図8 REDUCE におけるグラフの分割の仕方、および非交差道を含む木の集合の求め方

Fig. 8 Illustration for slitting a graph and construction of trees in \mathcal{F} .

交差道 Q_j ($1 \leq j \leq q$) が現れているかもしれない。(図 8(b) の G_1 に対して REDUCE を呼び出す場合, 同図 (c) のように Q_{m_1} と Q_{m_2} が G_1 の外周上にある。) Q_j の辺は既に多重化されているので, P_i ($1 \leq i \leq m$) 全体に沿って切れ目を入れて G を分割したのでは, P_i と Q_j に共有されている辺が更に多重化されてしまい, 同じ辺が現れる切れ目グラフの連結成分の個数をたかだか 3 個に抑えられない。また, 既に切れ目を入れている道上の点は \mathcal{F} の木に含まれているので, \mathcal{F} に含まれる木の点数の合計を $O(n)$ で抑えることもできない。そこで, P_i が Q_j の先祖でも子孫でもない場合には, P_i 全体に沿ってグラフに切れ目を入れるが, P_i が Q_j と先祖あるいは子孫である場合には次のようにする。

この場合, 道 P_i 全体に沿って切れ目を入れるのではなく, P_i の二つの部分道に沿って切れ目を入れる。簡単のため, P_i がその先祖あるいは子孫の一つとだけ点を共有するとする。 P_i を s_i から t_i までたどったときに現れる Q_j との最初の共有点を v とし, 最後の共有点を w とする。このとき, P_i は $Q_j[v;w]$ を通るとしてよい。 $P_i[s_i;v]$ と $P_i[w;t_i]$ に沿って G に切れ目を入れて, 切れ目グラフ $G' = G(P_i[s_i;v] + P_i[w;t_i])$ を作る。 Q_j を含む木 $T \in \mathcal{F}$ に $P_i[s_i;v]$ および $P_i[w;t_i]$ を連結して, P_i と Q_j を含む新しい木 $T \in \mathcal{F}$ に更新する。(図 8(c) の例では, G_1 から $P_i[s_i;v]$ と $P_i[w;t_i]$ に沿って切れ目を入れて得られたグラフを G_1 とすると, G_1 は同図 (d) に示すように三つの連結成分 $G_{v''}$, $G_{w''}$, $G_{v''w''}$ に分割される。このとき端子対の配置から P_i は Q_{m_1} の先祖であることがわかる。よって Q_{m_1} を含む木 $T \in \mathcal{F}$ に $P_i[s_i;v]$ および $P_i[w;t_i]$ を連結して, Q_{m_1} と P_i を含む新しい木 $T \in \mathcal{F}$ に更新する。)

$P_i[s_i;v]$ と $P_i[w;t_i]$ に沿って切れ目を入れると, v および w はそれぞれ二つの点 v', v'' および w', w'' に置き換えられる。 v' と v'' , w' と w'' はそれぞれ切れ目グラフ G' の異なる連結成分に存在する。また, P_i の端点に対応する世代木 T_g の節点を p_i , Q_j の端点に対応する節点を p_j とし, T_g 上の p_i と p_j を結ぶ道 $T_g[p_i; p_j]$ 上にある節点の集合を N_{ij} とすると, $p_d \in N_{ij}$ に対応する端子 s_d と t_d は切れ目グラフ G' で異なる連結成分に属する。($p_d \in N_{ij}$ の端子対は同じ連結成分に存在する。) $p_d \in N_{ij}$ は p_i の先祖あるいは子孫であるので, (s_d, t_d) 間の最短路 P_d は $P_i[v;w]$ すなわち $T[v;w]$ を通るとしてよい。このような異なる連結成分に分離されてしまう端子が存在する G' の各連結成分に対し, それに含まれる v', v'', w', w'' を根とし,

分離される端子 s_d, t_d すべてを含む最短路木 T' を求め, T' を $T \in \mathcal{F}$ に連結して T を更新する。更新された木 $T \in \mathcal{F}$ は s_d と t_d を結ぶ非交差道も含む。(図 8(d) の例では, $G_{v''}$ において v'' を根とし s_{d_1}, s_{d_2} を含む最短路木を求め, $G_{w''}$ において w'' を根とし t_{d_1}, t_{d_2} を含む最短路木を求める。これら 2 本の木を Q_{m_1} と P_i を含む木 $T \in \mathcal{F}$ に連結して, $T \in \mathcal{F}$ を更新する。それら 2 本の木は同図で点線で描かれている。) 更に, 求められた最短路木 T' に沿ってグラフに切れ目を入れ, 各連結成分に対して, 再帰的に REDUCE を実行する。

なお, P_i がその先祖あるいは子孫の二つ以上と点を共有する場合も上と同様に処理する。この処理の後では P_i と点を共有するその先祖, 子孫および P_i は \mathcal{F} の一つの木に含まれることに注意されたい。

上のようによれば, 新たに切れ目を入れる道 P_i が既に求めた道 Q_j の先祖あるいは子孫である場合には, 辺の 2 重化が行われない。また, P_i の先祖あるいは子孫でない Q_j 上の辺に関してはそのまま辺の 2 重化が行われる。このとき, 道 Q_j と道 P_i によって共有されている辺を通る(まだ求められていない)道が他に存在するかもしれない。しかし, そのような道は必ず Q_j あるいは P_i の先祖あるいは子孫である。従って G の各辺は切れ目を入れる道のたかだか 2 本にしか現れず, G の各辺は再帰の同じ深さで現れる切れ目グラフのたかだか三つにしか現れない。また, 上で述べた \mathcal{F} の木の更新の仕方により, G の各辺は \mathcal{F} の木にたかだか 2 回しか現れないことがわかる。以上により, 同じ深さで呼ばれる REDUCE にかかる計算時間の合計は $O(T(n))$ であることが言えた。

REDUCE の再帰呼出しの深さは $O(\log g)$ であるので, 全体の計算時間は $O(T(n)\log g)$ 時間である。 $g = O(k)$ であるので, PATH2 全体は $O(T(n)\log k)$ 時間で実行できる。なお PATH2 で求める最短非交差道 P_1, P_2, \dots, P_k の各道 P_i はグラフ G における (s_i, t_i) 間の最短路となっていることに注意しよう。

4. 二つの面の周上に端子がある場合

本章では, 二つの面の f_1, f_2 の周 B_1, B_2 上に端子がある場合のアルゴリズム PATH を与える。この場合には, 最短非交差道 P_1, P_2, \dots, P_k の各道 P_i が G における (s_i, t_i) 間の最短路とは限らない。

B_1 と B_2 の両方に端子が存在する端子対 (s_i, t_i) について, 一般性を失うことなく $s_i \in V(B_1), t_i \in V(B_2)$

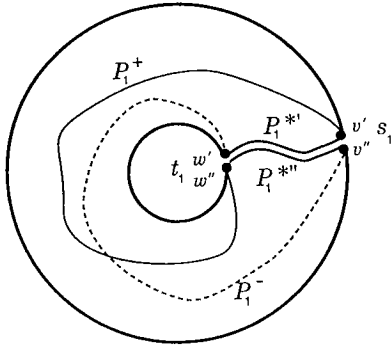


図 9 切れ目グラフ G_0
Fig. 9 Slit graph G_0 .

とする。 $s_i \in V(B_1), t_i \in V(B_2)$ である端子対 (s_i, t_i) の集合を S_{12} とし、 $s_i, t_i \in V(B_1)$ である端子対 (s_i, t_i) の集合を S_1 とし、 $s_i, t_i \in V(B_2)$ である端子対 (s_i, t_i) の集合を S_2 とする。 $S_{12} = \phi$ の場合には、まず S_1 について PATH2 を実行して S_1 の端子対間の最短非交差道を求め、次に求められた非交差道に沿って G に切れ目を入れてできるグラフに対し PATH2 を実行して S_2 の端子対間の最短非交差道を求めれば、非交差道問題の解が得られる。この計算時間は明らかに $O(T(n) \log k)$ 時間である。よって以下では、 $S_{12} \neq \phi$ とする。

$(s_1, t_1) \in S_{12}$ とし、 G における s_1 と t_1 の間の最短路を P^* とする。 P^* に関する G の切れ目グラフを G_0 とすると、 G_0 には s_1 を置き換えた 2 点 v', v'' と、 t_1 を置き換えた 2 点 w', w'' が存在する。 G_0 において v', w', w'' および v'' は同一面 f の周上に存在し、 v' から時計回りに進んだときにこの順に現れる。グラフ G_0 における v' と w'' の間の最短路および v'' と w' の間の最短路に対応する G の 2 本の道を、それぞれ P_1^+ および P_1^- とする。図 9 において P_1^+ は実線で、 P_1^- は点線で描かれている。このとき次の定理が成立する。証明は本章の後に示す。

[定理 1] P^* を $(s_1, t_1) \in S_{12}$ 間の G の最短路とする。このとき P^*, P_1^+ あるいは P_1^- を含むような最短非交差道が G に存在する。 □

定理 1 より直ちに非交差道問題を解くアルゴリズム PATH が次のように構成できる。

procedure PATH

入力: G と端子対の集合 $S_1 \cup S_2 \cup S_{12}$

出力: 最短非交差道を含む木の集合

begin

1. G において s_1 と t_1 の間の最短路 P^* を求める;

2. P^* に関する G の切れ目グラフ $G_0 = G(P^*)$ を構成し、道 P_1^+, P_1^- を求める;
3. $\mathcal{P}_0 := \{P^*\}, \mathcal{P}_1 := \{P_1^+\}, \mathcal{P}_2 := \{P_1^-\};$
{各 $\mathcal{P}_i (0 \leq i \leq 2)$ は非交差道を構成する道の集合になる。}
4. P_1^+ に関する G の切れ目グラフ $G_1 = G(P_1^+)$ と、 P_1^- に関する G の切れ目グラフ $G_2 = G(P_1^-)$ を構成する;
5. for $i := 0$ to 2 do
- begin
6. 手続き PATH2 を G_i に対し実行する;
7. 手続き PATH2 で求めた G_i の非交差道を \mathcal{P}_i の要素に加える
- end;
8. $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ のうち、長さの総和が最小なものを解とする

end;

アルゴリズム PATH の実行時間は以下のとおりである。1 行目および 2 行目は $O(T(n))$ 時間で実行できる。5 行目のループは 3 回繰り返される。また、3. で示したように、6 行目の手続き PATH2 は $O(T(n) \log k)$ 時間で終了する。他の行は $O(n)$ 時間で実行できる。従って全体の実行時間は $O(T(n) \log k)$ 時間である。

以上より次の定理が成立する。

[定理 2] k 個の端子対が二つの面の周上にある平面グラフ G で、長さの総和最小な非交差道は $O(T(n) \log k)$ 時間で求まる。

なお、Dijkstra 法を用いれば $T(n) = n \log n$ である^{(8),(9)}。また、Frederickson の方法を用いれば $O(n \sqrt{\log n})$ 時間かかる前処理を施したときに、 $T(n) = n$ である⁽¹⁰⁾。従って $O(n(\sqrt{\log n} + \log k)) = O(n \log n)$ 時間で長さの総和最小な非交差道が求まる。

以下では定理 1 の証明を示す。 $|S_{12}| = l$ とする。また必要ならば端子対の番号付けを変えて、 $1 \leq i \leq l$ ならば $(s_i, t_i) \in S_{12}$ であり、 $l+1 \leq i \leq k$ ならば $(s_i, t_i) \in S_1$ または $(s_i, t_i) \in S_2$ であるとする。更に、一般性を失うことなく、 S_{12} に属する端子対に関して、 B_1 を s_1 から反時計回りにたどったときに s_1, s_2, \dots, s_l がこの順に現れるとする。このとき、 B_2 を t_1 から反時計回りにたどったときに t_1, t_2, \dots, t_l がこの順に現れる。記述を明確にするため、 xy -2 次元平面の原点 O を中心とする半径 1 の円 Z_1 と $1/2$ の円 Z_2 に囲まれた平面領域 Σ

内に G が埋め込まれているとする。また、 $(s_i, t_i) \in S_{12}$ ならば、 $Image(s_i) = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{l} i\right), \sin\left(\frac{2\pi}{l} i\right) \right)$ 、 $Image(t_i) = \left(\frac{1}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{l} i\right), \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi}{l} i\right) \right)$ とし、 $Image(G) \cap (Z_1 \cup Z_2) = \{Image(s_i), Image(t_i) | 1 \leq i \leq l\}$ として一般性を失わない。 P は a を始点とし b を終点とする Σ 内の道とする。点 X が道 P を a から b までたどったときに動径 OX が回転する回転角を θ とする。但し反時計回りを正とする。 $|\theta| > 2\pi$ のこともある。このとき道 P の回転角 $\theta(P)$ を $\theta(P) = \theta/2\pi$ と定義する。従って s_i, t_i 間の道 P_i の回転角 $\theta(P_i)$ は Z_2 のまわりの回転数を意味する。また、 P_1, P_2, \dots, P_k が非交差道であるならば、明らかに $\theta(P_1) = \theta(P_2) = \dots = \theta(P_k)$ であり、整数値である。

道 P の長さを $length(P)$ と書くことにする。次の補題 2, 3, 4 が成立する。

[補題 2] s_1 と t_1 の間の任意の最短路を P^* とする。 $1 \leq i \leq l$ とし、 s_i と t_i の間の任意の(最短路とは限らない)道を P_i とする。このとき、 (s_i, t_i) 間の道 P_i で $length(P_i) \leq length(P_i)$ かつ次式を満たすものが存在する。

$$\theta(P_i) = \begin{cases} \theta(P^*) & : \theta(P_i) = \theta(P^*) \text{ のとき} \\ \theta(P^*) + 1 & : \theta(P_i) \geq \theta(P^*) + 1 \text{ のとき} \\ \theta(P^*) - 1 & : \theta(P_i) \leq \theta(P^*) - 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

(証明) 簡単のために P_i は単純な道であると仮定する。 $V(P^*) \cap V(P_i) = \{v_1, v_2, \dots, v_q\}$ であるとし、 v_1, v_2, \dots, v_q が $P^*[s_1; t_1]$ 上にこの順で現れるものとする。 $E(P^*[v_x; v_{x+1}]) \cap E(P_i) = \emptyset$ であるような点 $v_x (1 \leq x \leq q-1)$ すべてからなる集合を $U(P_i)$ とする。(図 10

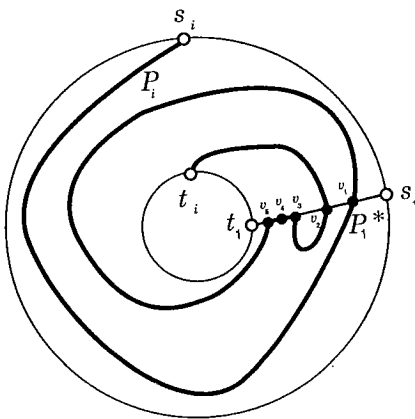


図 10 補題 2 の証明の説明図
Fig. 10 Illustration for proof of Lemma 2.

の例では P^* は直線で描かれ、 P_i は太線で描かれている。また、 $\theta(P^*) = 0, \theta(P_i) = 2, q = 5, U(P_i) = \{v_1, v_2\}$ である。)

道 P_i に対して補題が成立しないと仮定し、そのような道の中で P_i は $|U(P_i)|$ が最小であるとする。 $\theta(P_i) - \theta(P^*) = 0$ または ± 1 の場合には明らかに道 $P_i = P_i$ は補題を満たす。従って $\theta(P_i) \geq \theta(P^*) + 2$ であるとしてよい。($\theta(P_i) \leq \theta(P^*) - 2$ の場合も同様に証明できる。) このとき $|U(P_i)| \geq 1$ である。 v_a を $U(P_i)$ の任意の点とし、 s_i, v_a, v_n, t_i が P_i 上にこの順で現れるとする。ここで $\{g, h\} = \{a, a+1\}$ である。 $Q_i = P_i[s_i; v_g] + P^*[v_g; v_h] + P_i[v_h; t_i]$ とすると明らかに Q_i は s_i と t_i を結ぶ道であり $length(Q_i) \leq length(P_i)$ である。 $P_i[v_g; v_h] + P^*[v_h; v_g]$ は単純な閉路であり $|\theta(P_i[v_g; v_h]) - \theta(P^*[v_g; v_h])| = 0$ または 1 であるから、 $\theta(Q_i) \geq \theta(P_i) - 1 \geq \theta(P^*) + 1$ を得る。 P_i に対して補題が成立しないのであるから、 Q_i に対しても補題が成立しないはずである。しかし $|U(Q_i)| < |U(P_i)|$ であり、矛盾を生じる。 □

以下に示す補題 3, 4, 5 において、 $\theta = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ とし、 P_1 は回転角 θ の s_1 と t_1 を結ぶ自分自身と交差しない道の中で最短な道であるとする。次の補題が得られる。

[補題 3] 点 u, w は P_1 上にあるとし、 Q を $\theta(Q[u; w]) = \theta(P_1[u; w])$ なる u と w を結ぶ G の道とする。このとき $length(Q) \geq length(P_1[u; w])$ が成り立つ。

(証明) 簡単のために P_1 は単純な道であると仮定する。また Q は必ずしも単純な道とはかぎらないので、同一の点が 2 回以上現れることもあることに注意されたい。 P_1 と Q の共有点 $v_1 (= u), v_2, \dots, v_q (= w)$ がこの順に $Q[u; w]$ 上に現れるものとする。各 $x (1 \leq x \leq q)$ に対して $r_x = \theta(Q[v_1; v_x]) - \theta(P_1[v_1; v_x])$ とすると、整数列 r_1, r_2, \dots, r_q は次式を満足する。

$$\begin{cases} r_1 = r_q = 0; \\ r_x - r_{x+1} = 0, \pm 1 (1 \leq x \leq q-1) \end{cases}$$

$E(Q[v_x; v_{x+1}]) \cap E(P_1) = \emptyset$ であるような点 $v_x (1 \leq x \leq q-1)$ すべてからなる集合を $U(Q)$ とする。端点以外は閉路 C の (C を含まない) 真の内部にあるような $Q[v_x; v_{x+1}]$ の集合を $\mathcal{I}(C)$ と書くことにする。

道 Q に対して補題が成立しないとすると、すなわち $\theta(Q[u; w]) = \theta(P_1[u; w])$ かつ $length(Q) < length(P_1[u; w])$ である。特に Q はそのような道の中で $|U(Q)|$ が最小であるような道とする。このとき

$U(Q) \neq \phi$ である。($U(Q) = \phi$ とすると, Q は P_1 上の道であり補題が成立する.)

各 $v_x \in U(Q)$ に対して $r_x \neq r_{x+1}$ であることを示そう。
 $v_x \in U(Q)$ に対して $r_x = r_{x+1}$ とし, v_x はそのような点の中で $|\mathcal{J}(C_x)|$ が最小であるとする。ここで $C_x = Q[v_x; v_{x+1}] + P_1[v_{x+1}; v_x]$ である。もし道 $Q[v_y; v_{y+1}] \in \mathcal{J}(C_x)$ があるとすると, 明らかに $r_y = r_{y+1}$ が成り立ち, 閉路 $C_y = Q[v_y; v_{y+1}] + P_1[v_{y+1}; v_y]$ に対して $|\mathcal{J}(C_y)| < |\mathcal{J}(C_x)|$ となってしまう。従って $\mathcal{J}(C_x) = \phi$ である。このとき道 $P_i = P_1[s_1; v_g] + Q[v_g; v_h] + P_1[v_h; t_1]$ は回転角 θ をもち, 自分自身と交差しない。ここで $\{g, h\} = \{x, x+1\}$ で s_1, v_g, v_h, t_1 は P_1 上でこの順に現れるものとする。 P_1 は回転角 θ の s_1 と t_1 を結ぶ道の中で最短であるから, $length(P_i) \geq length(P_1)$ である。従って $length(Q[v_g; v_h]) \geq length(P_i[v_g; v_h])$ である。 $Q' = Q[v_1; v_x] + P_1[v_x; v_{x+1}] + Q[v_{x+1}; v_q]$ は $length(Q') \leq length(Q)$ を満たし, $\theta(Q[v_1; v_q]) = \theta(P_1[v_1; v_q])$ である。 $|U(Q')| = |U(Q)| - 1$ であるから $|U(Q)|$ の最小性より Q' は補題を満たす。すなわち $length(Q') \geq length(P_1[v_1; v_q])$ であるから, $length(Q) \geq length(P_1[v_1; v_q])$ となり矛盾が生じる。(図 11(a) の例では $v_x = v_2, v_{x+1} = v_3$ で, P_1 は直線, Q は太線そして Q' は点線で描かれている.)

以上のように各 $v_x \in U(Q)$ に対し $r_x \neq r_{x+1}$ であることが示せた。従って, ある整数 $i (2 \leq i \leq q-1)$ に対して $r_i > 0$ であるとしてよい。 $r_i < 0$ の場合も同様に証明できる。正の極大値をとる r_i を考えれば, $3 \leq a+2 \leq b \leq q$ であるような二つの整数 a および b が存在し, $a < i < b$ なるすべての i に対し $r_a = r_b = r_i - 1$ であることがわかる。(図 11(b) 参照。) すべての $v_x \in U(Q)$ に対して $r_x \neq r_{x+1}$ なので, $a < i < b-1$ なるすべての i に対して $v_i \in U(Q)$ である。従って $Q[v_{a+1}; v_{b-1}]$ は P_1 上の道であり $C_{ab} = Q[v_a; v_b] + P_1[v_b; v_a]$ は閉路である。 $|\mathcal{J}(C_{ab})|$ が最小となるように a および b を選ぼう。もし $\mathcal{J}(C_{ab}) = \phi$ ならば前と同様の議論によって矛盾を導くことができる。従って $\mathcal{J}(C_{ab})$ には道 $Q[v_c; v_{c+1}]$ が存在するとしてよい。明らかに $r_c \neq r_{c+1}$ である。 $r_c < r_{c+1}$ とする。($r_c > r_{c+1}$ の場合の証明も同様である。) このとき $c+2 \leq d \leq q$, かつ各 $i (c < i < d)$ に対して $r_c = r_d = r_i - 1$ であるような整数 d が存在する。閉路 $C_{cd} = Q[v_c; v_d] + P_1[v_d; v_c]$ は C_{ab} 内部にあるので $|\mathcal{J}(C_{cd})| < |\mathcal{J}(C_{ab})|$ であり, a および b の選び方に反する。(図 11(b) に例を示す。同図では P_1 は直線, $Q[v_a; v_b]$ は太線, $Q[v_c; v_d]$ は点線でそれぞれ

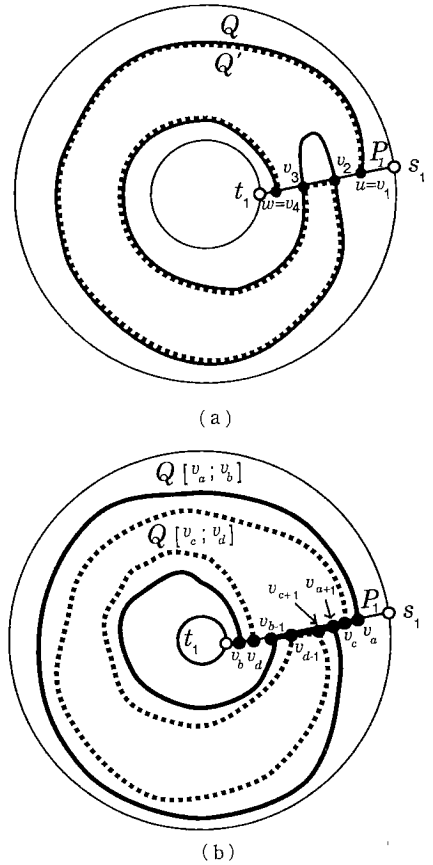


図 11 補題 3 の証明の説明図
 Fig. 11 Illustration for proof of Lemma 3.

描かれている。) □

補題 3 より以下に示す二つの補題が得られる。

[補題 4] $P_i (2 \leq i \leq l)$ を s_i と t_i を結び, 回転角が θ であるような道であるとする。このとき次の条件を満たす s_i, t_i 間の道 P'_i が存在する。

- (a) P'_i は P_1 と交差しない,
- (b) $\theta(P'_i) = \theta(P_i) = \theta$ かつ $length(P'_i) \leq length(P_i)$.

(証明) P_i は P_1 と交差すると仮定してよい。 P_i と P_1 の共有点 v_1, v_2, \dots, v_q がこの順に $P[s_i; t_i]$ 上に現れるとする。各 $x (1 \leq x \leq q)$ に対し $r_x = \theta(P_i[v_1; v_x]) - \theta(P_1[v_1; v_x])$ とする。このとき $r_q = 0, \pm 1$ である。

まず, $r_q = 0$ の場合を考える。この場合補題 3 より $length(P_1[v_1; v_q]) \leq length(P_i[v_1; v_q])$ であるから, $P'_i = P_i[s_i; v_1] + P_1[v_1; v_q] + P_i[v_q; t_i]$ とすると, $length(P'_i) \leq length(P_i)$ であり, 明らかに $\theta(P'_i) = \theta$ であり P'_i は P_1 と交差しない。

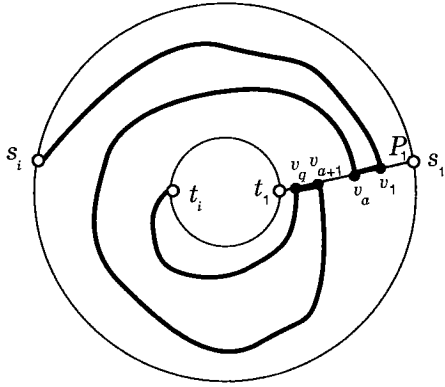


図 12 補題 4 の証明の説明図
Fig. 12 Illustration for proof of Lemma 4.

次に $r_q=1$ の場合を考える。($r_q=-1$ の場合の証明も同様である。) この場合ある整数 $a(1 \leq a \leq q-1)$ に対し $r_a=0$ かつ $r_{a+1}=1$ である。このとき $\theta(P_i[v_i; v_a]) = \theta(P_i[v_i; v_a])$ かつ $\theta(P_i[v_{a+1}; v_q]) = \theta(P_i[v_{a+1}; v_q])$ であるから、補題 3 により、 $length(P_i[v_i; v_a]) \leq length(P_i[v_i; v_a])$ かつ $length(P_i[v_{a+1}; v_q]) \leq length(P_i[v_{a+1}; v_q])$ である。従って、 $P'_i = P_i[s_i; v_1] + P_i[v_i; v_a] + P_i[v_a; v_{a+1}] + P_i[v_{a+1}; v_q] + P_i[v_q; t_i]$ とすると、 $length(P'_i) \leq length(P_i)$ かつ $\theta(P'_i) = \theta$ である。また、 $\theta(P'_i[s_i; v_1]) - \theta(P_i[s_i; v_1]) < 0$ 、 $\theta(P'_i[v_a; v_{a+1}]) - \theta(P_i[v_a; v_{a+1}]) = 1$ 、 $\theta(P'_i[v_q; t_i]) - \theta(P_i[v_q; t_i]) < 0$ であるから P'_i は P_i と交差していない。(図 12 に例を示す。同図では P_i は直線、 P'_i は太線で描かれている。)

□

$(s_i, t_i) \in S_1 \cup S_2$ すなわち $l+1 \leq i \leq k$ とし、 P_i は s_i と t_i を結ぶ道であるとする。 $(s_i, t_i) \in S_1$ ならば s_i, s_i, t_i がこの順に B_1 上で反時計回りに現れるものとし、 A を B_1 上時計回りに t_i から s_i へ行く道であるとする。 $(s_i, t_i) \in S_2$ ならば t_i, s_i, t_i がこの順に B_2 上で反時計回りに現れるものとし、 A を B_2 上時計回りに t_i から s_i へ行く道であるとする。 $P_i[s_i; t_i]$ と A からなる閉路を C_{P_i} とする。 s_i と t_i を結ぶ道に P_i が交差しないならば C_{P_i} は内部に f_2 を含まない。逆に、次の補題が成立する。

[補題 5] 閉路 C_{P_i} が内部に f_2 を含まないとき、 $length(P'_i) \leq length(P_i)$ かつ P_i と交差しないような s_i と t_i を結ぶ道 P'_i が存在する。

(証明) P_i は P_i と交差するとしてよい。 P_i と P_i の共有点 v_1, v_2, \dots, v_q が $P_i[s_i; t_i]$ 上にこの順で現れるものとする。各 $x(1 \leq x \leq q)$ に対して $r_x = \theta(P_i[v_i; v_x])$

とす。 $D = P_i[v_q; t_i] + A[t_i; s_i] + P_i[s_i; v_1]$ とすると $C_{P_i} = P_i[v_i; v_q] + D$ である。閉路 C_{P_i} は内部に f_2 を含まないから、 $\theta(P_i[v_i; v_q]) + \theta(D) = 0$ である。 $P_i[v_i; v_q] + D$ は閉路であるから $|\theta(P_i[v_i; v_q]) + \theta(D)| \leq 1$ である。従って $|r_q| \leq 1$ である。

まず初めに、 $r_q=0$ の場合を考える。補題 3 より $length(P_i[v_i; v_q]) \leq length(P_i[v_i; v_q])$ である。従って道 $P'_i = P_i[s_i; v_1] + P_i[v_i; v_q] + P_i[v_q; t_i]$ は $length(P'_i) \leq length(P_i)$ を満たし、明らかに P'_i は P_i と交差しない。

次に $r_q=1$ の場合を考える。($r_q=-1$ の場合の証明も同様である。) この場合 $r_a=0$ かつ $r_{a+1}=1$ なる整数 $a(1 \leq a \leq q-1)$ が存在する。このとき $length(P_i[v_i; v_a]) \leq length(P_i[v_i; v_a])$ かつ $length(P_i[v_{a+1}; v_q]) \leq length(P_i[v_{a+1}; v_q])$ であるから、 $P'_i = P_i[s_i; v_1] + P_i[v_i; v_a] + P_i[v_a; v_{a+1}] + P_i[v_{a+1}; v_q] + P_i[v_q; t_i]$ とすると $length(P'_i) \leq length(P_i)$ であり、 P'_i は P_i と交差しない。 □

更に次の補題が明らかに成り立つ。

[補題 6] P_i を s_i と t_i を結ぶ G の任意の道とする。このとき次の条件を満たす道 $P_i(2 \leq i \leq k)$ が G に含まれる。

- (a) P_1, P_2, \dots, P_k は G の非交差道である、
- (b) 各 $P_i(2 \leq i \leq k)$ は s_i と t_i を結び P_1 と交差しない G の道の中で最短である。

(証明) G に P_1 に沿って切れ目を入れ、切れ目グラフ $G(P_1)$ を構成する。このとき f_1 と f_2 は $G(P_1)$ 上で一つの面 f となり、すべての端子対は f の周上に存在する。(図 4(a) 参照。) $G(P_1)$ に対して手続き PATH2 を適用して得られる $G(P_1)$ の最短非交差道を P_2, P_3, \dots, P_k とする。このとき P_1, P_2, \dots, P_k は G で非交差であり、また各 $P_i(2 \leq i \leq k)$ は $G(P_1)$ の (s_i, t_i) 間の最短路である。故に P_i は s_i と t_i を結び P_1 と交差しない G の道の中で最短である。 □

以上の補題より、定理 1 を以下のように証明できる。(定理 1 の証明) P_1, P_2, \dots, P_k を G の任意の最短非交差道としよう。明らかに $\theta(P_1) = \theta(P_2) = \dots = \theta(P_k)$ である。 P^* と各 $P_i(1 \leq i \leq l)$ に対して補題 2 を適用すれば、 $length(P'_i) \leq length(P_i)$ かつ

$$\theta(P'_i) = \begin{cases} \theta(P^*) & : \theta(P_i) = \theta(P^*) \text{ のとき} \\ \theta(P^*) + 1 & : \theta(P_i) \geq \theta(P^*) + 1 \text{ のとき} \\ \theta(P^*) - 1 & : \theta(P_i) \leq \theta(P^*) - 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

であるような (s_i, t_i) 間の道 P'_i が存在することがわかる。ここで、 $\theta(P_1) = \theta(P_2) = \dots = \theta(P_l)$ であるが、各 P'_i

は互いに交差するかもしれないことに注意しよう。

明らかに $\theta(P_1^+) = \theta(P_1^*) + 1$ であり, $\theta(P_1^-) = \theta(P_1^*) - 1$ である。また, 補題 4 の証明と同様にして P_1^+ は s_1 と t_1 を結ぶ回転角 $\theta(P_1^*) + 1$ である道の中で最短であり, P_1^- は s_1 と t_1 を結ぶ回転角 $\theta(P_1^*) - 1$ である道のうちで最短であることが示される。

P_1' を

$$P_1' = \begin{cases} P_1^* : \theta(P_1) = \theta(P_1^*) \text{ のとき} \\ P_1^+ : \theta(P_1) \geq \theta(P_1^*) + 1 \text{ のとき} \\ P_1^- : \theta(P_1) \leq \theta(P_1^*) - 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

とし, $\theta = \theta(P_1') = \theta(P_1)$ とする。このとき補題 4 および 5 より, P_1' と交差せず, かつ

$$\text{length}(P_1') \leq \begin{cases} \text{length}(P_i) : 2 \leq i \leq l \text{ のとき} \\ \text{length}(P_i) : l + 1 \leq i \leq k \text{ のとき} \end{cases}$$

であるような道 $P_2'', P_3'', \dots, P_k''$ が存在することがわかる。補題 6 により, G には $\text{length}(P_i'') \leq \text{length}(P_i')$ ($1 \leq i \leq k$) であるような非交差道 $P_1'' = P_1', P_2'', P_3'', \dots, P_k''$ が存在することがわかる。各 i ($1 \leq i \leq k$) に対して $\text{length}(P_i'') \leq \text{length}(P_i)$ であるから, $P_1'', P_2'', \dots, P_k''$ は G の最短非交差道である。□

5. むすび

本論文では, 平面グラフの指定された二つの面の周上にのみ端子対が存在する場合に長さの総和最小な非交差道を求めるアルゴリズムを与え, その計算時間が $O(n \log n)$ であることを示した。今後の課題として, アルゴリズムをより高速化すること, 三つ以上の面の周上に端子があるより一般的な場合に対するアルゴリズムを求めること等が挙げられる。なお, 平面グラフではなく, いくつかの長方形の障害物がある 2次元平面上に端子が与えられた場合に長さの総和最小の非交差道を求めるアルゴリズムについては次の機会に報告する。

謝辞 非交差道問題を御示唆頂いた大阪電通大浅野哲夫教授および Northwestern 大学の D. T. Lee 教授に感謝する。本研究は文部省科学研究費一般研究 (C) 04650300 から一部援助を受けた。

文 献

- (1) Lynch J. F.: "The equivalence of theorem proving and the interconnection problem", ACM SIGDA Newsletter, 5, 3, pp. 31-36(1975).
- (2) Kramer M. R. and Van Leewen J.: "Wirerooting is NP-complete", RUU-CS-82-4, Department of Computer Science, University of Utrecht, Utrecht, the

Netherlands(1982).

- (3) 鈴木 均, 赤間長浩, 西関隆夫: "平面グラフで林を求めるアルゴリズム—指定された二つの面の両方にまたがる端子がある場合", 信学論(A), J71-A, 10, pp. 1897-1905 (1988-10).
- (4) 鈴木 均, 赤間長浩, 西関隆夫: "平面グラフで林を求めるアルゴリズム—各ネットの端子が指定された二つの面の片方にある場合", 信学論(A), J71-A, 12, pp. 2163-2171 (1988-12).
- (5) Suzuki H., Akama T. and Nishizeki T.: "Finding Steiner forests in planar graphs", Proc. First Ann. ACM-SIAM Sympo. on Discrete Algorithms, San Francisco, CA., pp. 444-453 (Jan. 1990).
- (6) Gabow H. N. and Tarjan R. E.: "A linear-time algorithm for a special case of disjoint set union", J. Comput. & Syst. Sci., 30, pp. 209-221 (1985).
- (7) 鈴木 均, 赤間長浩, 西関隆夫: "平面グラフで内素な道を求めるアルゴリズム", 信学論(A), J71-A, 10, pp. 1906-1916 (1988-10).
- (8) Aho A. V., Hopcroft J. E. and Ullman J. D.: "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison-Wesley, Reading, Mass. (1974).
- (9) Tarjan R. E.: "Data Structures and Network Algorithms", SIAM, Philadelphia, Pa. (1983).
- (10) Frederickson G. N.: "Fast algorithms for shortest paths in planar graphs, with applications", SIAM J. Comput., 16, pp. 1004-1022 (1987).

(平成 4 年 12 月 28 日受付, 5 年 8 月 5 日再受付)

高橋 淳也



昭 63 岩手大・工・情報工学卒。平 2 同大大学院修士課程了。同年東北大学院博士課程編入学。平 5 同大大学院博士課程単位取得退学。現在同大助手。配線アルゴリズムに関する研究に従事。情報処理学会会員。

鈴木 均



昭 58 山梨大・工・電気工学卒。昭 63 東北大学院博士課程了。工博。同年同大助手。現在, 同助教授。ネットワークアルゴリズムに関する研究に従事。情報処理学会会員。

西関 隆夫



昭 44 東北大・工・通信卒。昭 49 同大大学院博士課程了。工博。同年同大助手。現在同助教授。アルゴリズム, グラフ理論, VLSI レイアウトの研究と教育に従事。IEEE シニア会員, ACM, 情報処理学会, 日本応用数学会各会員。