2016 年 8 月実施
問題 1　電磁気学
(1 頁目／3 頁中)

Fig. 1(a)－(d)に示すように，辺の長さ a の正方形で，厚さ t の 3 枚の導体平板（導体 A, 導体 B, 導体 C）を平行に，真空中に配置する．導体 A と導体 B との間隔を $2d$，導体 B と導体 C との間隔を $3d$ とする．導体 B に電荷 $+Q$ を与える．以下の問に答えよ．ただし，真空の誘電率を ε_0 とする．3 枚の導体平板の端部効果は無視でき，電界は x 成分のみ存在すると仮定する．x 軸の正の方向を電界の正方向と定義する．

(1) Fig. 1(a) において，$-\ell \leq x \leq \ell$ における電界 E を求め，E と x との関係をグラフに示せ．

(2) Fig. 1(b) に示すように，導線で導体 A を導体 C と接続する．導線の抵抗は無視できる．$-\ell \leq x \leq \ell$ における電界 E を求め，E と x との関係をグラフに示せ．

(3) Fig. 1(c) に示すように，導体 A と導体 C を接地する．

　(i) 導体 B の電位 V を求め，$-\ell \leq x \leq \ell$ における V と x との関係をグラフに示せ．

　(ii) 導体 B と接地導体との間の静電容量 C_{total} を求めよ．また，導体 A と導体 B との間に蓄積されている静電エネルギー密度 u_{AB} に対する，導体 B と導体 C との間に蓄積されている静電エネルギー密度 u_{BC} の比（$u_{\mathrm{BC}} / u_{\mathrm{AB}}$）を求めよ．

(4) Fig. 1(d) に示すように，導体 A と導体 C を接地し，導体 B と導体 C との間に幅 a で厚さ $3d$ の誘電体を挿入する．導体 A に $-Q/2$ の電荷が現れるときの誘電体の挿入長 h を求めよ．ただし，誘電体の誘電率を ε とする．

As shown in Fig. 1(a)－(d), three conducting plates (conductor A, conductor B, and conductor C) which are squares with one side a and thickness t are located in parallel and vacuum. Conductors A and B are separated by a distance $2d$ and conductors B and C are separated by a distance $3d$. Conductor B is given a charge $+Q$. Answer the following questions. The permittivity of vacuum is ε_0. The edge effects of three conducting plates can be neglected, and the electric field can be assumed to be limited to the x component. The positive direction along the x-axis is defined as the positive direction of the electric field.

(1) In Fig. 1(a), derive the electric field E in the range $-\ell \leq x \leq \ell$, and show the relationship between E and x on a graph.

(2) As shown in Fig. 1(b), conductor A is connected to conductor C with a conducting wire. The resistance of the conducting wire can be neglected. Derive the electric field E in the range $-\ell \leq x \leq \ell$, and show the relationship between E and x on a graph.

(3) As shown in Fig. 1(c), conductors A and C are grounded.

(i) Derive the electric potential V of conductor B, and show the relationship between V and x on a graph in the range $-\ell \leq x \leq \ell$.

(ii) Derive the capacitance C_{total} among conductor B and the grounded conductors. And derive the ratio ($u_{\mathrm{BC}}/u_{\mathrm{AB}}$) of the electrostatic energy density u_{BC} stored between conductors B and C to the electrostatic energy density u_{AB} stored between conductors A and B.

(4) As shown in Fig. 1(d), conductors A and C are grounded, and a dielectric of width a and thickness $3d$ is inserted between conductors B and C. Find the insertion length h of the dielectric inserted between conductors B and C to make the charge on conductor A equal to $-Q/2$. The permittivity of the dielectric is ε.

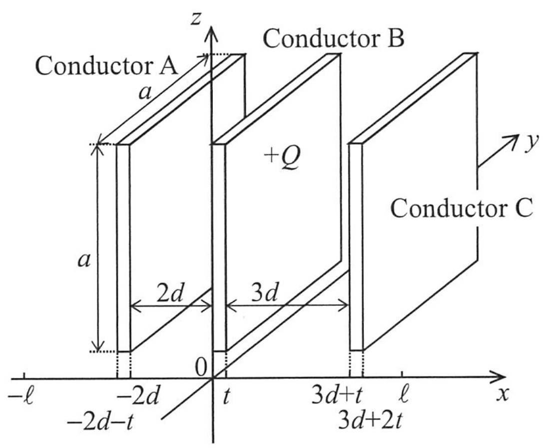

Fig. 1(a)

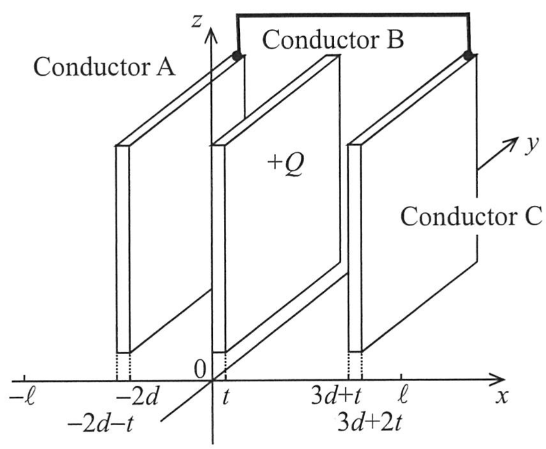

Fig. 1(b)

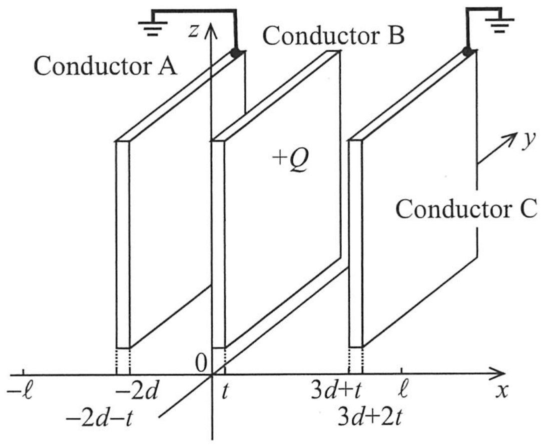

Fig. 1(c)

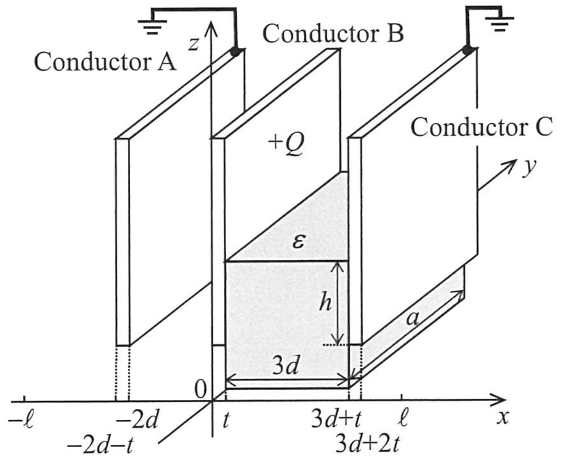

Fig. 1(d)

2016 年 8 月実施
問題 2　電気回路
（1 頁目／2 頁中）

以下の問に答えよ．答案には解答の過程も記述せよ．

(1) Fig. 2(a)に示すように，一次回路と二次回路が相互インダクタンス M の密結合変成器で結合されている．一次コイルと二次コイルの自己インダクタンスをそれぞれ L_1 , L_2 , 内部抵抗をそれぞれ r_1 , r_2 とする．一次回路側に角周波数 ω の交流電圧源 E_o を接続する．

(i) 一次回路と二次回路における電圧 V_1 , V_2 を電流 I_1 , I_2 を用いて示せ．

(ii) Fig. 2(a)と等価な T 型回路を示せ．

(iii) Fig. 2(a)の二次回路側に抵抗 R_1 を接続する． $L_1 = L_2 = L$, $r_1 = r_2 = r$, $r \ll R_1$ と仮定する場合， V_1 に対する I_2 の位相差を求めよ．

(2) Fig. 2(b)に示す回路について以下の問に答えよ．

(i) スイッチ S を開いて十分に時間が経過した．インダクタンス L_3 を流れる電流 i を求めよ．

(ii) 時刻 $t = 0$ においてスイッチ S を閉じた．インダクタンス L_3 を流れる電流 i を t の関数 $(t > 0)$ として求めよ．

Answer the following questions. Give your answers in logical steps.

(1) As shown in Fig. 2(a), a primary circuit and a secondary circuit are tightly coupled by a transformer with a mutual inductance M. The self–inductances of the primary coil and the secondary coil are L_1 and L_2, and their internal resistances are r_1 and r_2, respectively. An AC voltage source E_o of angular frequency ω is connected to the side of the primary circuit.

(i) Express the voltages V_1 and V_2 using currents I_1 and I_2 in the primary circuit and the secondary circuit.

(ii) Show an equivalent T–shape circuit of Fig. 2(a).

(iii) A resistor R_1 is connected to the side of the secondary circuit. Give the phase difference of I_2 from V_1 , assuming that $L_1 = L_2 = L$, $r_1 = r_2 = r$, $r \ll R_1$.

(2) Answer the following questions about the electric circuit shown in Fig. 2(b).

(i) The switch S was opened and enough time has passed. Give the current i through the inductance L_3.

(ii) The switch S is closed at $t = 0$. Give the current i through the inductance L_3 as a function of t $(t > 0)$.

2016 年 8 月実施
問題 2　電気回路
（2 頁目／2 頁中）

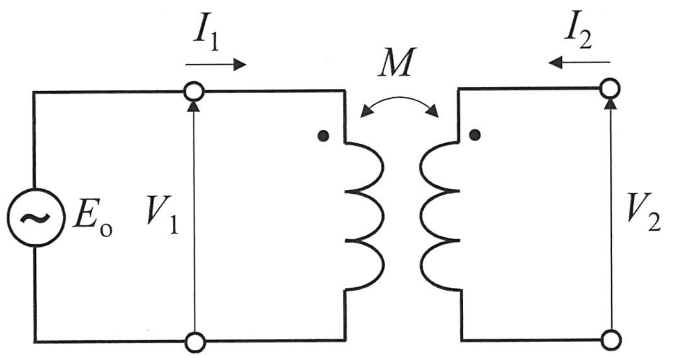

Fig. 2(a)

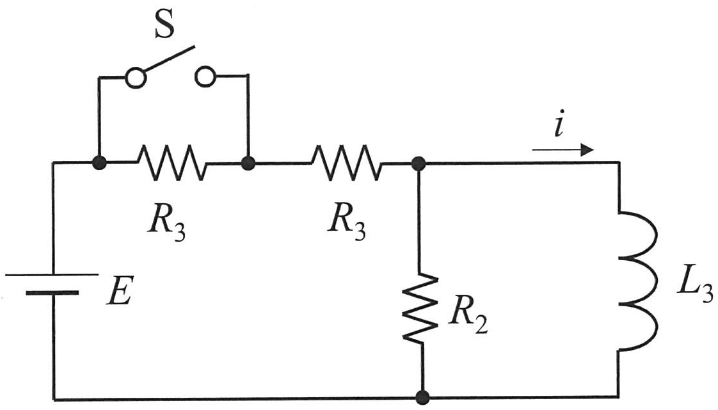

Fig. 2(b)

2016年 8月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／1頁中)

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, s_1, s_2, \ldots, s_{n+1} \in \{0,1\}$ に対して，n 桁 2 進数の加算を以下の式で表現する．

$$[s_{n+1}s_ns_{n-1}\ldots s_1] = [a_na_{n-1}\ldots a_1] + [b_nb_{n-1}\ldots b_1]$$

例えば, $[110] = [11] + [11]$ である．論理積, 論理和, 否定演算子をそれぞれ $\wedge, \vee, \bar{}$ とする．
以下の問に答えよ．

(1) s_1 の最簡積和形を書け．

(2) s_2 の最簡積和形を書け．

(3) $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して，a_i，b_i と下位ビット加算からの桁上がりを加えた際の桁上がりを $c_{i+1} \in \{0,1\}$ とし，$c_1 = 0$ とする．c_{i+1} を a_i, b_i, c_i を用いた論理式で書け．

(4) s_{n+1} を $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ を用いた論理式で書け．

Consider $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n, s_1, s_2, \ldots, s_{n+1} \in \{0,1\}$, and let n-digit binary addition be as shown in the following equation,

$$[s_{n+1}s_ns_{n-1}\ldots s_1] = [a_na_{n-1}\ldots a_1] + [b_nb_{n-1}\ldots b_1].$$

For example, $[110] = [11] + [11]$. Let $\wedge, \vee$, and $\bar{}$ denote AND, OR, and NOT Boolean operators, respectively.
Answer the following questions.

(1) Write the minimum sum-of-products expression of s_1.

(2) Write the minimum sum-of-products expression of s_2.

(3) Let $c_{i+1} \in \{0,1\}$ denote a carry when adding a_i, b_i and a carry of lower bits addition, where $i = 1, 2, \ldots, n$, and let $c_1 = 0$. Write a Boolean expression of c_{i+1} with a_i, b_i, and c_i.

(4) Write a Boolean expression of s_{n+1} with $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$.

2016年 8月実施
問題4 情報基礎2
(1頁目／1頁中)

m 個の互いに異なる整数 $A[0], A[1], \ldots, A[m-1]$ を要素とする配列 A と，n 個の互いに異なる整数 $B[0], B[1], \ldots, B[n-1]$ を要素とする配列 B が与えられたとき，両方の配列に共通して存在する要素を全て出力する問題 P を考える．次の問に答えよ．

(1) 問題 P を $O(mn)$ 時間で解くアルゴリズムの概略を数行程度で記述せよ．

(2) 配列 B の要素を整列させるとき，その時間計算量が $O(n \log n)$ となる整列アルゴリズムの名称を1つ挙げよ．

(3) 配列 B の要素があらかじめ昇順に整列されていると仮定する．この仮定を利用して，問題 P を問 (1) のアルゴリズムよりも効率的に解くアルゴリズムの概略を数行程度で記述し，その時間計算量を与えよ．ただし，配列 A の要素を並び替えてはいけない．

(4) 配列 A と配列 B の要素があらかじめ昇順に整列されていると仮定する．問題 P を $O(m+n)$ 時間で解くアルゴリズムを20行以内の擬似コードとして記述せよ．

(5) 配列 A と配列 B の要素が整列されていない場合でも，あるデータ構造を用いることで，問題 P を $O(m+n)$ 時間で解くアルゴリズムを設計できる．データ構造の名前を挙げたうえで，そのアルゴリズムの概略を数行程度で記述せよ．ただし，配列 A と配列 B の要素の最大値は $10(m+n)$ 以下であると仮定する．

Given arrays A of m distinct integers $A[0], A[1], \ldots, A[m-1]$ and B of n distinct integers $B[0], B[1], \ldots, B[n-1]$, we consider the problem P to output the elements that exist in both of the arrays. Answer the following questions.

(1) Outline, in a few lines, an algorithm that solves P in $O(mn)$ time.

(2) Give the name of an algorithm with time complexity of $O(n \log n)$ for sorting elements of the array B.

(3) Assume that the array B is sorted in ascending order in advance. Outline, in a few lines, a more efficient algorithm than the one of the question (1) that utilizes the assumption for solving P, and give its time complexity. Here, it is not allowed to exchange elements of the array A.

(4) Assume that both arrays A and B are sorted in ascending order in advance. Describe, as a psuedo code no longer than 20 lines, an efficient algorithm to solve P with time complexity of $O(m+n)$.

(5) Even if neither array A nor B was sorted, we could design an algorithm that solves P with time complexity of $O(m+n)$, by using a data structure. Give the name of the data structure, and outline the algorithm in a few lines. Here, assume that the maximum value of the elements of the arrays A and B is at most $10(m+n)$.

2016 年 8 月実施
問題５　物理基礎１
（１頁目／３頁中）

ある種の電子エネルギー分析器では，各々が円筒状扇形の形状を有する内側と外側の電極間の空間中を，電子が Fig. 5(a)のように２次元的に運動する．外側電極に対して内側電極が正にバイアスされ，この空間内を運動する電子は原点に向かう中心力を受ける．入口スリット上に収束された入射電子が適切なエネルギー E_o を有する場合，入射角に関係なく，電子は出口スリットに向かって再収束される．このような運動を Fig. 5(b)の $r-\theta$ 極座標系で考える．$f(r)$ は原点に向かう中心力を表す．電子の位置 (r,θ) を時間の関数として記述する運動方程式は

$$\begin{aligned} m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) &= -f(r) \\ m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta}) &= 0 \end{aligned} \tag{5A}$$

で与えられる．ここでドット（˙）は時間微分を示す．地点 $(r_o,0)$ での速度が $\mathbf{v}_o$ である電子の運動に関する以下の問に答えよ．m，ℓ，v_o は，それぞれ，電子の質量，$mr^2\dot{\theta}$，$|\mathbf{v}_o|$ を表す．φ は $\mathbf{v}_o$ と $\theta=\pi/2$ の直線の間の角である．

(1)　ℓ が保存量であることを示せ．

(2)　$\ell = r_o m v_o \cos\varphi$ を示せ．

(3)　Eq. (5A)から，r を θ の関数として記述する Eq. (5B) を導出せよ．必要であれば，関係 $dr/d\theta = \dot{r}/\dot{\theta}$ を用いよ．

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{mr^2}{\ell^2}f(r) \tag{5B}$$

(4)　$v_o=\sqrt{r_o f(r_o)/m}$ で $\varphi=0$ のとき $r(\theta)=r_o$ は Eq. (5B) の解となることを示せ．

(5)　このタイプの分析器の実際の動作では，φ は必ずしもゼロではなく，$\cos\varphi\approx 1$ と $\sin\varphi\approx\varphi$ が満たされる領域内にある小さい値をとる．従って，$v_o=\sqrt{r_o f(r_o)/m}$ であっても，$r(\theta)=r_o$ の代わりに $r(\theta)=r_o+\Delta(\theta)$ の形で Eq. (5B) の解を探す必要がある．φ は小さいので，$r_o \gg \Delta(\theta)$ が仮定できる．この時には Eq. (5B)は Eq. (5C)で近似される．

$$\frac{1}{r_o}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{\Delta(\theta)}{r_o}\right)+\frac{\Delta(\theta)}{r_o^{\,2}}=-\frac{mr_o^{\,2}}{\ell^2}\left(2\frac{f(r_o)}{r_o}+f'(r_o)\right)\Delta(\theta) \tag{5C}$$

ここで，$f'(r)$ は $df(r)/dr$ で与えられる．

(a) $f(r)=a/r$（a は正の定数）に対して Eq. (5C)は Eq. (5D) に変形されることを示せ．

$$\frac{d^2\Delta(\theta)}{d\theta^2}=-2\Delta(\theta) \tag{5D}$$

(b) Eq. (5D)を解くことにより，入射電子が Fig. 5(a)に示すように出口スリットで再収束される角度 θ_o を決めよ．$v_o=\sqrt{r_o f(r_o)/m}$ 中の r_o と $f(r_o)$ は分析器の動作条件から決定されるので，$mv_o^{\,2}/2$ から E_o を知ることができる．

In a certain type of electron energy analyzer, electrons move two-dimensionally in the space between inner and outer electrodes each with the shape of a cylindrical sector as depicted in Fig. 5(a). The inner electrode is positively biased with respect to the outer one, and electrons moving in this space are subject to a central force pointing to the origin. If incident electrons focused on the entrance slit have an appropriate energy E_o, they are refocused onto the exit slit regardless of their incident angles. Let us consider such motions in the $r-\theta$ polar coordinate system shown in Fig. 5(b). $f(r)$ represents the central force pointing to the origin. The equations of motion, which describe the position (r,θ) of the electron as a function of time, are given by

$$\begin{aligned} &m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)=-f(r), \\ &m(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})=0. \end{aligned} \qquad (5A)$$

Here a dot ($\dot{}$) denotes time differentiation. Answer the following questions concerning the motion of an electron whose velocity is $\mathbf{v}_o$ at point $(r_o, 0)$. Let m, ℓ, and v_o denote the electron mass, $mr^2\dot{\theta}$, and $|\mathbf{v}_o|$, respectively. φ is the angle between $\mathbf{v}_o$ and the line of $\theta=\pi/2$.

(1) Show that ℓ is a conserved quantity.

(2) Show that $\ell = r_o m v_o \cos\varphi$.

(3) Derive Eq. (5B), which describes r as a function of θ, from Eq. (5A). If necessary, use the relation $dr/d\theta = \dot{r}/\dot{\theta}$.

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}=\frac{mr^2}{\ell^2}f(r). \qquad (5B)$$

(4) When $v_o=\sqrt{r_o f(r_o)/m}$ and $\varphi=0$, show that $r(\theta)=r_o$ is the solution of Eq. (5B).

(5) In the actual operation of this type of analyzer, φ is not necessarily zero and takes a small value in the range where $\cos\varphi\approx 1$ and $\sin\varphi\approx\varphi$ are satisfied. So while $v_o=\sqrt{r_o f(r_o)/m}$, we must seek the solution of Eq. (5B) in the form of $r(\theta)=r_o+\Delta(\theta)$ instead of $r(\theta)=r_o$. Since φ is small, you can assume that $r_o >> \Delta(\theta)$. Then Eq. (5B) is approximated by Eq. (5C).

$$\frac{1}{r_o}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{\Delta(\theta)}{r_o}\right)+\frac{\Delta(\theta)}{r_o^2}=-\frac{mr_o^2}{\ell^2}\left(2\frac{f(r_o)}{r_o}+f'(r_o)\right)\Delta(\theta), \qquad (5C)$$

where $f'(r)$ is given by $df(r)/dr$.

(a) Show that Eq. (5C) reduces to Eq. (5D) for $f(r)=a/r$ (a is a positive constant).

$$\frac{d^2\Delta(\theta)}{d\theta^2}=-2\Delta(\theta). \qquad (5D)$$

(b) By solving Eq. (5D), determine θ_o for which the incident electrons are refocused on the exit slit as shown in Fig. 5(a). Since both r_o and $f(r_o)$ in $v_o=\sqrt{r_o f(r_o)/m}$ are determined by the operational conditions of the analyzer, you can know E_o from $mv_o^2/2$.

2016 年 8 月実施
問題５　物理基礎１
（３頁目／３頁中）

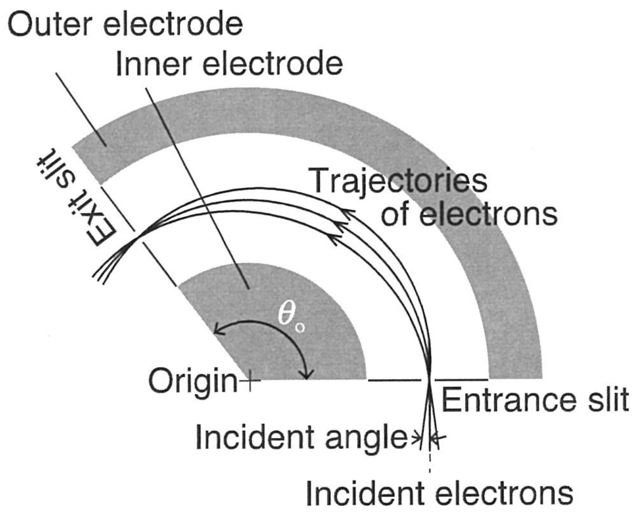

Fig. 5(a)

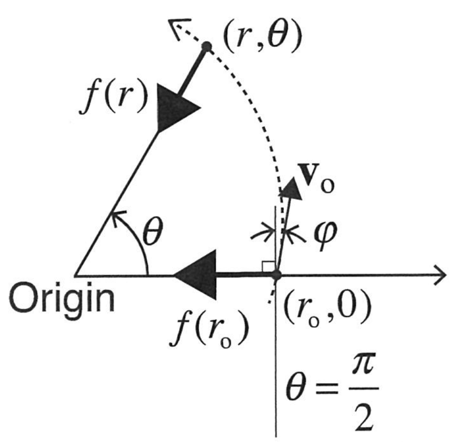

Fig. 5(b)

2016 年 8 月実施
問題 6　物理基礎 2
（１頁目／２頁中）

行列の交換関係に関して，次の問に答えよ．交換関係とは，$[A,B]=AB-BA$のことである．AとBは任意の正方行列である．ここで，iは虚数単位であり，Oは零行列である．$f(t)=\exp(tA)B\exp(-tA)$，$g(\lambda)=\exp(\lambda A)\exp(\lambda B)$とする．ただし，$A$と$B$は変数$t$及び$\lambda$を含まないものとする．行列の指数関数は次のように定義される：

$$\exp(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n .$$

ここで，Xは任意の正方行列であり，X^0は単位行列Iを表すものとする．

(1) $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，$\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}$，$\gamma=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$

とする．交換関係$[\alpha,\beta]$及び$[\alpha,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)]$を計算せよ．

(2) $f(0)$を求めよ．

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA)=A\exp(tA)=\exp(tA)A$を示せ．

(4) 下記二つの関係式を示せ：

$$f'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\exp(tA)[A,B]\exp(-tA),$$

$$f''(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'(t)=\exp(tA)[A,[A,B]]\exp(-tA).$$

(5) $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=O$のとき，$\exp(A)B\exp(-A)$を計算せよ．$f(t)$が次のように展開できることに注意せよ：

$$f(t)=f(0)+\frac{t}{1!}f'(0)+\frac{t^2}{2!}f''(0)+\frac{t^3}{3!}f'''(0)+\cdots.$$

(6) $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=O$のとき，$[\exp(\lambda A),B]=-\lambda[B,A]\exp(\lambda A)$となる．この関係式を用いて，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}g(\lambda)=(A+B+\lambda[A,B])g(\lambda)$ を示せ．

(7) $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=O$のとき，$\exp(A)\exp(B)=\exp\left(A+B+\frac{1}{2}[A,B]\right)$を証明せよ．

2016 年 8 月実施
問題 6　物理基礎 2
（２頁目／２頁中）

Answer the following questions on the commutation relation of matrices. The commutation relation is defined as $[A,B]=AB-BA$. A and B are arbitrary square matrices. Here, i denotes the imaginary unit, and O is the zero matrix. Let $f(t)=\exp(tA)B\exp(-tA)$ and $g(\lambda)=\exp(\lambda A)\exp(\lambda B)$. Here A and B do not contain the variables t and λ. The exponential function of the matrix is defined as follows:

$$\exp(X)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n,$$

where X is an arbitrary square matrix and X^0 denotes the identity matrix I.

(1) Let

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ \gamma=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Calculate the commutation relations $[\alpha,\beta]$ and $[\alpha,(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)]$.

(2) Find $f(0)$.

(3) Show that $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\exp(tA)=A\exp(tA)=\exp(tA)A$.

(4) Show the following two relations:

$$f'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\exp(tA)[A,B]\exp(-tA),$$

$$f''(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f'(t)=\exp(tA)[A,[A,B]]\exp(-tA).$$

(5) In the case $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=O$, calculate $\exp(A)B\exp(-A)$. Note that $f(t)$ can be expanded as:

$$f(t)=f(0)+\frac{t}{1!}f'(0)+\frac{t^2}{2!}f''(0)+\frac{t^3}{3!}f'''(0)+\cdots.$$

(6) In the case $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=O$, $[\exp(\lambda A),B]=-\lambda[B,A]\exp(\lambda A)$ is satisfied. Using this relation, show that $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}g(\lambda)=(A+B+\lambda[A,B])g(\lambda)$.

(7) In the case $[A,[A,B]]=[B,[A,B]]=O$, prove that $\exp(A)\exp(B)=\exp\left(A+B+\frac{1}{2}[A,B]\right)$.