2017 年 3 月実施
問題 1　電磁気学
(1 頁目／2 頁中)

Fig. 1 に示すように，半径 a の無限に長い 2 本の円柱導体 1，2 を真空中で間隔 d ($>>a$) で平行に配置する．導体 1 の中心軸を z 軸とし，z 軸上の一点を原点 O にとる．以下の問に答えよ．ただし，導体と真空の透磁率ならびに誘電率をそれぞれμ_0，ε_0とする．

(1) 導体 1 に直流電流 I が z 軸の正の向きに流れている．電流は導体断面内を一様に流れているものとする．
  (a) x 軸上の位置 $(x, 0, 0)$ における磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}$ を，$x \geq 0$ の範囲で求めよ．
  (b) 導体 1 内部の単位長さ当たりの磁気エネルギーUを求めよ．

(2) 導体 1 に直流電流 I が z 軸の正の向きに，導体 2 に直流電流 I が z 軸の負の向きに流れている．電流は導体断面内を一様に流れているものとする．
  (a) x 軸上の位置 $(x, 0, 0)$ における磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}$ を，$a \leq x \leq d-a$ の範囲で求めよ．
  (b) 導体 1，2 からなる回路の単位長さ当たりの自己インダクタンスを求めよ．ただし，導体内部の磁束は無視する．

(3) 導体 1，2 間の単位長さ当たりの静電容量を求めよ．ただし，導体上の電荷分布は中心軸対称である．

(4) 導体 1，2 間に電位差 V が与えられる．
  (a) 導体間に蓄えられる単位長さ当たりの静電エネルギーを求めよ．
  (b) 導体に働く単位長さ当たりの力を求めよ．

As shown in Fig. 1, two infinitely long cylindrical conductors 1 and 2 of radius a are located in parallel, separated by a distance d ($>>a$) in vacuum. The central axis of conductor 1 is set along the z axis, and the origin O is set at a point on the z axis. Answer the following questions. The permeability and permittivity of both the conductor and the vacuum are μ_0 and ε_0, respectively.

(1) A direct current I flows in conductor 1 towards the positive z direction. It is assumed that the current flows uniformly through the cross section of the conductor.
  (a) Find the vector of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ at the position $(x, 0, 0)$ on the x axis in the range $x \geq 0$.
  (b) Derive the magnetic energy per unit length U inside conductor 1.

(2) A direct current I flows in conductor 1 towards the positive z direction and a direct current I flows in conductor 2 towards the negative z direction. It is assumed that the current flows uniformly through the cross section of both conductors.

(a) Derive the vector of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ at the position $(x, 0, 0)$ on the x axis in the range $a \leq x \leq d - a$.

(b) Derive the self–inductance per unit length of the line composed of conductors 1 and 2. The magnetic flux inside both conductors is ignored.

(3) Derive the capacitance per unit length between conductors 1 and 2. The electric charge distribution on each conductor is symmetrical with respect to the central axis.

(4) There is a potential difference V between conductors 1 and 2.

(a) Find the electrostatic energy per unit length stored between conductors 1 and 2.

(b) Derive the force per unit length applied to the conductor.

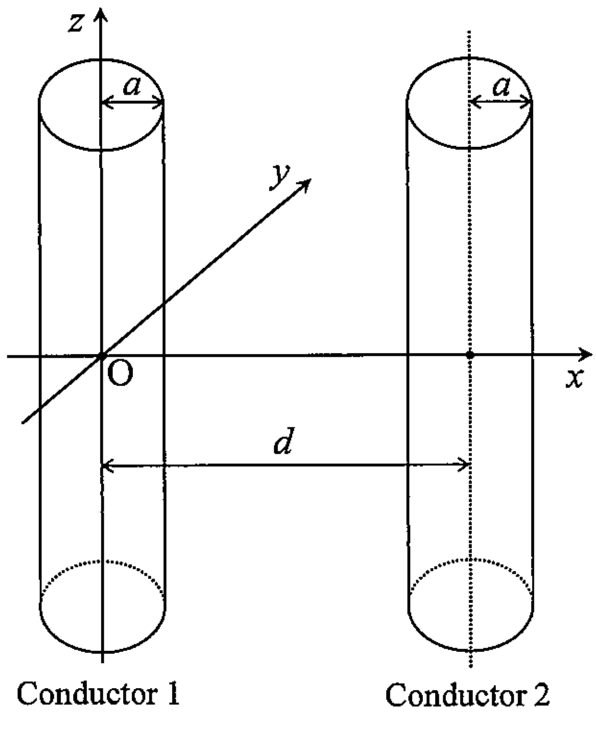

Fig. 1

2017 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(1 頁目／2 頁中)

(1) Fig. 2(a) に示す回路について，角周波数 ω ($\omega^2 = 1/(LC)$) における端子間のインピーダンスを求めよ．

(2) 伝送線路について以下の問に答えよ．

(a) Fig. 2(b) は分布定数線路の微小区間Δx の等価回路である．この線路が無損失である場合に，線路の微小区間等価回路，特性インピーダンス Z_1, および位相定数 β_1 を示せ．ただし，R, G, L および C は，それぞれ線路の単位長当たりの抵抗，コンダクタンス，インダクタンス，および容量である．

(b) Fig. 2(c) に示すように，長さ $3\lambda/2$ の無損失線路の端子対 (2-2') に負荷 Z_L が接続されている．端子対 (1-1') から見たインピーダンス Z_2 を求めよ．ただし，線路上の波長，線路の特性インピーダンスおよび位相定数を，それぞれ, λ, Z および β とする．

(c) Fig. 2(d) に示すように，線路 X の端子対 (2-2') に負荷 Z_L が接続されている．別の線路 Y を端子対 (1-1') に接続し，端子対 (3-3') を短絡する．端子対 (1-1') から見たインピーダンスが線路 Y に影響されない場合，線路 Y の長さ ℓ を λ を用いて示せ．ただし，線路上の波長，線路の特性インピーダンスおよび位相定数を，それぞれ λ, Z および β とする．また，どちらの線路も無損失である．

(1) For the circuit shown in Fig. 2(a), give the impedance between the terminals at angular frequency ω ($\omega^2 = 1/(LC)$).

(2) Answer the following questions about transmission lines.

(a) Fig. 2(b) is the equivalent circuit of a distributed constant line of infinitesimal length Δx. Show an equivalent circuit of infinitesimal length, the characteristic impedance Z_1 and the phase constant β_1 of the line assuming that the line is lossless. R, G, L and C correspond to the resistance, conductance, inductance, and capacitance per unit length of the line, respectively.

(b) As shown in Fig. 2(c), a load Z_L is connected to the terminal pair (2-2') of a lossless transmission line with a length of $3\lambda/2$. Give the impedance Z_2 viewed from the terminal pair (1-1'). The wavelength on the line, the characteristic impedance and the phase constant of the line are λ, Z and β, respectively.

(c) As shown in Fig. 2(d), a load Z_L is connected to the terminal pair (2-2') of the transmission line X. Another transmission line Y is connected at the terminal pair (1-1') and short-circuited at the terminal pair (3-3'). Give the length ℓ of the line Y in terms of λ, when the impedance viewed from the terminal pair (1-1') is not affected by the line Y. The wavelength on the lines, the characteristic impedance and the phase constant of the lines are λ, Z and β, respectively. In addition, both lines are lossless.

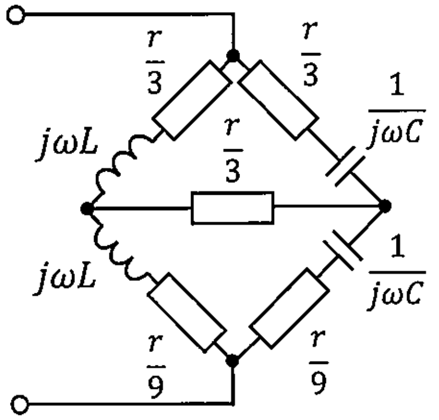

Fig. 2(a)

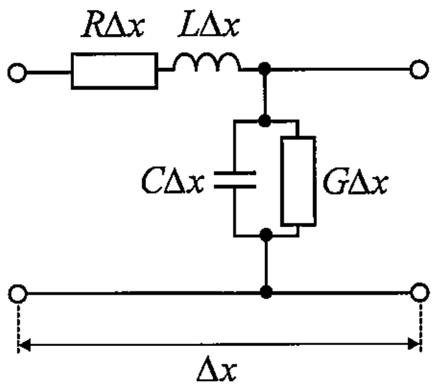

Fig. 2(b)

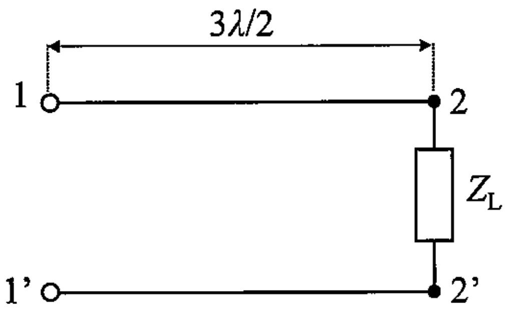

Fig. 2(c)

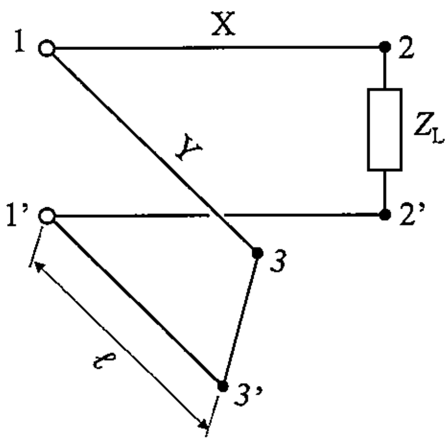

Fig. 2(d)

Question No. 3: Basic information science 1 (1/1)

2017年 3月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／1頁中)

n 変数論理ベクトル $\mathrm{x} \in \{0,1\}^n$ と $a \in \{0,1\}$ に対し, $\mathrm{x}|_{x_i=a}$ を

$$\mathrm{x}|_{x_i=a} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

と定義する. $f(\mathrm{x}), g(\mathrm{x})$ を n 変数論理関数とし, $\cdot, +, \oplus, \overline{}$ をそれぞれ論理積, 論理和, 排他的論理和, 否定演算子とする. 以下の問に答えよ.

(1) $f(\mathrm{x}) \cdot g(\mathrm{x}) = 0$ が成立するとき, $f(\mathrm{x}) + g(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) \oplus g(\mathrm{x})$ であることを示せ.

(2) $\overline{a} = 1 \oplus a$ であることを示せ.

(3) 論理演算子 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ を $\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_i} = f(\mathrm{x}|_{x_i=0}) \oplus f(\mathrm{x}|_{x_i=1})$ と定義するとき,$f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}|_{x_i=0}) \oplus x_i \cdot \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_i}$ を示せ.

(4) 以下の関係を満たす $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \{0,1\}$ を求めよ.

$$\overline{x_1 + \overline{x_2}} = c_0 \oplus c_1 \cdot x_1 \oplus c_2 \cdot x_2 \oplus c_3 \cdot x_1 \cdot x_2$$

For an n-variable logic vector $\mathrm{x} \in \{0,1\}^n$ and $a \in \{0,1\}$, $\mathrm{x}|_{x_i=a}$ is defined as

$$\mathrm{x}|_{x_i=a} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Consider $f(\mathrm{x})$ and $g(\mathrm{x})$ as n-variable logic functions, and let $\cdot, +, \oplus$, and $\overline{}$ denote AND, OR, Exclusive OR, and NOT operators, respectively. Answer the following questions.

(1) When $f(\mathrm{x}) \cdot g(\mathrm{x}) = 0$ is satisfied, show that $f(\mathrm{x}) + g(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}) \oplus g(\mathrm{x})$.

(2) Show that $\overline{a} = 1 \oplus a$.

(3) When a logic operator $\frac{\partial}{\partial x_i}$ is defined as $\frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_i} = f(\mathrm{x}|_{x_i=0}) \oplus f(\mathrm{x}|_{x_i=1})$, show that $f(\mathrm{x}) = f(\mathrm{x}|_{x_i=0}) \oplus x_i \cdot \frac{\partial f(\mathrm{x})}{\partial x_i}$.

(4) Determine $c_0, c_1, c_2, c_3 \in \{0,1\}$ satisfying the following relation.

$$\overline{x_1 + \overline{x_2}} = c_0 \oplus c_1 \cdot x_1 \oplus c_2 \cdot x_2 \oplus c_3 \cdot x_1 \cdot x_2$$

2017年 3月実施
問題4 情報基礎2
(1頁目／3頁中)

(1) Fig.4 (a) のように，原点 $(0,0)$ を出発点として，幅 1 の間隔で上方向と右方向に広がっている碁盤目状の一方通行の道路がある．一方通行の方向は Fig.4 (a) の通りである．次の問に答えよ．

(a) 原点から座標 $(8,6)$ の地点に至る経路の数を求めよ．また，その求め方も説明せよ．

(b) $0 \leq x$ かつ $0 \leq y$ を満たす整数 x，y が与えられたとき，原点から座標 (x,y) の地点に至る経路の数を $c_{x,y}$ で表す．以下の式の空欄 $\boxed{\text{A}}$ を埋めて，$c_{x,y}$ に関する漸化式を示せ．

$$c_{x,y} = \begin{cases} 1 & (x=0 \text{ または } y=0) \\ \boxed{\text{A}} & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

(2) Fig.4 (b) のように，(3, 3)–(4, 3) のブロックが通行止めになっている碁盤目状の一方通行の道路を考える．一方通行の方向は Fig.4 (b) の通りである．原点から座標 (m,n) の地点に至る経路の数を $c_{m,n}$ で表す．ただし，整数 m と n はそれぞれ，$4 \leq m, 3 \leq n$ を満たすこととする．次の問に答えよ．

(a) Fig.4 (c) に示したプログラムは，$c_{m,n}$ の値を再帰により求める．例えば，関数呼び出し `crec(8,6)` は原点から座標 $(8,6)$ の地点に至る経路の数を返す．空欄 $\boxed{\text{B}}$，$\boxed{\text{C}}$，$\boxed{\text{D}}$ に適切な式を埋めて，C 言語のプログラムを完成させよ．

(b) Fig.4 (d) に示したプログラムは，$c_{m,n}$ の値を動的計画法により求める．例えば，関数呼び出し `cdp(8,6)` は原点から座標 $(8,6)$ の地点に至る経路の数を返す．空欄 $\boxed{\text{E}}$，$\boxed{\text{F}}$，$\boxed{\text{G}}$ に適切な式を埋めて，C 言語のプログラムを完成させよ．ただし，`int c[m+1][n+1]` は，サイズが $(m+1) \times (n+1)$ の 2 次元配列 `c` を宣言する．

(c) Fig.4 (c) のプログラムと Fig.4 (d) のプログラムで $c_{m,n}$ の値を求めるときの時間計算量を，それぞれ O 記法で示せ．

(d) Fig.4 (c) のプログラムの時間計算量を削減する方法としてメモ化がある．以下の点に触れながら，メモ化について説明せよ．

- Fig.4 (c) のプログラムの効率が悪い理由
- メモ化を導入するために必要な Fig.4 (c) のプログラムの変更点
- メモ化が時間計算量を削減する理由

2017年3月実施
問題4 情報基礎2
(2頁目／3頁中)

(1) Suppose a one-way street grid starts at the origin $(0,0)$ and extends up and to the right with a width of 1, as shown in Fig.4 (a). Directions of one-way streets are shown in Fig.4 (a). Answer the following questions.

(a) Compute the number of paths from the origin to the point $(8,6)$. In addition, explain the rationale of the number.

(b) Given integers x and y satisfying $0 \leq x$ and $0 \leq y$, we denote the number of paths from the origin to the position (x,y) as $c_{x,y}$. Fill the blank $\boxed{\text{A}}$ in the following equation to present the recurrence relation of $c_{x,y}$.

$$c_{x,y} = \begin{cases} 1 & (x = 0 \text{ or } y = 0) \\ \boxed{\text{A}} & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

(2) Suppose a one-way street grid where the block between $(3,3)$–$(4,3)$ is closed, as shown in Fig.4 (b). Directions of one-way streets are shown in Fig.4 (b). We denote the number of paths from the origin to the position (m,n) as $c_{m,n}$. Here, the integers m and n satify $4 \leq m, 3 \leq n$, respectively. Answer the following questions.

(a) The program shown in Fig.4 (c) computes the value of $c_{m,n}$ by using recursion. For example, a function call `crec(8,6)` yields the number of paths from the origin to the point $(8,6)$. Fill appropriate expressions in the blanks $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$, and $\boxed{\text{D}}$ to complete the program in C language.

(b) The program shown in Fig.4 (d) computes the value of $c_{m,n}$ by using dynamic programming. For example, a function call `cdp(8,6)` yields the number of paths from the origin to the point $(8,6)$. Fill appropriate expressions in the blanks $\boxed{\text{E}}$, $\boxed{\text{F}}$, and $\boxed{\text{G}}$ to complete the program in C language. Here, `int c[m+1][n+1]` defines a two-dimensional array `c` whose size is $(m+1) \times (n+1)$.

(c) Give the time complexities, in big O notation, for computing $c_{m,n}$ by using the programs of Fig.4 (c) and Fig.4 (d), respectively.

(d) An approach for reducing the time complexity of the program of Fig.4 (c) is memoization. Give a description of memoization, mentioning the following points.

- The reason why the program of Fig.4 (c) is inefficient
- Changes necessary for introducing memoization to the program of Fig.4 (c)
- The reason why memoization reduces the time complexity

2017年 3月実施
問題4 情報基礎2
(3頁目／3頁中)

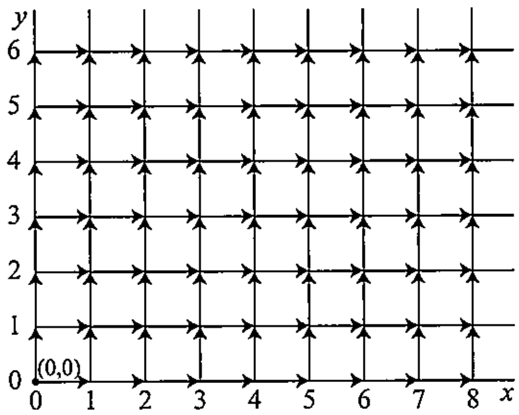

Fig. 4 (a)

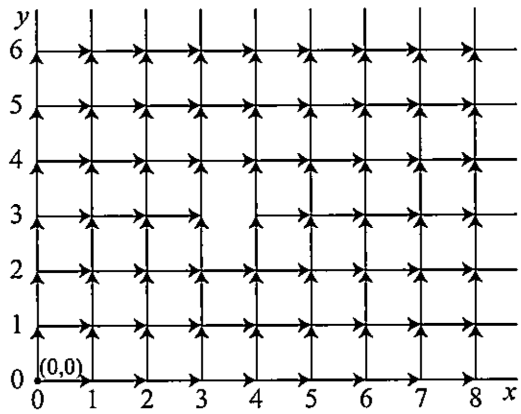

Fig. 4 (b)

```
int crec(int m, int n)
{
  if (m == 0 || n == 0) {
    return 1;
  } else if ( [ B ] ) {
    return [ C ];
  } else {
    return [ D ];
  }
}
```

Fig. 4 (c)

```
int cdp(int m, int n)
{
  int i, j;
  int c[m+1][n+1];

  for (i = 0; i <= m; ++i)
    c[i][0] = 1;
  for (j = 0; j <= n; ++j)
    c[0][j] = 1;

  for (i = 1; i <= m; ++i)
    for (j = 1; j <= n; ++j)
      if ( [ E ] )
        [ F ];
      else
        [ G ];

  return c[m][n];
}
```

Fig. 4 (d)

2017 年３月実施
問題５　物理基礎
（１頁目／３頁中）

Fig. 5(a)に示すように，半径 R の薄い車輪が $X-Y-Z$ 慣性座標系で静止している（重力場は存在していない）．車輪の中心は座標原点に位置し，その回転軸は Z 軸である．質量 m_0 の質点が，長くて質量のない糸により，車輪と接続されている．この糸は余すことなく時計回りで車輪に巻き付けられ，質点は車輪に接着されている．それから，車輪を Z 軸の周りに一定の角周波数 ω_0 で回転させる．ある時点で質点の接着剤が破断する．破断の時刻とその時の質点の位置を，それぞれ $t=0$ と $(X,Y,Z)=(R,0,0)$ とせよ．車輪の回転により徐々にほどけてゆく糸に取り付けられた質点の運動に関する以下の問に答えよ．車輪の厚さの影響は考える必要がない．必要があれば，遠心力 $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r})$ とコリオリの力 $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$ の式を使ってよい．ここで，m は質量，$\boldsymbol{\omega}$ は角速度，$\boldsymbol{r}$ は位置ベクトル，$\boldsymbol{v}$ は速度である．記号 $\times$ は外積の表示である．

(1) 最初に，車輪の回転方向が時計回りの場合を考えよう．Fig. 5(b)を見よ．
   (a) $t=0$ での質点の速度は $X-Y-Z$ 座標系において $(0,-R\omega_0,0)$ で与えられることを示せ．
   (b) $t>0$ での質点の位置は $X-Y-Z$ 座標系において $(R,-R\omega_0 t,0)$ で与えられることを示せ．（ヒント：単位時間当たりにほどける糸の長さは $R\omega_0$ であることに注意せよ.）
   (c) 糸の張力 T はゼロであることを示せ．

(2) 次に，車輪の回転方向が反時計回りの場合を考えよう．この場合には糸の張力 $T\neq 0$ が質点に作用する．従って，質点の運動は問(1)の運動ほど単純ではない．
   (a) この問題を扱うための便利な方法を考えよう．Fig. 5(c)を見よ．z 軸が Z 軸上にある $x-y-z$ 座標系は Z 軸の周りに角周波数 $2\omega_0$ で反時計方向に回転しており，$t=0$ で $X-Y-Z$ 座標系と一致している．この座標系においては，問(1)のように車輪は z 軸周りに角周波数 ω_0 で時計回りに回転し，このことは質点の位置が $(x,y,z)=(R,-R\omega_0 t,0)$ で与えられることを示唆する．この示唆を確かめよう．
      (i) $x-y-z$ 座標系において $(R,-R\omega_0 t,0)$ に位置する質点に作用する遠心力とコリオリの力を計算し，それらの力の x 成分は打ち消しあうことを示せ．
      (ii) T を計算し，$t>0$ でも糸は張ったままであることを示せ．
      (iii) 示唆 $(x,y,z)=(R,-R\omega_0 t,0)$ が正しいことを示せ．
   (b) $X-Y-Z$ 座標系における質点の位置と速度を t の関数として求めよ．

As shown in Fig. 5(a), a thin wheel with radius R rests in an $X-Y-Z$ inertia coordinate system (there is no gravitational field). The center of the wheel is located at the coordinate origin, and its rotation axis is the Z axis. A particle with mass m_0 is connected to the wheel by a long massless string. This string is completely wrapped clockwise around the wheel, and the particle is glued onto the wheel. Then the wheel is made to rotate around the Z axis at constant angular frequency ω_0. At some point in time, the glue on the particle breaks. Let the time and the location of the particle at the break be $t=0$ and $(X,Y,Z)=(R,0,0)$, respectively. Answer the following questions concerning the motion of the particle attached to the string, which gradually unwinds owing to the rotation of the wheel. It is not necessary to consider any influence caused by the thickness of the wheel. If necessary, you can use the formulae of centrifugal force $-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ and Coriolis force $-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}$. Here m is mass, $\boldsymbol{\omega}$ is an angular velocity, $\boldsymbol{r}$ is a position vector, and $\boldsymbol{v}$ is a velocity. The symbol $\times$ is a sign of outer product.

(1) Let us first consider the case where the direction of the rotation of the wheel is clockwise. See Fig. 5(b).
   (a) Show that the velocity of the particle at $t=0$ is given by $(0,-R\omega_0,0)$ in the $X-Y-Z$ coordinate system.
   (b) Show that the location of the particle for $t>0$ is given by $(R,-R\omega_0 t,0)$ in the $X-Y-Z$ coordinate system. (Hint: the length of string unwinding per unit time is $R\omega_0$.)
   (c) Show that the tension T in the string is zero.

(2) Next let us consider the case where the direction of the rotation of the wheel is counterclockwise. In this case, tension $T\neq 0$ in the string acts on the particle. Hence the motion of the particle is not so simple as that for question (1).
   (a) Let us consider a convenient method for treating this question. See Fig. 5(c). The $x-y-z$ coordinate system whose z axis is on the Z axis rotates counterclockwise around the Z axis at angular frequency $2\omega_0$, and is coincident with the $X-Y-Z$ one at $t=0$. In this coordinate system, the wheel rotates clockwise around the z axis at angular frequency ω_0 like question (1), suggesting that the location of the particle is given by $(x,y,z)=(R,-R\omega_0 t,0)$. Let us confirm this suggestion.
      (i) Calculate the centrifugal and the Coriolis forces acting on the particle located at $(R,-R\omega_0 t,0)$ in the $x-y-z$ coordinate system, and show that the x components of these forces cancel.
      (ii) Calculate T, and show that the string remains taut even for $t>0$.
      (iii) Show that the suggestion $(x,y,z)=(R,-R\omega_0 t,0)$ is correct.
   (b) Obtain the location and velocity of the particle in the $X-Y-Z$ coordinate system as a function of t.

2017年3月実施
問題５　物理基礎
（３頁目／３頁中）

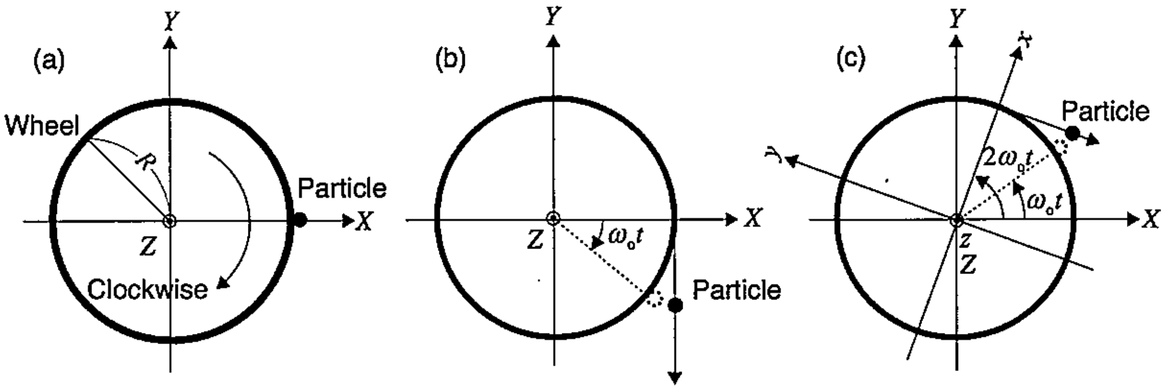

Fig. 5 Each thick circle shows the top view of the wheel with radius R. The string is wrapped clockwise (see the arrow in (a) for the direction) around the wheel. The particle is glued onto the wheel as shown in (a). The locations of the glued particle and freed particle at time t are shown by dotted and filled circles, respectively, in (b) and (c).

2017 年 3 月実施
問題６　数学基礎
（1 頁目／2 頁中）

(1) $n\times n$ エルミート行列 A，n 次元複素列ベクトル x，および二次形式 $f(x)=x^{*}Ax$ を考える．ここで，x^{*} は x の複素共役転置（随伴行列）を表す．零ベクトルでない全ての x に対して $f(x)\geq 0$ を満たすとき，A は半正定値行列であると言う．次の問に答えよ．

(a) ある正方行列 U が存在して $A=U^{*}U$ と表せるとき，A が半正定値行列であることを示せ．

(b) A の固有値がすべて実数であることを示せ．

(c) A の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交することを示せ．

(d) A の固有値がすべて非負であるとき，A は半正定値行列であることを示せ．必要に応じて，エルミート行列はユニタリー行列によって対角化可能であるという事実を用いてよい．

(e) 次の関係式を満たす 3×3 実対称行列 B を求めよ．

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3=\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

また，B の固有値をすべて求め，B が半正定値行列かどうか判定せよ．

(2) 複素変数 z の関数 $g(z)=\dfrac{z}{(z^2-6z+1)^2}$ を考える．

C は $z=e^{2i\theta}\ (0\leq\theta\leq\pi)$ により表される円周上を正の向きに回る積分路である．i は虚数単位である．次の問に答えよ．

(a) 関数 $g(z)$ のすべての孤立特異点とその留数を求めよ．

(b) 複素積分 $\int_C g(z)dz$ を求めよ．

(c) 実定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(1+\sin^2\theta)^2}$ を求めよ．

2017 年 3 月実施
問題６　数学基礎
(2 頁目／2 頁中)

(1) Consider an $n \times n$ Hermitian matrix A, an n–dimensional complex column vector x, and a quadratic form $f(x) = x^* Ax$. Here x^* denotes the complex conjugate transpose (adjoint matrix) of x. The matrix A is said to be semi–positive definite if $f(x) \geq 0$ for every non–zero vector x. Answer the following questions.

(a) Show that the matrix A is semi–positive definite if there exists a square matrix U such that $A = U^* U$.

(b) Show that all eigenvalues of A are real.

(c) Show that the eigenvectors corresponding to distinct eigenvalues of A are orthogonal.

(d) Show that the matrix A is semi–positive definite if all its eigenvalues are non–negative. If necessary, you may use the fact that every Hermitian matrix can be diagonalized by a unitary matrix.

(e) Find a 3×3 real symmetric matrix B which satisfies the following equation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 - x_2 x_3 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Then, find the all eigenvalues of B, and determine whether B is semi–positive definite or not.

(2) Consider a function $g(z) = \dfrac{z}{(z^2 - 6z + 1)^2}$ of a complex value z.

Here C is a positively oriented contour $z = e^{2i\theta}$ $(0 \leq \theta \leq \pi)$. Let i denote the imaginary unit. Answer the following questions.

(a) Find all the isolated singular points and corresponding residues of the function $g(z)$.

(b) Find the value of the complex integral $\int_C g(z) dz$.

(c) Find the value of the real definite integral $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \sin^2 \theta\right)^2}$.