2014 年 8 月実施
問題 1　電磁気学
(1 頁目／3 頁中)

Fig. 1(a)～(b)のように，真空 n_0 (誘電率 ε_0，透磁率 μ_0) と平面で接する誘電体媒質を考える．この平面に垂直に平面波が真空から入射すると，その平面波は誘電体媒質に透過するとともに，一部は境界面にて反射され戻ってくる．真空から入射する波の電界を E_{i0}，磁界を H_{i0} として，以下の問に答えよ．なお，入射する波の電界方向を x 軸，磁界方向を y 軸，波の進行方向を z 軸とする．

(1) Fig. 1(a)のように，1 種類の誘電体媒質 n_1 (誘電率 ε_1，透磁率 μ_0) が真空 n_0 に平面で接している．誘電体媒質 n_1 に透過する波の電界 E_{i1}，磁界 H_{i1}，および，真空 n_0 に反射する波の電界 E_{r0}，磁界 H_{r0} を求めよ．

(2) Fig. 1(b)のように，誘電体媒質 n_1 (誘電率 ε_1，透磁率 μ_0) と真空 n_0 との間に，厚み d の誘電体媒質 n_2 (誘電率 ε_2，透磁率 μ_0) が挿入されている．誘電体媒質 n_1 に透過する波の電界 E_{i1}，磁界 H_{i1}，および，真空 n_0 に反射する波の電界 E_{r0}，磁界 H_{r0} を求めよ．なお，$z=0$ は，真空 n_0 と誘電体 n_2 の境界面とする．

(3) Fig. 1(b)において，真空 n_0 に反射波が生じない誘電体 n_2 の条件 (厚み d，誘電率 ε_2) を求めよ．ただし，$\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$ とする．

2014 年 8 月実施
問題 1　電磁気学
(2 頁目／3 頁中)

As shown in Fig. 1(a)-(b), a vacuum n_0 (permittivity ε_0, permeability μ_0) and a dielectric medium are in contact at a plane. When a plane electromagnetic wave in the vacuum is normally incident on the dielectric medium, the wave is transmitted into the dielectric medium and some portion of the wave is reflected at the plane boundary. Let the electric and magnetic fields of the incident wave be E_{i0} and H_{i0}. Answer the following questions. In this coordinate system, the x axis is defined as the direction of the electric field, the y axis is the magnetic field direction and the z axis is the propagation direction of the incident wave.

(1) As shown in Fig. 1(a), a dielectric medium n_1 (permittivity ε_1, permeability μ_0) and the vacuum n_0 are in contact at a plane. Derive the electric field E_{i1} and the magnetic field H_{i1} of the wave transmitted into the dielectric medium n_1, and the electric field E_{r0} and the magnetic field H_{r0} of the wave reflected to the vacuum n_0.

(2) As shown in Fig. 1(b), a dielectric medium n_2 (permittivity ε_2, permeability μ_0) having a thickness of d is inserted between the dielectric medium n_1 (permittivity ε_1, permeability μ_0) and the vacuum n_0. Derive the electric field E_{i1} and the magnetic field H_{i1} of the wave transmitted into the dielectric medium n_1, and the electric field E_{r0} and the magnetic field H_{r0} of the wave reflected to the vacuum n_0. Here, $z = 0$ is the boundary plane between the vacuum n_0 and the dielectric medium n_2.

(3) Derive the condition (thickness d and permittivity ε_2) of the dielectric medium n_2 for there to be no reflection to the vacuum n_0 in Fig. 1(b). Assume that $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$.

2014 年 8 月実施
問題 1　電磁気学
(3 頁目／3 頁中)

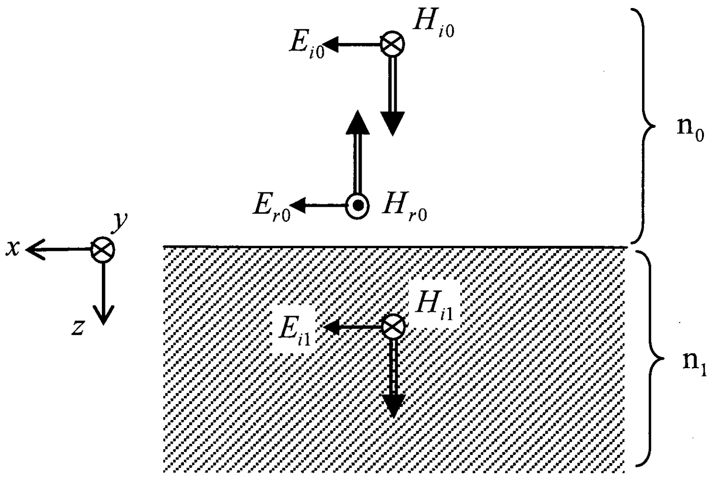

Fig. 1 (a)

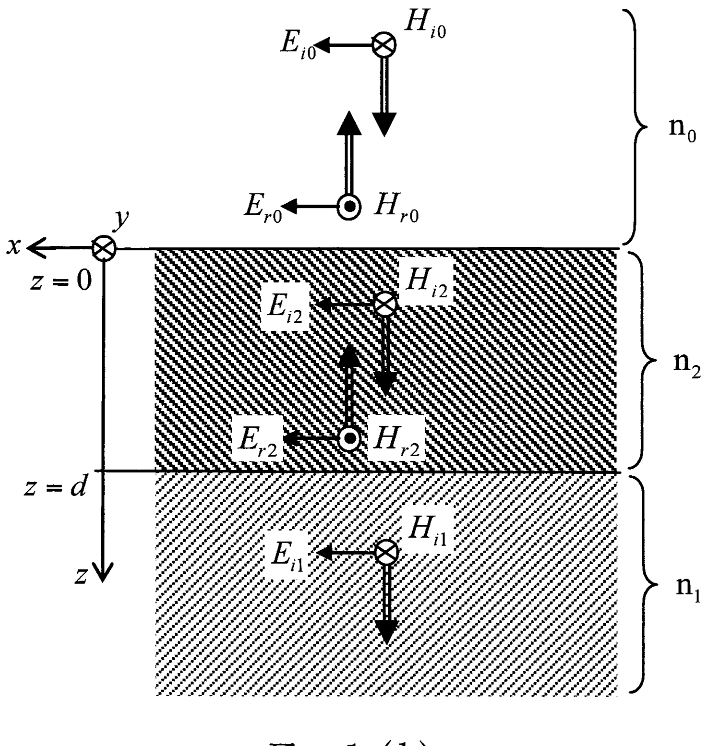

Fig. 1 (b)

2014 年 8 月実施
問題 2　電気回路
（１頁目／２頁中）

(1) 2 端子対回路の入力端に，正弦波電圧 V_1 を印加した時の出力端開放電圧を V_2 とする．ただし，V_1，V_2 はフェーザ電圧を表す．その伝達関数の振幅 $|V_2/V_1|$ の周波数特性が Fig.2(a)のようになる．その回路を何と呼ぶか?

(2) Fig.2(a)のような応答を示す最も簡素な回路を作りたい．10mH のインダクタを一つ使うとして，他には，抵抗，インダクタ，そしてキャパシタのみ使用できる．回路素子の値(有効数字 3 桁)も含めてその回路を示せ．

(3) 問(2)の回路の伝達関数の位相 $\arg(V_2/V_1)$ の周波数特性を図に示せ．縦軸と横軸の目盛も記入のこと．また，その回路が積分回路として機能する入力信号の特徴を述べよ．

(4) 2 端子対回路の伝達関数の振幅特性 $\{|V_2/V_1|\}$ および位相特性 $\{\arg(V_2/V_1)\}$ が Fig.2(b)のようになる 10mH のインダクタを用いた最も簡素な回路を示せ．ただし，使用可能な電子部品は，抵抗，インダクタ，そしてキャパシタのみとする．

(1) When a sine-wave voltage V_1 is applied to the input terminal of a two-terminal-pair circuit, its open-terminal output voltage is V_2. Here, V_1, V_2 are phasor voltages. The frequency response of the amplitude of the transfer function $|V_2/V_1|$ is described by Fig.2(a). What is the circuit called?

(2) We want to make the simplest circuit which shows the response depicted in Fig.2(a). We use a 10 mH inductor. Other usable components are limited to resisters, inductors, and capacitors. Draw the circuit including the values (3 significant figures) of the circuit elements.

(3) Show the frequency response of the phase $\arg(V_2/V_1)$ of the transfer function of the circuit obtained in question (2). Show the scale of the vertical and horizontal axes. Describe the characteristics of the input signals for which the circuit operates as an integral circuit.

(4) Show the simplest circuit using a 10 mH inductor for which the amplitude $\{|V_2/V_1|\}$ and phase $\{\arg(V_2/V_1)\}$ characteristics of the transfer function of a two-terminal-pair circuit are described by Fig.2(b). Usable parts are limited to resisters, inductors, and capacitors.

2014 年 8 月実施
問題 2　電気回路
（２頁目／２頁中）

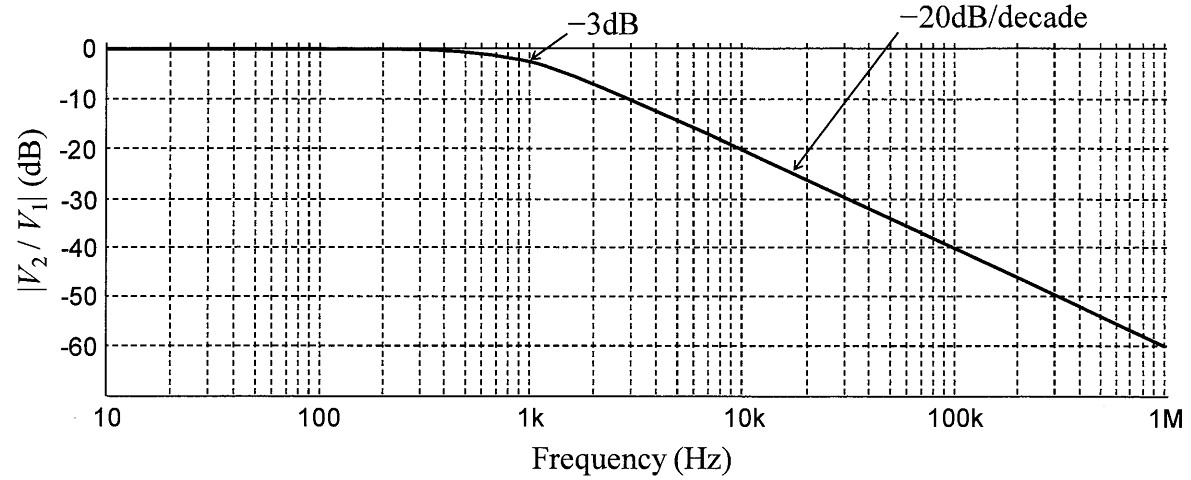

Fig.2(a)

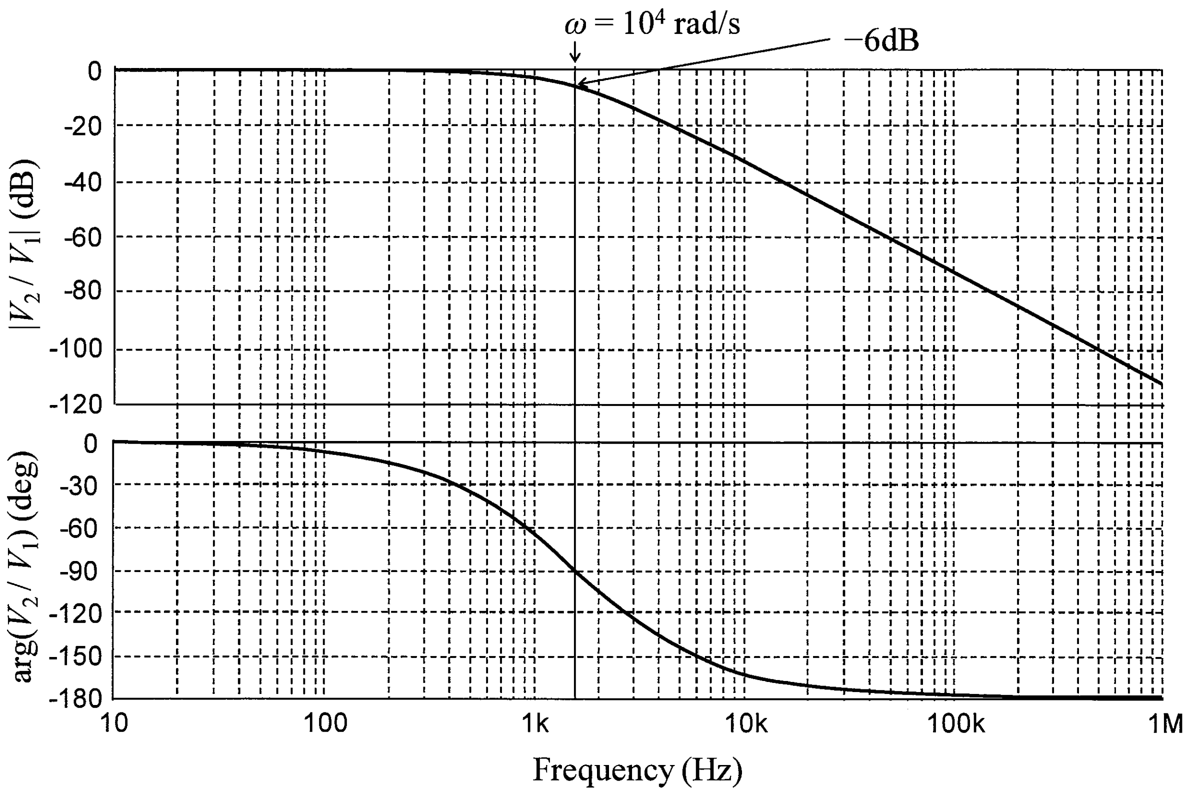

Fig.2(b)

2014 年 8 月実施
問題 3　情報基礎 1
(1 頁目／1 頁中)

$\wedge$ は論理積演算, $\vee$ は論理和演算, $\oplus$ は排他的論理和演算, $\overline{}$ は否定演算を表すとする. $x_1, x_2, \ldots, x_n, y \in \{0,1\}$ とする. $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$ であるとき, 論理関数 f は自己双対関数であるという. 以下の問に答えよ.

(1) $(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$ が自己双対関数であることを示せ.

(2) 論理関数 $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を考える. 次の命題それぞれについて, 真か偽かを判定せよ. ただし, 判定の根拠となる証明を与えること.

(a) $(y \wedge f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \vee (\overline{y} \wedge \overline{f_0(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})})$ は自己双対関数である.

(b) f_0 が自己双対関数ならば, $f_0(x_1 \oplus y, x_2 \oplus y, \ldots, x_n \oplus y) = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus y$ である.

(3) 論理関数 f_1 と f_2 が自己双対関数であるとき, $f_1 \oplus f_2$ は自己双対関数ではないことを証明せよ.

(4) n 変数自己双対関数の個数は全部で $2^{2^{n-1}}$ であることを証明せよ.

Let $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, and $\overline{}$ denote the AND, OR, Exclusive-OR, and NOT operators, respectively. Consider $x_1, x_2, \ldots, x_n, y \in \{0,1\}$. A Boolean function f is called a self-dual function if $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$. Answer the following questions.

(1) Show that $(\overline{x_1} \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$ is a self-dual function.

(2) Consider a Boolean function $f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Determine whether each of the following assertions is true or false. Justify your answers with proofs.

(a) $(y \wedge f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \vee (\overline{y} \wedge \overline{f_0(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})})$ is a self-dual function.

(b) If f_0 is a self-dual function, it holds that $f_0(x_1 \oplus y, x_2 \oplus y, \ldots, x_n \oplus y) = f_0(x_1, x_2, \ldots, x_n) \oplus y$.

(3) When Boolean functions f_1 and f_2 are self-dual functions, prove that $f_1 \oplus f_2$ is not a self-dual function.

(4) Prove that the total number of n-variable self-dual functions is $2^{2^{n-1}}$.

2014 年 8 月実施
問題 4　情報基礎 2
(1 頁目／2 頁中)

以下の 2 つの条件を満たす二分木をヒープと呼ぶ.

(条件 1) 木の最も深いレベル以外は完全に埋まっている. 最も深いレベルは左から右へ順に埋まっている.

(条件 2) 各ノードに格納された整数値は, 子ノードに格納された値より小さいか等しい.

以下の問に答えよ.

(1) 根に格納されている整数値をヒープから削除する手順の概略を説明し, Fig. 4 に示されたヒープから根に格納されている整数値 3 を削除して得られるヒープを図示せよ.

(2) ヒープに新しい整数値を挿入する手順の概略を説明し, Fig. 4 に示されたヒープに整数値 7 を挿入して得られるヒープを図示せよ.

(3) 条件 1 のみを満たす二分木が与えられたとき, 条件 2 も満たすように修正する手順の概略を説明し, その時間計算量が節点数nに対し$O\ (n \log n)$であることを示せ.

A binary tree which satisfies the following two conditions is called a heap.

(Condition 1) All levels of the tree, except possibly the deepest level, are fully filled. The deepest level is filled consecutively from left to right.

(Condition 2) The integer value stored in each node is less than or equal to the value stored in each of its children nodes.

Answer the following questions.

(1) Outline a procedure to remove the integer stored at the root from a heap, and illustrate the heap obtained by removing the integer 3 stored at the root from the heap shown in Fig. 4.

(2) Outline a procedure to insert a new integer to a heap, and illustrate the heap obtained by inserting an integer 7 to the heap shown in Fig. 4.

(3) Given a binary tree which satisfies only Condition 1, outline a procedure to modify it so that it satisfies Condition 2 as well, and show that the time complexity of the procedure is $O\ (n \log n)$ with respect to the number of nodes n.

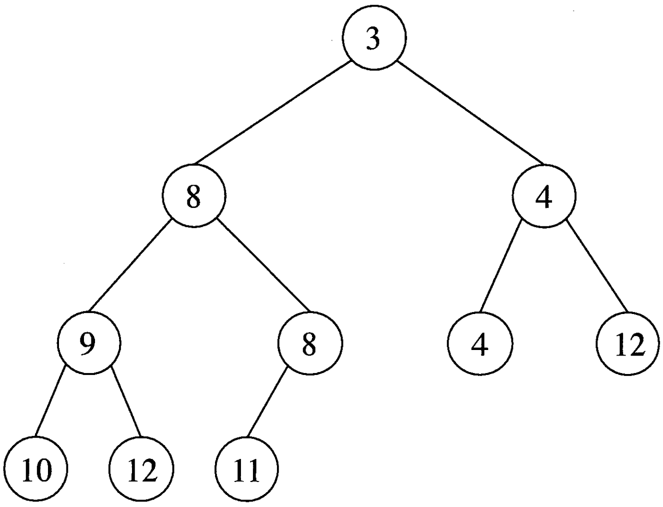

Fig. 4

2014 年 8 月実施
問題 5　物理基礎 1
(1 頁目／3 頁中)

Fig. 5 に示すように，長さLの一様で曲がりやすい綱が，その一部を水平の机上に置き，残りを机の端から鉛直下方に垂れた形で置かれている．綱の線密度をλとし垂れている部分の長さをaとする．重力加速度をgとする．また綱は伸びも縮みもしないものとする．以下の問に答えよ．必要に応じて次の式を用いよ．

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2}$$

(1) 机の表面が滑らかな場合を考える．綱が時刻$t = 0$ で初速度 0ですべり落ち始めた．

(a) 綱の垂れた部分の長さがx $(x > a)$になった．このときの綱の運動方程式を求め，その速度を求めよ．

(b) 問 (1) (a) の場合にエネルギー保存則が満たされていることを示せ．

(c) 綱の先端が机の端を離れる時刻tを求めよ．

(2) 机の表面が粗い場合を考える．机と綱との間の静止摩擦係数および運動摩擦係数をそれぞれμ，μ'とする．

(a) 綱がすべり落ちずにちょうどつりあいの限界にあるとき，垂れた部分の綱の長さを求めよ．

(b) 綱がつりあいの限界の状態から静かにすべり落ち始めた．垂れた部分の長さがx $(x > a)$になるときの綱の速度を求めよ．

(c) 綱の先端が机の端から離れるときの綱の速度を求めよ．

2014 年 8 月実施
問題 5　物理基礎 1
(2 頁目／3 頁中)

As shown in Fig. 5, a uniform flexible rope with length L is put on a desk with a part hanging vertically down from the edge of the desk. Let the linear density of the rope be λ and the length of the hanging part be a. The gravitational acceleration is g. Assume that the rope never stretches nor shrinks. Answer the following questions. Use the following equation, if necessary.

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2}$$

(1) Consider the case when the surface of the desk is smooth. The rope begins to slip down from the edge of the desk at time $t = 0$ with its initial velocity being 0.

(a) The length of the hanging part of the rope reaches x $(x > a)$. Find the equation of the motion of the rope and obtain its velocity.

(b) Show that the law of energy conservation is fulfilled for the case of the question (1)(a).

(c) Find the time t at which the end of the rope leaves the edge of the desk.

(2) Consider the case when the surface of the desk is rough. Let the static and dynamic friction coefficients between the rope and the desk be μ and μ', respectively.

(a) Find the length of the hanging part of the rope when the rope is at the balance limit just before slipping down.

(b) Now the rope begins to slip down slowly from the state of the balance limit. Find the velocity of the rope when the length of the hanging part becomes x $(x > a)$.

(c) Find the velocity of the rope when the end of the rope leaves the edge of the desk.

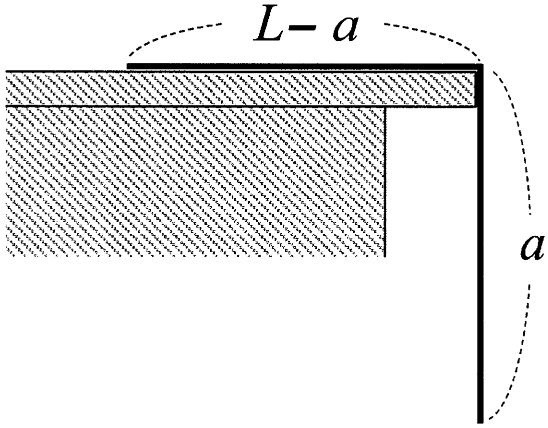

Fig. 5

Question No. 6:　Basic physics 2

2014 年 8 月実施
問題 6　物理基礎 2
(1 頁目／2 頁中)

行列 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，回転行列 $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，および 4×4 行列

$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ を考える．ただし，$\mathbf{C}$，$\mathbf{D}$ は 2×2 行列であり，また，$\mathbf{O}$ は 2×2 零行列である．

以下の問に答えよ．

(1) $\mathbf{A}$ が $\mathbf{R}$ によって $\mathbf{Y} = \mathbf{RA}$ に変換されるとき，θ と $\mathbf{Y}$ を求めよ．ただし，$0 < \theta < \pi$ とする．

(2) $\mathbf{Y}$ の全ての固有値 λ_1，λ_2，λ_3，λ_4 （$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$）とこれらに対応する規格化された固有ベクトルを求めよ．

(3) 任意の正の整数 n に対して $\mathbf{Y}^n$ を求めよ．

(4) α，β，γ，ε を実数とする．$(\alpha+\beta)^2 + (\gamma+\varepsilon)^2 = 1$ の条件下で $\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} \mathbf{Y}^n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \varepsilon \end{pmatrix}$ の最大値を求めよ．

(5) 正方行列 $\mathbf{X}$ の指数関数は次の様に定義される．

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{X}^n$$

ここで $\mathbf{X}^0$ は単位行列を表すものとする．行列 $\exp(\mathbf{Y})$ の対角和と行列式を求めよ．

2014 年 8 月実施
問題 6　物理基礎 2
(2 頁目／2 頁中)

Consider the matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{8} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, the rotation matrix $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, and the 4×4 matrix $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$. Here, $\mathbf{C}$ and $\mathbf{D}$ are 2×2 matrices and $\mathbf{O}$ is a 2×2 zero matrix. Answer the following questions.

(1) When $\mathbf{A}$ is transformed to $\mathbf{Y} = \mathbf{RA}$ by $\mathbf{R}$, find θ and $\mathbf{Y}$. Here, $0 < \theta < \pi$.

(2) Find all the eigenvalues λ_1, λ_2, λ_3, and λ_4 ($\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$) of $\mathbf{Y}$ and their corresponding normalized eigenvectors.

(3) Obtain $\mathbf{Y}^n$ for any positive integer n.

(4) Let α, β, γ, and ε be real numbers. Find the maximum value of

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \varepsilon \end{pmatrix} \mathbf{Y}^n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$ under the condition $(\alpha+\beta)^2 + (\gamma+\varepsilon)^2 = 1$.

(5) The exponential function of a square matrix $\mathbf{X}$ is defined as

$$\exp(\mathbf{X}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\mathbf{X}^n,$$

where $\mathbf{X}^0$ denotes the unit (identity) matrix. Obtain the trace and the determinant of the matrix $\exp(\mathbf{Y})$.