

2015 年 3 月実施  
問題 1 電気工学  
(1 頁目 / 3 頁中)

Fig.1(a)のような制御系がある。制御対象  $P(s)$  および補償器  $C(s)$  は、それぞれ

$$P(s) = \frac{K}{s(1+sT)^2}, \quad C(s) = A \frac{1+saB}{1+sB}$$

で与えられる。ここで、 $K, T [s], A, B [s], a$  は正である。 $P(s)$  および  $C(s)P(s)$  のボード線図を描くと Fig.1(b) のようになる。同図のように、 $P(s)$  は安定限界にある。次の問に答えよ。

- (1)  $P(s)$  の位相特性から判断して、 $T [s]$  の値を求めよ。
- (2)  $P(s)$  が安定限界となっていることを利用して、 $K$  の値を求めよ。
- (3)  $C(s)$  による補償を施した後の制御系の位相余裕  $PM$  [degree] の値を求めよ。
- (4)  $C(s)$  の位相の最大値  $\phi_m$  [rad] とそれを与える周波数  $\omega_m$  [rad/s] は、それぞれ、

$$\phi_m = \sin^{-1} \frac{a-1}{a+1}, \quad \omega_m = \frac{1}{B\sqrt{a}}$$

と表される。 $\omega_m$  はゲイン交差周波数  $\omega_c$  [rad/s] に等しく選ばれている。このとき、 $a, B [s]$ , および  $A$  の値を求めよ。

- (5) 補償前に対する補償後の定常速度偏差の比を求めよ。

Question No. 1: Electrical engineering (2/3)

2015 年 3 月実施  
問題 1 電気工学  
(2 頁目 / 3 頁中)

Consider the control system shown in Fig.1(a). The controlled object  $P(s)$  and the compensator  $C(s)$  are given by

$$P(s) = \frac{K}{s(1+sT)^2}, \quad C(s) = A \frac{1+saB}{1+sB},$$

respectively, where  $K, T [s], A, B [s], a$  are positive. The Bode diagrams of  $P(s)$  and  $C(s)P(s)$  are drawn in Fig.1(b). As shown in the figure,  $P(s)$  is at the stability limit. Answer the following questions.

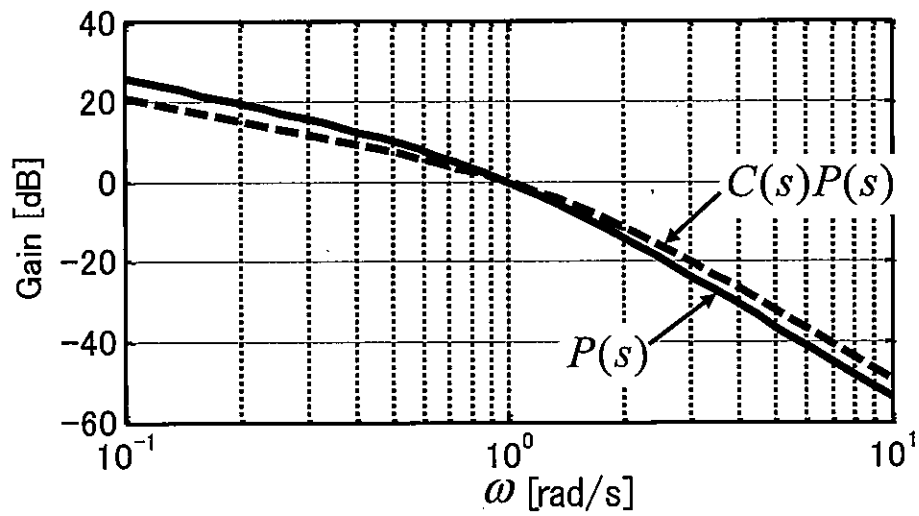
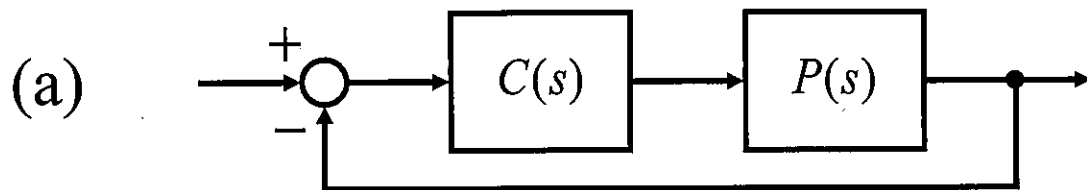
- (1) Find the value of  $T [s]$ , using the phase characteristics of  $P(s)$ .
- (2) Find the value of  $K$ , using the fact that  $P(s)$  is at the stability limit.
- (3) Find the value of the phase margin  $PM$  [degree] of the control system after the compensation with  $C(s)$ .
- (4) The maximum value  $\phi_m$  [rad] of the phase of  $C(s)$  and the frequency  $\omega_m$  [rad/s] that maximizes the phase are represented by

$$\phi_m = \sin^{-1} \frac{a-1}{a+1}, \quad \omega_m = \frac{1}{B\sqrt{a}},$$

respectively. The frequency  $\omega_m$  is chosen to be equal to the gain crossover frequency  $\omega_c$  [rad/s]. Find the values of  $a, B [s]$  and  $A$ .

- (5) Find the ratio of the steady-state velocity error after the compensation to that before the compensation.

2015 年 3 月実施  
問題 1 電気工学  
(3 頁目 / 3 頁中)



(b)

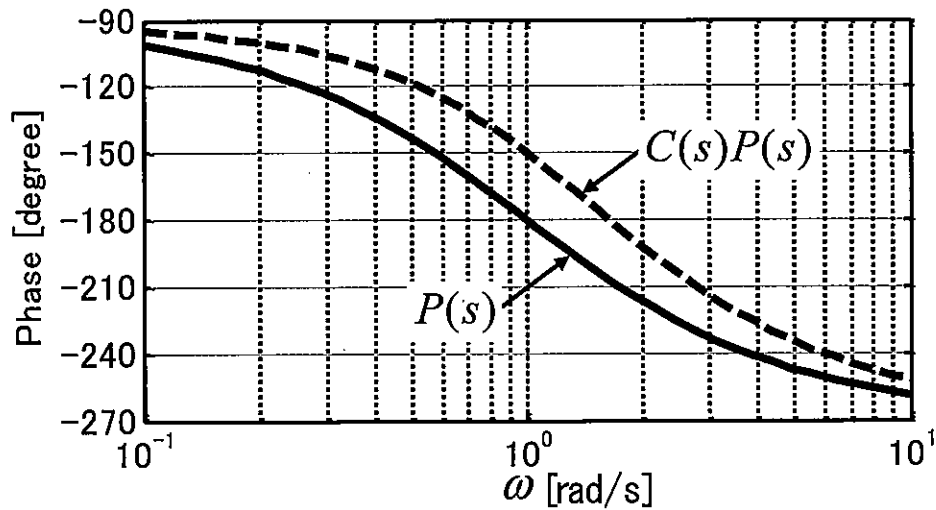


Fig.1

2015年3月実施  
問題2 通信工学  
(1頁目/2頁中)

Fig. 2 に示す搬送波抑圧両側波帯振幅変調 (DSB-AM-SC) を用いた伝送系を考える。伝送路は理想的で損失はないものとする。受信機において両側電力スペクトル密度が  $N_0/2$  である白色雑音  $n(t)$  が付加されるものとする。送信機と受信機中の低域通過フィルタ (LPF) は、ともに伝達関数  $H(f)$  が次式で与えられる理想低域通過フィルタとする。

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

送信機の搬送波を  $A_c \cos(2\pi f_c t)$ 、受信機の局部発振器信号を  $2\cos(2\pi f_c t)$  とする。ここで、 $A_c$  および  $f_c$  はそれぞれ搬送波の振幅および周波数であり、 $f_c \gg f_0$  である。送信機に信号  $s(t)$  として単位インパルス列信号が  $T = 1/f_0$  の時間周期で入力された場合を考える。以下の間に答えよ。

- (1) Fig. 2 の A 点における DSB-AM-SC 変調信号  $x(t)$  を求めよ。次に、求めた  $x(t)$  の概略を図示せよ。
- (2) Fig. 2 の B 点における同期検波信号  $y(t)$  の信号成分の周波数スペクトル  $Y_s(f)$  を求めよ。次に、求めた  $Y_s(f)$  の概略を図示せよ。
- (3) Fig. 2 の C 点における受信機 LPF 出力信号  $z(t)$  の信号対雑音電力比 (S/N) を求めよ。

2015年3月実施  
問題2 通信工学  
(2頁目/2頁中)

Consider a transmission system using double side-band amplitude modulation with suppressed carrier (DSB-AM-SC) as shown in Fig. 2. The transmission line is assumed to be ideal and lossless. White noise  $n(t)$  with the double-sided power spectral density of  $N_0/2$  is assumed to be applied into the receiver. The low pass filters (LPFs) used in the transmitter and receiver are assumed to be ideal low pass filters having identical transfer functions expressed as follows,

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_0 \\ 0, & |f| > f_0 \end{cases}$$

The carrier wave at the transmitter is  $A_c \cos(2\pi f_c t)$ . The local oscillator signal at the receiver is  $2\cos(2\pi f_c t)$ . Here,  $A_c$  and  $f_c$  are the amplitude and the frequency of the carrier, respectively, and  $f_c \gg f_0$ . Consider that a unit impulse train with a time period of  $T = 1/f_0$  is input to the transmitter as a signal  $s(t)$ . Answer the following questions.

- (1) Derive the DSB-AM-SC signal  $x(t)$  at the point A in Fig. 2. Then, sketch the signal  $x(t)$ .
- (2) Derive the frequency spectrum  $Y_s(f)$  of the signal component of the synchronous detection signal  $y(t)$  at the point B in Fig. 2. Then, sketch the frequency spectrum  $Y_s(f)$ .
- (3) Derive the signal-to-noise power ratio (S/N) of the receiver LPF output  $z(t)$  at the point C in Fig. 2.

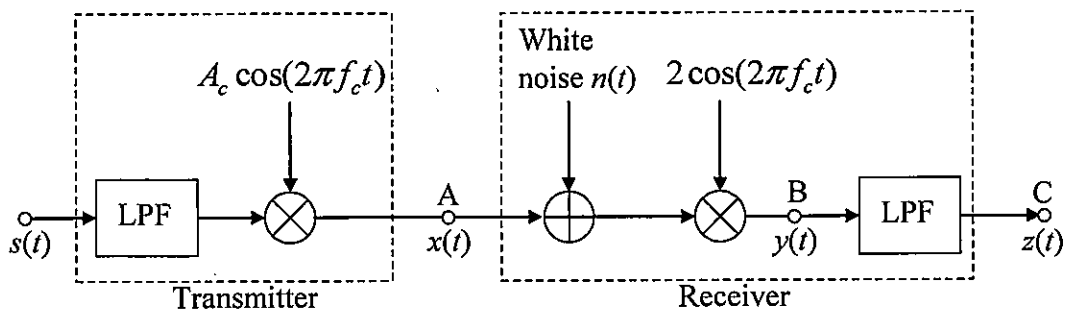


Fig. 2

2015年3月実施  
問題3 電子工学  
(1頁目/2頁中)

半導体中の電子および正孔の密度はそれぞれ

$$n = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_f}{k_B T}\right) \quad \text{と} \quad p = N_v \exp\left(-\frac{E_f - E_v}{k_B T}\right)$$

で与えられる。ここで、 $N_c$  と  $N_v$  は伝導帯および価電子帯の有効状態密度、 $E_c$  は伝導帯底のエネルギー、 $E_v$  は価電子帯頂上のエネルギー、 $E_f$  はフェルミレベル、 $k_B$  はボルツマン定数、 $T$  は絶対温度である。以下の問に答えよ。素電荷は  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  とする。

- (1) 真性キャリア密度  $n_i$  を  $N_c$ ,  $N_v$ ,  $E_g$ ,  $k_B$  および  $T$  で表す式を求めよ。ただし  $E_g$  はエネルギーバンドギャップである。また、真性半導体における  $E_f$  を  $E_c$ ,  $E_v$ ,  $N_c$ ,  $N_v$ ,  $k_B$  および  $T$  で表す式を求めよ。
- (2)  $T = 300 \text{ K}$  において、ある n 型 Si 中の電子および正孔の密度はそれぞれ  $4.5 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  および  $5.0 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$  であった。同じ温度において、正孔の密度が  $1.5 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  である p 型 Si 中の電子の密度を求めよ。
- (3) 問(2)の n 型 Si の  $T = 300 \text{ K}$  における抵抗率を計算せよ。この温度における電子の移動度は  $1500 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$  である。
- (4) 問(2)の n 型 Si および p 型 Si からなる階段 pn 接合を考える。全空乏層幅が  $200 \text{ nm}$  であるとき、n 型 Si および p 型 Si 中の空乏層幅をそれぞれ求めよ。さらに、同条件下で単位接合面積あたりの空間電荷を求めよ。Si 中で不純物は完全にイオン化しているものとする。

Question No. 3: Electronic engineering (2/2)

2015年3月実施  
問題3 電子工学  
(2頁目/2頁中)

The densities of electrons and holes in a semiconductor are given by

$$n = N_c \exp\left(-\frac{E_c - E_f}{k_B T}\right) \quad \text{and} \quad p = N_v \exp\left(-\frac{E_f - E_v}{k_B T}\right),$$

respectively, where  $N_c$  and  $N_v$  are the effective densities of states in the conduction and valence bands,  $E_c$  is the energy at the bottom of the conduction band,  $E_v$  is the energy at the top of the valence band,  $E_f$  is the Fermi level,  $k_B$  is the Boltzmann constant and  $T$  is the absolute temperature. Answer the following questions. Let the elementary charge  $e = 1.6 \times 10^{-19}$  C.

- (1) Derive an expression for the intrinsic carrier density  $n_i$  in terms of  $N_c$ ,  $N_v$ ,  $E_g$ ,  $k_B$  and  $T$ , where  $E_g$  is the energy bandgap. In addition, derive an expression for  $E_f$  in an intrinsic semiconductor in terms of  $E_c$ ,  $E_v$ ,  $N_c$ ,  $N_v$ ,  $k_B$  and  $T$ .
- (2) The densities of electrons and holes in an n-type Si were found to be  $4.5 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  and  $5.0 \times 10^3 \text{ cm}^{-3}$ , respectively, at  $T = 300$  K. Calculate the electron density in a p-type Si with a hole density of  $1.5 \times 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  at the same temperature.
- (3) Calculate the specific resistance of the n-type Si in question (2) at  $T = 300$  K. The electron mobility at this temperature is  $1500 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- (4) Consider an abrupt pn junction between the n-type Si and the p-type Si in question (2). Calculate the widths of the depletion layers in the n-type Si and the p-type Si, respectively, in the case where the total width of the depletion layers is 200 nm. In addition, calculate the space charge per unit junction area under the same condition. Assume full ionization of impurities in Si.

Question No. 4: Computer science 1 (1/1)

2015年3月実施  
問題4 計算機1  
(1頁目/1頁中)

クロック信号の立ち上がりに同期して、各時刻  $t=1,2,\dots$  に1ビット信号  $x_t \in \{0,1\}$  を受け取り、1ビット信号  $z_t \in \{0,1\}$  を出力する順序回路を考える。本順序回路は、 $t \geq 3$  において  $x_t x_{t-1} x_{t-2} = 101$  という入力系列を受け取るごとに、1を出力し、それ以外では0を出力する。本順序回路に関する以下の間に答えよ。

- (1) 入力系列  $x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = 110101$  に対する出力系列  $z_6 z_5 z_4 z_3 z_2 z_1$  を示せ。また、このときの出力信号のタイミングチャートを、クロック信号および入力信号のタイミングチャートとともに示せ。ただし、ゲート遅延は無視できるほど小さいと仮定せよ。
- (2) 本順序回路の状態遷移図を示せ。ただし、状態数は3とせよ。
- (3) 本順序回路の励起式(状態式)及び出力式を、最簡積和形の論理式で示せ。ただし、現在の状態を表す状態信号を  $y_1, y_2 \in \{0,1\}$ 、次の状態を表す状態信号を  $Y_1, Y_2 \in \{0,1\}$  とする。
- (4) 本順序回路の回路図をDフリップフロップ二つと適当な論理ゲートを用いて示せ。Dフリップフロップの初期状態も示すこと。

Consider a sequential circuit which receives a 1-bit signal  $x_t \in \{0,1\}$  and outputs a 1-bit signal  $z_t \in \{0,1\}$  at each time  $t=1,2,\dots$  in synchronization with a rising edge of a clock signal. The sequential circuit outputs 1 when it receives an input sequence  $x_t x_{t-1} x_{t-2} = 101$  at  $t \geq 3$ , and outputs 0 otherwise. Answer the following questions about this sequential circuit.

- (1) Show the output sequence  $z_6 z_5 z_4 z_3 z_2 z_1$  corresponding to the input sequence  $x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = 110101$ , and show the timing chart of the output signal together with those of the input and clock signals. Suppose that gate delay is negligibly small.
- (2) Draw a state-transition diagram of the sequential circuit. Suppose that the number of states is 3.
- (3) Show the excitation equations (state equations) and output equation of the sequential circuit using logical expressions in the minimum sum-of-products form. Suppose that  $y_1, y_2 \in \{0,1\}$  and  $Y_1, Y_2 \in \{0,1\}$  are the current and next state signals, respectively.
- (4) Draw a circuit diagram of the sequential circuit using two D flip-flops and adequate logic gates, and specify the initial state of the D flip-flops.



2015年3月実施  
問題5 計算機2  
(1頁目/1頁中)

Fig. 5 に示す再帰関数  $f$  を考える。ここで、入力  $x$  と  $y$  は任意の正の整数であるとする。関数  $\text{div}(x,y)$  は、 $x$  を  $y$  で割った商を整数で返し、 $\text{mod}(x,y)$  は、 $x$  を  $y$  で割った余りを整数で返す。演算子 ‘-’ と ‘\*’ は、整数の減算と乗算を各々表す。また、式 “if  $e_1=e_2$  then  $e_3$  else  $e_4$ ” の値は、 $e_1$  の値が  $e_2$  の値に等しければ  $e_3$  の値に、そうでなければ  $e_4$  の値に等しい。 $f$  に関する以下の間に答えよ。

- (1)  $f(2,7)$  を計算せよ。計算の過程も示すこと。
- (2)  $f(x,y)$  の計算が停止することを示せ。
- (3)  $f(x,y)$  を計算するために必要な再帰関数呼び出しの回数を  $y$  に関するオーダで示せ。その根拠も説明せよ。
- (4)  $f(x,y+1)$  の値は  $x*f(x,y)$  の値と等しいことを示せ。

Consider the recursive function  $f$  shown in Fig. 5. Here, it is assumed that the inputs  $x$  and  $y$  are any positive integers. The function  $\text{div}(x,y)$  returns the integer quotient of  $x$  divided by  $y$ , and  $\text{mod}(x,y)$  returns the integer remainder of  $x$  divided by  $y$ . The operators ‘-’ and ‘\*’ denote integer subtraction and multiplication, respectively. Furthermore, the value of the expression “if  $e_1=e_2$  then  $e_3$  else  $e_4$ ” equals the value of  $e_3$  if the value of  $e_1$  is equivalent to the value of  $e_2$ , and equals the value of  $e_4$  otherwise. Answer the following questions about  $f$ .

- (1) Calculate  $f(2,7)$ . Also, show your working.
- (2) Show that the calculation of  $f(x,y)$  terminates.
- (3) Show the order of the number of the recursive function calls required to calculate  $f(x,y)$  in terms of  $y$ . Justify your answer.
- (4) Show that the value of  $f(x,y+1)$  is equivalent to the value of  $x*f(x,y)$ .

```
f(x,y) =  
  if y=1 then x  
  else if mod(y,2)=0 then f(x*x,div(y,2))  
  else x*f(x,y-1)
```

Fig. 5

2015 年 3 月実施  
問題 6 物理専門 1  
( 1 頁目 / 2 頁中 )

以下のシュレーディンガー方程式で記述される 2 準位量子系をを考える。ここに  $H$  はハミルトニアン,  $|\psi\rangle$  は  $H$  の固有状態ベクトル,  $\varepsilon$  はその固有値である。

$$H|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle \quad (6A)$$

$$H = \begin{bmatrix} E_1 & -A \\ -A & E_2 \end{bmatrix} \quad (6B)$$

以下の問に答えよ。

- (1) この系のエネルギー固有値  $\varepsilon$  をすべて求めよ。
- (2) 次のように与えられる  $2 \times 2$  行列  $U$  を考える。

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (6C)$$

$U$  の逆行列  $U^{-1}$  を求めよ。

- (3)  $|\psi\rangle$  および  $H$  を,  $U$  と  $U^{-1}$  を用いて次式のように  $|\phi\rangle$  および  $H'$  に変換する。

$$|\phi\rangle = U^{-1}|\psi\rangle \quad (6D)$$

$$H' = U^{-1}HU \quad (6E)$$

このとき  $|\phi\rangle$  は  $H'$  の固有状態であり, その固有値は, やはり  $\varepsilon$  となることを示せ。

- (4)  $E_1 = E_2 = E_0$  とする時,  $H$  の固有値  $\varepsilon$  と対応する固有状態ベクトル

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \quad (6G)$$

をすべて求めよ。ただし  $|\psi\rangle$  は規格化されているものとする。

- (5)  $E_1 = E_2 = E_0$  のとき,  $H'$  の行列表現を求め,  $H$  の固有値がその対角要素に並ぶことを示せ。

2015 年 3 月実施  
問題 6 物理専門 1  
( 2 頁目 / 2 頁中 )

Consider a two-level quantum system described by the following Schroedinger equation. Here,  $H$  is the Hamiltonian,  $|\psi\rangle$  is the eigenstate vector of  $H$ , and  $\varepsilon$  is its eigenvalue.

$$H|\psi\rangle = \varepsilon|\psi\rangle, \quad (6A)$$

$$H = \begin{bmatrix} E_1 & -A \\ -A & E_2 \end{bmatrix}. \quad (6B)$$

Answer the following questions.

(1) Obtain all the energy eigenvalues  $\varepsilon$  of this system.

(2) Consider a  $2 \times 2$  matrix  $U$  described as follows:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (6C)$$

Obtain the inverse matrix  $U^{-1}$  of  $U$ .

(3) We transform  $|\psi\rangle$  and  $H$  into  $|\phi\rangle$  and  $H'$  by using  $U$  and  $U^{-1}$  as follows:

$$|\phi\rangle = U^{-1}|\psi\rangle, \quad (6D)$$

$$H' = U^{-1}HU. \quad (6E)$$

Show that  $|\phi\rangle$  is an eigenstate of  $H'$  and its eigenvalue is also given by  $\varepsilon$ .

(4) When  $E_1 = E_2 = E_0$ , obtain all the eigenvalues  $\varepsilon$  of  $H$  and their corresponding eigenstate vectors

$$|\psi\rangle = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}. \quad (6G)$$

Assume that  $|\psi\rangle$  is normalized.

(5) When  $E_1 = E_2 = E_0$ , obtain the matrix expression of  $H'$  and show that the eigenvalues of  $H$  lie on its diagonal elements.

2015年3月実施  
問題7 物理専門2  
(1頁目/3頁中)

複素変数  $z$  の関数

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{z+1}$$

を考える。ただし、 $a$  は、 $0 < a < 1$  を満たす実定数である。また、 $C_1, C_2, C_3, C_4$  は、以下のように定義された積分路である。

$$C_1: z = t \quad (r \leq t \leq R),$$

$$C_2: z = Re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

$$C_3: z = (R+r-t)e^{2\pi i} \quad (r \leq t \leq R),$$

$$C_4: z = re^{i(2\pi-t)} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

ただし、 $t$  は媒介変数であり、 $i$  は虚数単位である。また、 $r$  と  $R$  はそれぞれ  $0 < r < 1$  と  $1 < R$  を満たす実数である。以下の問に答えよ。

(1) 複素積分  $\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(z) dz$  の値を求めよ。

(2) 複素積分  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_2} f(z) dz$ 、および  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_4} f(z) dz$  の値を求めよ。

(3) 複素積分  $\int_{C_1} f(z) dz$  と  $\int_{C_3} f(z) dz$  との間に成り立つ関係式を求めよ。

(4) 任意の実数  $x$  に対して、等式  $I \equiv \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$  ( $0 < a < 1$ ) が成り立つことを示せ。

Question No. 7: Advanced physics 2 (2/3)

2015 年 3 月実施  
問題 7 物理専門 2  
(2 頁目 / 3 頁中)

Consider a function

$$f(z) = \frac{z^{a-1}}{z+1}$$

of a complex variable  $z$ . Here,  $a$  is a real constant that satisfies  $0 < a < 1$ .  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  and  $C_4$  are integral paths defined as follows (Fig. 7),

$$C_1 : z = t \quad (r \leq t \leq R),$$

$$C_2 : z = Re^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi),$$

$$C_3 : z = (R+r-t)e^{2\pi i} \quad (r \leq t \leq R),$$

$$C_4 : z = re^{i(2\pi-t)} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Here,  $t$  is a parameter, and  $i$  is the imaginary unit. Also,  $r$  and  $R$  are real numbers satisfying  $0 < r < 1$  and  $1 < R$ , respectively. Answer the following questions.

(1) Find the value of the complex integral  $\int_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(z)dz$ .

(2) Find the values of the complex integral  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_2} f(z)dz$  and  $\lim_{r \rightarrow +0} \int_{C_4} f(z)dz$ .

(3) Find the relationship between  $\int_{C_1} f(z)dz$  and  $\int_{C_3} f(z)dz$ .

(4) Prove the equality  $I \equiv \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}}{x+1} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}$  ( $0 < a < 1$ ) for any real number  $x$ .

Question No. 7: Advanced physics 2 (3/3)

2015 年 3 月実施  
問題 7 物理専門 2  
(3 頁目 / 3 頁中)

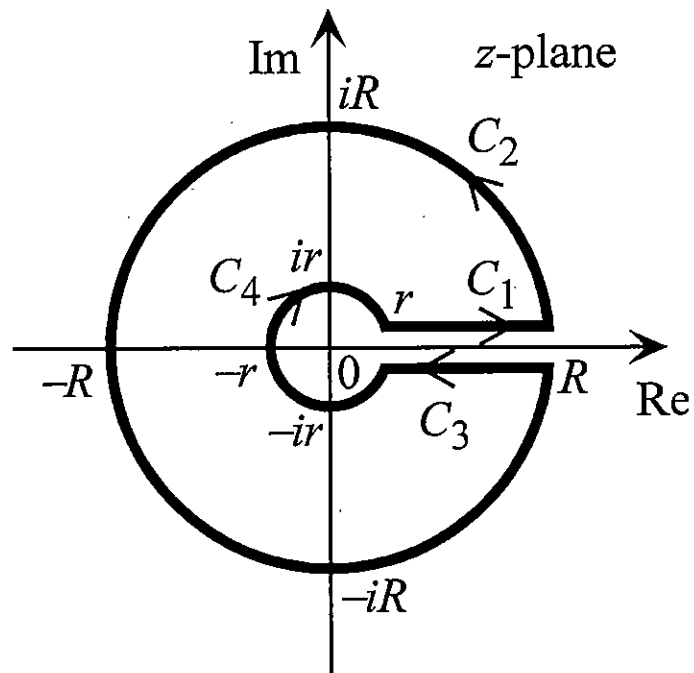


Fig. 7