2017 年 8 月実施
問題 1　電磁気学
(1 頁目／2 頁中)

真空中に無限に長い直線導体 L が z 軸に沿って置かれている．直流電流 I が直線導体 L 内を z 軸の正の向きに流れている．以下の問に答えよ．ただし，真空の透磁率をμ_0とし，導体の断面積は無視できるものとする．

(1) Fig. 1 (a) に示すように，x 軸と平行に長さ $2a$ の直線導体 T が，z - x 平面上で z 軸から距離 b の位置に置かれている．
  (a) x 軸上の位置 $(x, 0, 0)$ における磁界 $\boldsymbol{H}$ の大きさと向きを，$x > 0$ の範囲で求めよ．
  (b) 直線導体 T が z 軸の正の向きに一定の速さ v_0 で動いているとき，直線導体 T の両端間に生じる起電力の大きさと向きを求めよ．

(2) Fig. 1 (b) に示すように，正方形の形をしたループ導体 S (一辺の長さが $2a$) が，z - x 平面上で z 軸から距離 x の位置に置かれている．ループ導体 S の一辺の抵抗を R とする．
  (a) $x = b$ のとき，ループ導体 S と直線導体 L との間の相互インダクタンスを求めよ．
  (b) ループ導体 S に電流 I_S が A→B→C→D→A の向きに流れているとき，ループ導体 S の中心点 P $(a+b, 0, 0)$ における磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさと向きを求めよ．
  (c) ループ導体 S を z 軸の正の向きに一定の速さ v_0 で動かすとき，ループ導体 S に流れる電流の大きさと向きを求めよ．
  (d) ループ導体 S を x 軸の正の向きに一定の速さ v_0 で動かすために必要な力の大きさと向きを，$x > 0$ の範囲で求めよ．また，そのときのループ導体 S に流れる電流の大きさと向きを求めよ．

An infinitely long rectilinear conductor L is located along the z axis in vacuum. A direct current I flows in the rectilinear conductor L in the positive z direction. Answer the following questions. The permeability of the vacuum is μ_0, and cross sections of conductors can be ignored.

(1) As shown in Fig. 1 (a), a rectilinear conductor T having a length $2a$ parallel to the x axis is located at a distance b from the z axis on the z - x plane.
  (a) Find the magnitude and direction of the magnetic field $\boldsymbol{H}$ at the position $(x, 0, 0)$ on the x axis in the range $x > 0$.
  (b) Find the magnitude and direction of the electromotive force generated between both ends of the rectilinear conductor T, when the rectilinear conductor T is moving at a constant speed v_0 in the positive z direction.

2017 年 8 月実施
問題 1　電磁気学
(2 頁目／2 頁中)

(2) As shown in Fig. 1 (b), a conducting loop S in the shape of a square (length of one side $2a$) is located at a distance x from the z axis on the z - x plane. The resistance of one side of the conducting loop S is R.

(a) When x is set to b, find the mutual inductance between the conducting loop S and the rectilinear conductor L.

(b) Derive the magnitude and direction of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ at the center position P $(a+b,\ 0,\ 0)$ of the conducting loop S when a current I_S flows in the direction of A→B→C→D→A through the conducting loop S.

(c) Find the magnitude and direction of the current flowing through the conducting loop S when the conducting loop S moves at a constant speed v_0 in the positive z direction.

(d) Find the magnitude and direction of the force required to move the conducting loop S at a constant speed v_0 in the positive x direction in the range $x > 0$. Moreover, find the magnitude and direction of the current flowing through the conducting loop S at that time.

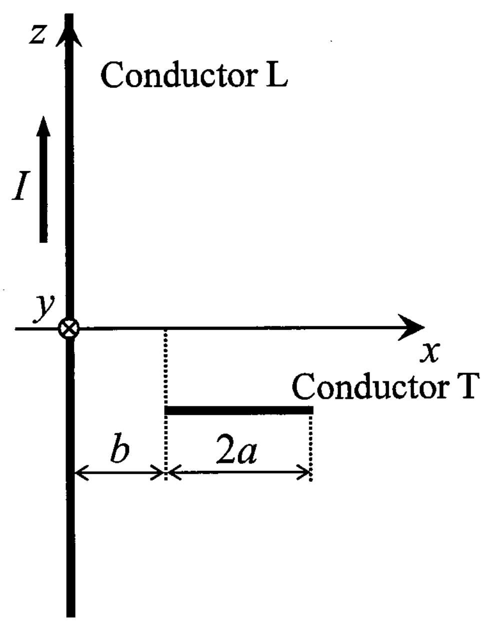

Fig. 1 (a)

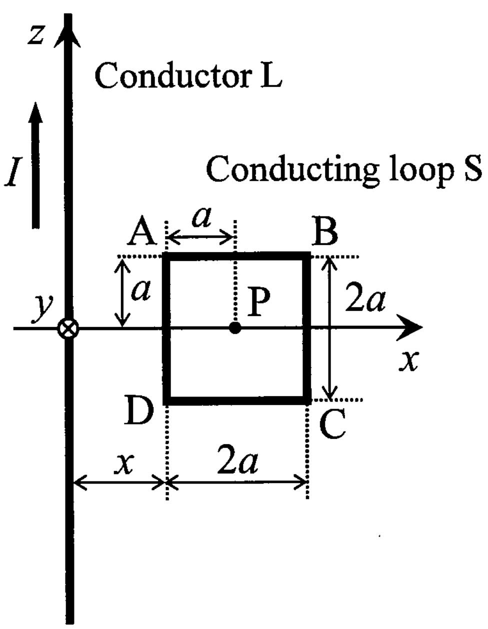

Fig. 1 (b)

2017 年 8 月実施
問題 2　電気回路
(1 頁目／3 頁中)

(1) Fig. 2(a) – (c) に示す回路について以下の問に答えよ．角周波数を ω_1 とする．

(a) Fig. 2(a) に示す 2 つの回路のインピーダンスが等しくなるときに C_2 および R_2 のそれぞれを C_1 と R_1 を用いて表せ.

(b) Fig. 2(b) に示す 2 つの回路のインピーダンスが等しくなるときに L_4 および R_4 のそれぞれを L_3 と R_3 を用いて表せ.

(c) Fig. 2(c) の回路のインピーダンスが角周波数によらず一定となる条件を求めよ．

(2) Fig. 2(d) に示す伝送線路の端子対 1-1'に角周波数 ω_2 の交流電圧源 E を接続し，端子対 2-2' に L_6, C_6 および R_6 からなる直列回路を接続する．以下の問に答えよ．ただし，線路は無損失で特性インピーダンスを Z_0 とする.

(a) 端子対 2-2'において無反射である条件を L_6, C_6 および R_6 を用いて表せ.

(b) 問(2)(a) における無反射の条件から角周波数 ω_2 を大きくしたところ，2-2'に接続されている直列回路のインピーダンスの絶対値が $\sqrt{2}$ 倍になった．このときの反射係数を $\Gamma=|\Gamma|e^{j\theta}$ の形式で表せ．

2017年8月実施
問題2　電気回路
(2頁目／3頁中)

(1) Answer the following questions about the circuits shown in Fig. 2(a) – (c). Assume the angular frequency to be ω_1.

(a) When the impedances of the two circuits in Fig. 2(a) are equal, express each of C_2 and R_2 using C_1 and R_1.

(b) When the impedances of the two circuits in Fig. 2(b) are equal, express each of L_4 and R_4 using L_3 and R_3.

(c) Find the condition for the impedance of the circuit in Fig. 2(c) to be constant that is independent of the angular frequency.

(2) An AC voltage source E of angular frequency ω_2 is connected at the terminal pair 1-1' of the transmission line in Fig. 2(d), and a series circuit consisting of L_6, C_6 and R_6 is connected at the terminal pair 2-2'. Answer the following questions. Assume that the transmission line is lossless and the characteristic impedance of the line is Z_0.

(a) Express the condition of no-reflection at the terminal pair 2-2' using L_6, C_6 and R_6.

(b) When the angular frequency ω_2 is increased from the no-reflection condition found in the question (2)(a), the absolute value of the impedance of the series circuit connected at 2-2' increases by $\sqrt{2}$ times. In that time, express the reflection coefficient in the form of $\Gamma = |\Gamma|e^{j\theta}$.

2017 年 8 月実施
問題 2　電気回路
(3 頁目／3 頁中)

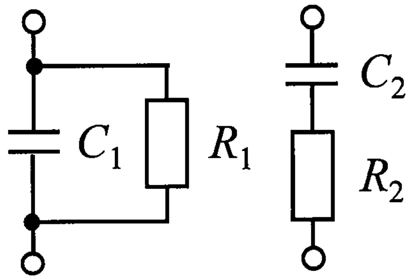

Fig. 2(a)

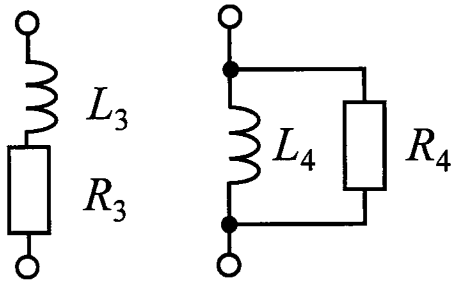

Fig. 2(b)

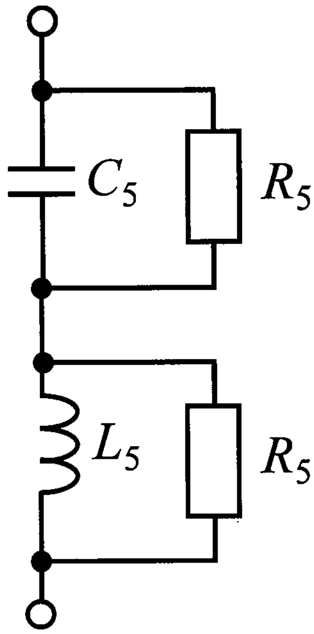

Fig. 2(c)

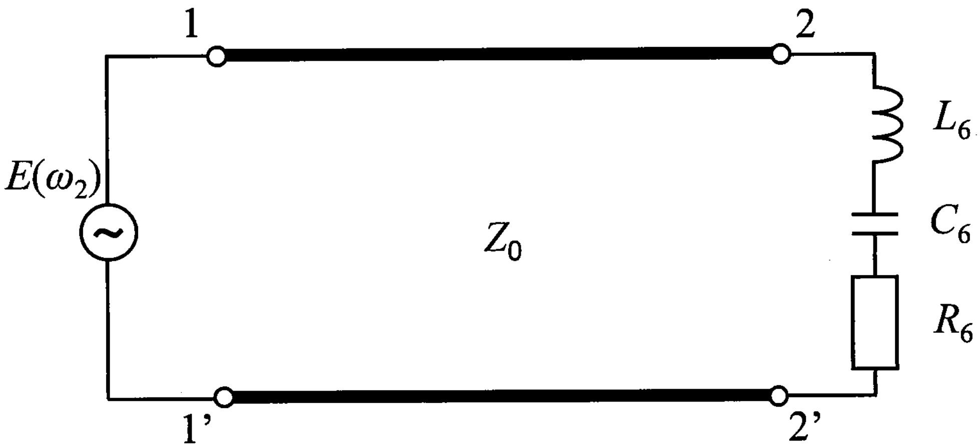

Fig. 2(d)

2017年 8月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／2頁中)

アルファベット $\Sigma = \{a, b\}$ 上の有限状態機械について，次の問に答えよ．

(1) 最後の文字が a であるような文字列全てからなる言語 L_1 を考える．なお，L_1 は空文字列を含まない．

  (a) L_1 を受理する決定性有限状態機械で，状態数が最小であるものを図示せよ．初期状態，受理状態を明確にすること．

  (b) L_1 を受理する非決定性有限状態機械で，問 (1)(a) で問われた有限状態機械よりも状態数が小さいものがあるか．あるならこれを示し，ないならないことを証明せよ．

(2) 長さが 2 以上でかつ最後から 2 番目の文字が a であるような文字列全てからなる言語 L_2 を考える．

  (a) L_2 を受理する非決定性有限状態機械で，状態数が最小であるものを図示せよ．

  (b) L_2 を受理する決定性有限状態機械で，状態数が最小であるものを図示せよ．

(3) 長さが 3 以上でかつ最後から 3 番目の文字が a であるような文字列全てからなる言語 L_3 を受理する非決定性有限状態機械で，状態数が最小であるものを図示せよ．

(4) 長さが k $(k \geq 3)$ 以上でかつ最後から k 番目の文字が a であるような文字列全てからなる言語 L_k を考える．

  (a) L_k を受理する非決定性有限状態機械で，状態数が最小であるものの状態数はいくつか．

  (b) L_k を受理する決定性有限状態機械で，状態数が最小であるものの状態数はいくつか．

Concerning finite state automata over an alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, answer the following questions.

(1) Let L_1 be the language consisting of all the strings ending with a. Note that L_1 does not contain the empty string.

  (a) Draw a deterministic finite state automaton accepting L_1 with the minimum number of states. Clearly identify the initial and final states.

  (b) If there is a non-deterministic finite state automaton accepting L_1 which has fewer states than the automaton asked in question (1)(a), draw it. Otherwise, prove that there is no such automaton.

(2) Let L_2 be the language consisting of all the strings of length at least 2 whose second-to-last symbol is a.

  (a) Draw a non-deterministic finite state automaton accepting L_2 with the minimum number of states.

  (b) Draw a deterministic finite state automaton accepting L_2 with the minimum number of states.

(3) Let L_3 be the language consisting of all the strings of length at least 3 whose third-to-last symbol is a. Draw a non-deterministic finite state automaton accepting L_3 with the minimum number of states.

(4) Let L_k be the language consisting of all the strings of length at least k whose k^{th}-to-last symbol is a where $k \geq 3$.

  (a) Give the minimum number of states of a non-deterministic finite state automaton that accepts L_k.

  (b) Give the minimum number of states of a deterministic finite state automaton that accepts L_k.

2017年 8月実施
問題4 情報基礎2
(1頁目／2頁中)

本問では, 行列と言えば2次正則行列を指し, 特に整数行列と言えば, そのような行列のうち全ての成分が整数であるものを指す. 任意の行列 $\boldsymbol{x}$ と整数 e に対して,

$$\boldsymbol{x}^e = \begin{cases} \boldsymbol{1}\ (\text{単位行列}) & (e=0) \\ \boldsymbol{x}^{e-1}\boldsymbol{x} & (e \neq 0) \end{cases} \tag{4A}$$

であるとする. $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}$ をそれぞれ次の整数行列

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とし, 次の式 (4B) の形式の有限積で表すことができる全ての行列 $\boldsymbol{x}$ から成る集合を L とする.

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1^{e_1}\boldsymbol{u}_2^{e_2}\cdots\boldsymbol{u}_k^{e_k} \tag{4B}$$

ここで, $k \geq 1$ であり, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in \{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$, $e_1, e_2, \ldots, e_k$ は整数である. このとき, 以下の問に答えよ. もし必要ならば, 次の事実 (4C) は証明なしに用いてもよい.

(4C) 任意の2つの行列 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ に対して, $\det \boldsymbol{xy} = \det \boldsymbol{x} \det \boldsymbol{y}$ である. ここで, det は行列式を表す.

(1) 集合 L に属する任意の行列 $\boldsymbol{x}$ は, $\det \boldsymbol{x} = 1$ を満たす整数行列であることを示せ.

(2) 任意の整数 n について, $\boldsymbol{t}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることを示し, この式を用いて, 行列 $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を式 (4B) の形式の有限積で表せ.

(3) $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ を整数行列とする. x_{11} が整数 n, r を用いて $x_{11} = nx_{21} + r$ と表されているとき, 積 $\boldsymbol{st}^{-n}\boldsymbol{x}$ を計算して得られる行列を, n, r および x_{12}, x_{21}, x_{22} を用いた式で表せ.

(4) 問 (1)–問 (3) の結果を利用して, 任意に与えられた整数行列 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ に対して, 絶対値 $|x_{21}|$ に関する再帰処理を用いて, $\boldsymbol{x}$ が集合 L に属するか否かを正しく判定し, 特に $\boldsymbol{x} \in L$ であるときは, $\boldsymbol{x}$ を式 (4B) の形式の有限積で記述する式を一つ出力する手続きを与えよ. その正当性も示すこと.

2017年 8月実施
問題4 情報基礎2
(2頁目／2頁中)

In this question, a matrix means any 2×2-square invertible matrix, and such a matrix is integral if all of its entries are integers. For any matrix $\boldsymbol{x}$ and an integer e, let

$$\boldsymbol{x}^e = \begin{cases} \mathbf{1} \text{ (identity matrix)} & (e = 0) \\ \boldsymbol{x}^{e-1}\boldsymbol{x} & (e \neq 0). \end{cases} \tag{4A}$$

Let $\boldsymbol{s}$ and $\boldsymbol{t}$ be the following integral matrices

$$\boldsymbol{s} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectively, and let L be the set of all matrices $\boldsymbol{x}$ that can be expressed by a finite product of the form

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1^{e_1}\boldsymbol{u}_2^{e_2}\cdots\boldsymbol{u}_k^{e_k}, \tag{4B}$$

where $k \geq 1$, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in \{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{t}\}$ and $e_1, e_2, \ldots, e_k$ are integers. Answer the following questions. If necessary, you may apply the following fact (4C) without proof.

(4C) $\det \boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \det \boldsymbol{x} \det \boldsymbol{y}$ for any two matrices $\boldsymbol{x}$ and $\boldsymbol{y}$, where det denotes the determinant.

(1) Show that any matrix $\boldsymbol{x}$ in the set L is an integral matrix such that $\det \boldsymbol{x} = 1$.

(2) Show that $\boldsymbol{t}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ for any integer n, and by using this equation, describe a finite product expression of the form Eq. (4B) that expresses the matrix $\begin{pmatrix} -1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) Let $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ be an integral matrix. Assuming that x_{11} is decomposed as $x_{11} = nx_{21} + r$ for some integers n and r, describe the matrix which is obtained by calculating the product $\boldsymbol{s}\boldsymbol{t}^{-n}\boldsymbol{x}$ in terms of n, r, x_{12}, x_{21} and x_{22}.

(4) Applying the results of the questions (1)–(3), describe a procedure that correctly determines whether or not any given integral matrix $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ belongs to the set L by recursion on the absolute value $|x_{21}|$. If $\boldsymbol{x} \in L$, then the procedure should output one of the finite product expressions of the form Eq. (4B) that expresses $\boldsymbol{x}$. The correctness of the procedure should be proved.

2017年8月実施
問題5 物理基礎
(1頁目／3頁中)

地球の表面近くにおける質点 (質量 m) の運動を考察する．地球は, 時間変化しない角速度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ で自転している．いま, 非慣性系 K を参照系として導入し, その原点は自転軸上にあり, その規格直交基準ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}_i$ $(i=1,2,3)$ は地球と共に回転しているものとする (Fig. 5 参照). 太陽の周りの地球の公転, 及び空気抵抗の影響は無視する．

(1) K 系における質点の i 座標成分を x_i とする．このとき, 質点の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}=\sum_i x_i\boldsymbol{\epsilon}_i$, またその時間微分は $d\boldsymbol{r}/dt=\sum_i(v_i\boldsymbol{\epsilon}_i+x_i\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_i)$ で与えられる．ここで $v_i\equiv dx_i/dt$ であり, 記号 $\times$ は外積を表す．

(a) 慣性系における運動エネルギー $T=(1/2)m(d\boldsymbol{r}/dt)^2$ が以下で表せることを示せ．

$$T=\sum_i\frac{1}{2}mv_i^2+\sum_{i,j}mv_ix_j\boldsymbol{\epsilon}_i\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_j)+\sum_{i,j}\frac{1}{2}mx_ix_j(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_j) \tag{5A}$$

(b) Eq. (5A) では, $\boldsymbol{\epsilon}_i$ の時間変化が T の時間変化に影響しない．その理由を述べよ．

(c) K 系における運動方程式は, Lagrange 方程式 $(d/dt)(\partial L/\partial v_i)=\partial L/\partial x_i$ から得られる．ここで $L\equiv T-U$ で, U は重力ポテンシャルである．以下の運動方程式を導け．

$$m\frac{dv_i}{dt}=-\sum_j 2mv_j\boldsymbol{\epsilon}_i\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_j)+\sum_j mx_j(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_j)-\frac{\partial U}{\partial x_i} \tag{5B}$$

もし必要なら, $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ を使ってよい．

(2) 質点が, ある地表地点 X (その位置ベクトルは $\boldsymbol{X}=\sum_i X_i\boldsymbol{\epsilon}_i$) 近傍でのみ運動するとき, Eq. (5B) 右辺における x_i は X_i で近似的に置き換えられる．このとき Eq. (5B) は以下のように表せる．

$$m\frac{dv_i}{dt}=-\sum_j 2mv_j\boldsymbol{\epsilon}_i\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_j)+mg_i \tag{5C}$$

ここで $g_i\equiv[\sum_j mX_j(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_j)-\partial U(\boldsymbol{X})/\partial X_i]/m$ であり, ベクトル $\boldsymbol{g}=\sum_i g_i\boldsymbol{\epsilon}_i$ は $\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{X}$ が張る平面内にある (Fig. 5 参照). 今, 初期条件 $x_i(0)=X_i-hg_i/|\boldsymbol{g}|$ (h は正の実数) 及び $v_i(0)=0$ のもと質点を落下させる．

(a) Eq. (5C) 右辺の v_j を通常の自由落下 $mdv_i/dt=mg_i$ の解で近似し, x_i を時間の関数として求めよ．

(b) 質点が地面に到達する時刻 t^* は, 条件 $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{r}=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{X}$ から決定できる．$t=t^*$ における ベクトル $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}$ を求めよ．また, 得られた $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{X}$ の向きについて物理的解釈を述べよ．

2017 年 8 月実施
問題5 物理基礎
(2頁目／3頁中)

Consider the dynamics of a particle (mass m) near the surface of the Earth. The Earth rotates around its own axis with a time-independent angular-velocity vector $\boldsymbol{\omega}$. Now, a noninertial system K is used as a reference system; its origin is located on the axis of the Earth's rotation, and its orthonormalized reference vectors $\boldsymbol{\epsilon}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ rotate together with the Earth (see Fig. 5). The effects of the Earth's revolution about the Sun and air resistance are neglected.

(1) Let x_i denote the ith coordinate of the particle in the K system. Then, the position vector of the particle is given by $\boldsymbol{r} = \sum_i x_i \boldsymbol{\epsilon}_i$, and its time derivative by $d\boldsymbol{r}/dt = \sum_i (v_i \boldsymbol{\epsilon}_i + x_i \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_i)$, where $v_i \equiv dx_i/dt$, and the symbol $\times$ means outer product.

(a) Show that the kinetic energy in an inertial reference system $T = (1/2)m(d\boldsymbol{r}/dt)^2$ is expressed as

$$T = \sum_i \frac{1}{2} m v_i^2 + \sum_{i,j} m v_i x_j \boldsymbol{\epsilon}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_j) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} m x_i x_j (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_j). \qquad (5A)$$

(b) State the reason why the time evolution of $\boldsymbol{\epsilon}_i$ does not affect that of T in Eq. (5A).

(c) The equation of motion in the K system can be obtained from Lagrange's equation $(d/dt)(\partial L/\partial v_i) = \partial L/\partial x_i$, where $L \equiv T - U$ with U being the gravitational potential. Derive the following equation of motion,

$$m\frac{dv_i}{dt} = -\sum_j 2 m v_j \boldsymbol{\epsilon}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_j) + \sum_j m x_j (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_j) - \frac{\partial U}{\partial x_i}. \qquad (5B)$$

If necessary, use $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$.

(2) If the particle moves only in the vicinity of a certain place X on the Earth's surface (whose position vector is $\boldsymbol{X} = \sum_i X_i \boldsymbol{\epsilon}_i$), x_i on the right hand side of Eq. (5B) can be approximately replaced with X_i. Then, Eq. (5B) leads to

$$m\frac{dv_i}{dt} = -\sum_j 2 m v_j \boldsymbol{\epsilon}_i \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_j) + m g_i, \qquad (5C)$$

where $g_i \equiv [\sum_j m X_j (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_i) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_j) - \partial U(\boldsymbol{X})/\partial X_i]/m$; the vector $\boldsymbol{g} = \sum_i g_i \boldsymbol{\epsilon}_i$ lies on the plane spanned by $\boldsymbol{\omega}$ and $\boldsymbol{X}$ (see Fig. 5). Now, let the particle fall with the initial condition of $x_i(0) = X_i - h g_i/|\boldsymbol{g}|$ (h is a positive real number) and $v_i(0) = 0$.

(a) Approximate v_j on the right hand side of Eq. (5C) as the solution of a normal free fall $m dv_i/dt = m g_i$, and find x_i as a function of time.

(b) The time t^* when the particle reaches the ground can be determined by the condition $\boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{X}$. Then, find the vector $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{X}$ at $t = t^*$. Also, give a physical interpretation to the direction of the resulting $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{X}$.

2017 年 8 月実施
問題5 物理基礎
(3頁目／3頁中)

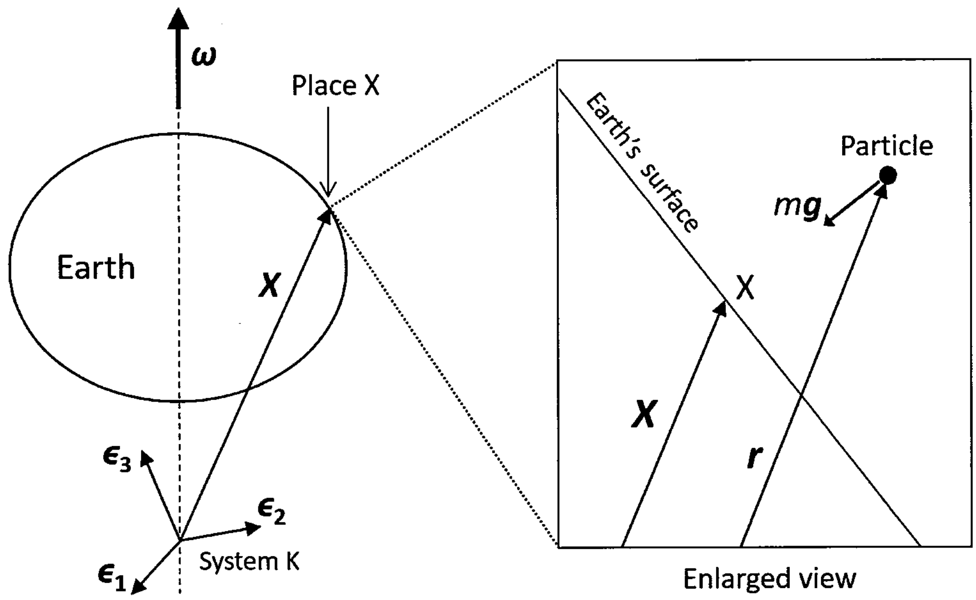

Fig. 5

2017 年 8 月実施
問題６　数学基礎
(1 頁目／2 頁中)

(1) 対称行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ および $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ について考える．次の問に答えよ．

(a) A および B の固有値をすべて求めよ．

(b) A および B の各々の固有値に対応する固有空間の次元を求めよ．

(c) D および F を 3 次対角行列とする．$P^{-1}AP = D$ および $P^{\mathrm{T}}BP = F$ を同時に満たす直交行列 P と，対角行列 D および F を求めよ．ここで，P^{T} は P の転置行列を表す．

(2) n 次正方行列 G および H を考える．G および H が共通の正則行列によって対角化されるとき，$GH = HG$ であることを示せ．

(3) 次の問に答えよ．

(a) 関数 $f(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ とする．$\mathcal{L}[f(t-a)] = F(s)e^{-as}$ であることを示せ．ただし，$t < 0$ のとき，$f(t) = 0$ とする．

(b) 関数 $g_1(t) = \begin{cases} t & (0 \le t < 1) \\ 1 & (1 \le t < 2) \\ t-1 & (2 \le t) \end{cases}$ のラプラス変換を求めよ．

(c) 留数定理を用いて関数 $G_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$ の逆ラプラス変換を求めよ．

2017 年 8 月実施
問題６　数学基礎
（2 頁目／2 頁中）

(1) Consider the symmetric matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Answer the following questions.

(a) Find all eigenvalues of A and B.

(b) Find the dimension of the eigenspace corresponding to each eigenvalue of A and B.

(c) Let matrices D and F be 3–dimensional diagonal matrices. Find the orthogonal matrix P that simultaneously satisfies $P^{-1}AP = D$ and $P^{\mathrm{T}}BP = F$, and then find diagonal matrices D and F. Here, P^{T} denotes the transpose of P.

(2) Consider n–dimensional square matrices G and H. Show that $GH = HG$ if G and H are diagonalized by a common regular matrix.

(3) Answer the following questions.

(a) Let $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ denote the Laplace transform of the function $f(t)$. Show that $\mathcal{L}[f(t-a)] = F(s)e^{-as}$. Here, let $f(t) = 0$ when $t < 0$.

(b) Find the Laplace transform of the function $g_1(t) = \begin{cases} t & (0 \le t < 1) \\ 1 & (1 \le t < 2) \\ t-1 & (2 \le t) \end{cases}$.

(c) Find the inverse Laplace transform of the function $G_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2}$ using the residue theorem.