2018年3月実施
問題1　電磁気学
(1頁目／3頁中)

Fig. 1(a) に示すように，y 軸と平行な半径 a の無限長円柱導体（導体1）が大地の表面（x-y 平面）から距離 h（$z = h, h >> a$）の位置に存在する．導体1に単位長さあたり$+\lambda_1$の正電荷が一様に分布するとき，以下の問に答えよ．ただし，大地は導体として取り扱ってよい．また，空気の誘電率をε_0とする．

(1) Fig. 1(a) に示すように導体1の断面と大地を描き，電気力線を示せ．

(2) 導体1に働く単位長さあたりの力の大きさと向きを求めよ．

(3) x 軸上の点 P（x_P, 0, 0）での電界の大きさと向きを求めよ．

(4) 大地の表面に誘導される面電荷密度を求めよ．

(5) 大地に対する導体1の電位を求めよ．

(6) 導体1と大地との間の単位長さあたりの静電容量を求めよ．

(7) Fig. 1(b) に示すように，導体1と平行な半径 a の別の無限長円柱導体（導体2）が，大地の表面からの距離 h（$z = h, h >> a$）で，導体1から距離 d（$x = d, d >> a$）の位置に存在する．導体2に単位長さあたり$+\lambda_2$の正電荷が一様に分布するとき，大地に対する導体1の電位を求めよ．

2018年3月実施
問題1　電磁気学
(2頁目／3頁中)

As shown in Fig. 1(a), an infinitely long cylindrical conductor (conductor 1) of radius a parallel to the y-axis is located at a distance h ($z = h$, $h >> a$) from the surface of the ground (x-y plane). When conductor 1 is uniformly charged with a positive charge density per unit length of $+\lambda_1$, answer the following questions. Here, the ground shall be treated as a conductor, and the permittivity of the air is ε_0.

(1) Sketch the cross section of conductor 1 and ground as shown in Fig. 1(a), and show the electric lines of force.

(2) Find the magnitude and the direction of the force per unit length experienced by conductor 1.

(3) Find the magnitude and the direction of the electric field at the point P (x_P, 0, 0) on the x-axis.

(4) Find the induced surface charge density of the surface of the ground.

(5) Find the electric potential of conductor 1 with respect to the ground.

(6) Find the capacitance per unit length between conductor 1 and the ground.

(7) As shown in Fig. 1(b), another infinitely long cylindrical conductor (conductor 2) of radius a parallel to conductor 1 is located at a distance h ($z = h$, $h >> a$) from the surface of the ground and at a distance d ($x = d$, $d >> a$) from conductor 1. Find the electric potential of conductor 1 with respect to the ground when conductor 2 is uniformly charged with a positive charge density per unit length of $+\lambda_2$.

2018 年 3 月実施
問題 1　電磁気学
(3 頁目／3 頁中)

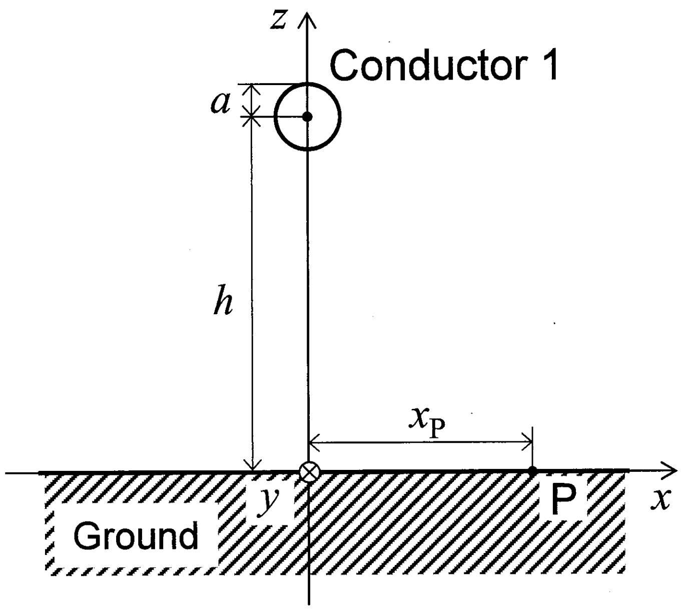

Fig. 1(a)

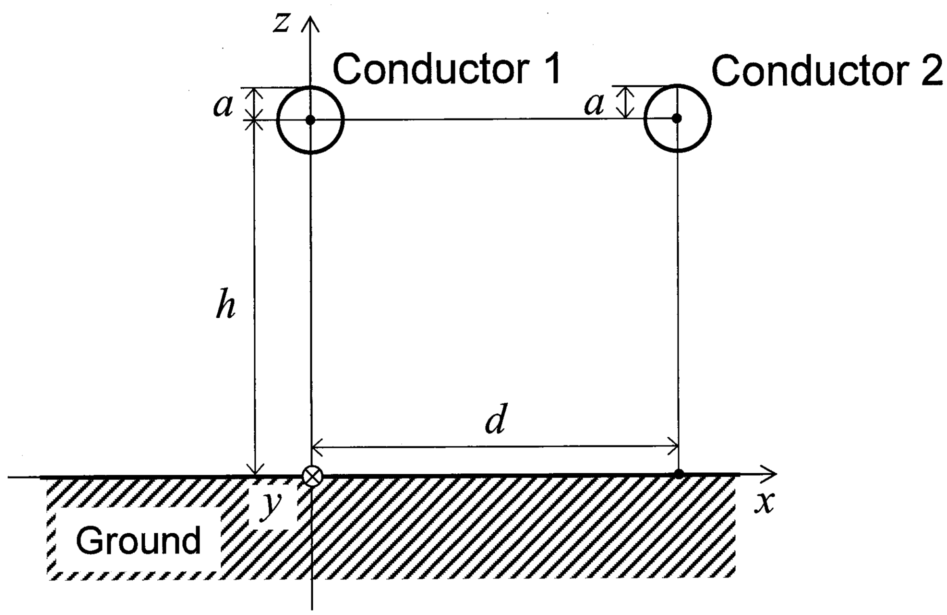

Fig. 1(b)

2018 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(1 頁目／3 頁中)

Fig. 2(a) に示す二端子対網 N_1，N_2 について以下の問に答えよ．

(1) Fig. 2(b) に示すように，N_1 の端子対 $1_b - 1_b'$ を短絡し，端子対 $1_a - 1_a'$ に交流電圧 $e(t) = A\sin\omega t$ を印加した．電流 $i_1(t)$ の位相 θ_1 を求めよ．

(2) Fig. 2(c) に示すように，N_1 と N_2 を接続し，端子対 $2_b - 2_b'$ にインダクタンス L_2 を接続した．端子対 $1_a - 1_a'$ に交流電圧 $e(t) = A\sin\omega t$ を印加した時，電流 $i_2(t)$ の実効値が最大となる角周波数 ω_m を求めよ．

(3) N_1 と N_2 の縦続行列(K 行列) K_1, K_2 をそれぞれ求めよ．また，Fig. 2(d)に示すように N_1 と N_2 を接続した回路の縦続行列 K_3 を求めよ．

(4) Fig. 2(e) に示す回路において，時刻 $t=0$ にスイッチ S を閉じる．スイッチ S を閉じた後の電流 $i(t)$ を求めよ．ただし $L_1 = 4C_1R_1^2$ と仮定せよ．

2018 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(2 頁目／3 頁中)

Answer the following questions about the two-terminal-pair networks N_1 and N_2 shown in Fig. 2(a).

(1) As shown in Fig. 2(b), the terminal pair $1_b - 1_b$' of N_1 is short-circuited, and an AC voltage $e(t) = A\sin\omega t$ is applied at the terminal pair $1_a - 1_a$'. Give the phase θ_1 of the current $i_1(t)$.

(2) As shown in Fig. 2(c), N_1 and N_2 are connected, and an inductance L_2 is connected at the terminal pair $2_b - 2_b$'. When an AC voltage $e(t) = A\sin\omega t$ is applied at the terminal pair $1_a - 1_a$', find the angular frequency ω_m to maximize the root mean square current $i_2(t)$.

(3) Find the chain matrix (K-matrix) K_1 and K_2 of N_1 and N_2, respectively. Additionally, find the chain matrix K_3 of the circuit for which N_1 and N_2 are connected as shown in Fig. 2(d).

(4) In the circuit shown in Fig. 2(e), the switch S is closed at $t = 0$. Give the current $i(t)$ after the switch S is closed. Assume that $L_1 = 4C_1R_1^2$.

2018 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(3 頁目／3 頁中)

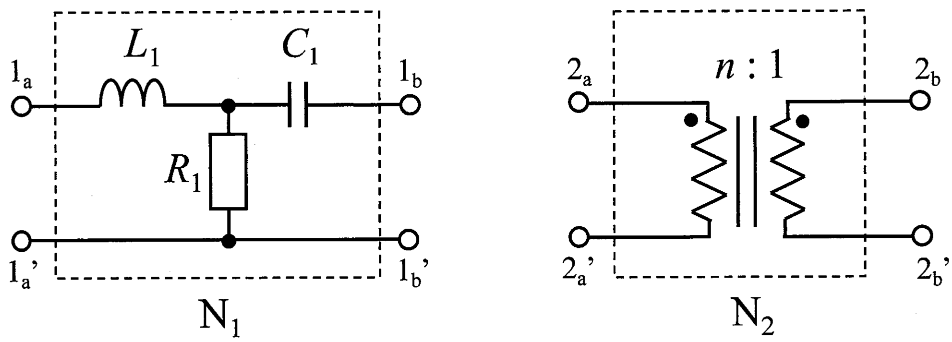

Fig. 2(a)

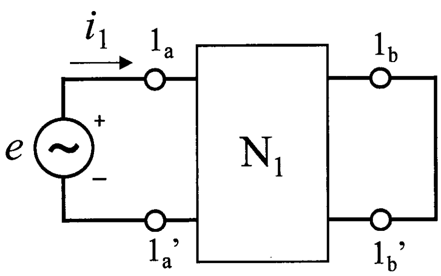

Fig. 2(b)

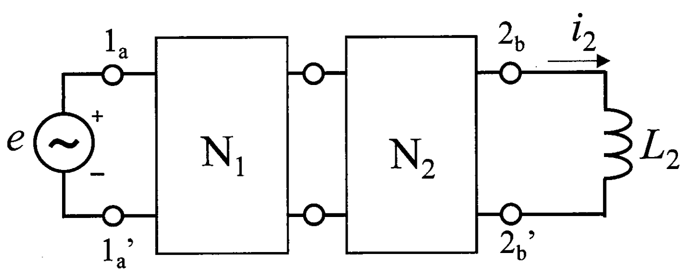

Fig. 2(c)

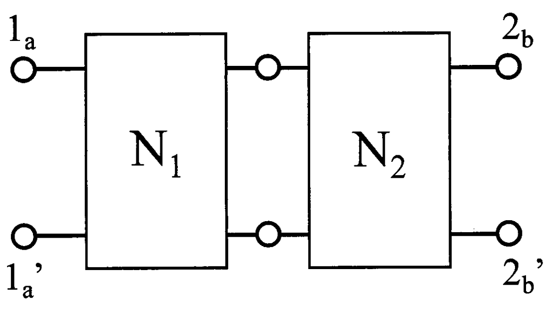

Fig. 2(d)

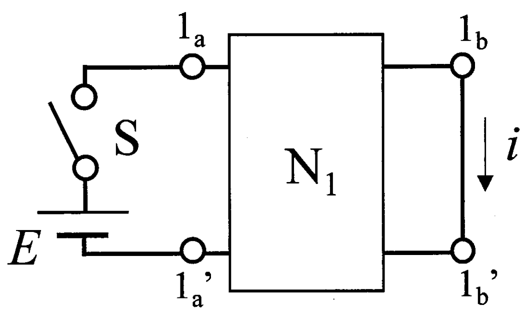

Fig. 2(e)

2018年 3月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／1頁中)

変数 $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ を引数とする n-変数論理関数 f が，定数関数であるかもしくは正リテラル $x_1, \ldots, x_n$ のみを用いた積和論理式で表現できるとき，f を正関数と呼ぶ．また，実数 $w_1, \ldots, w_n, \theta$ があって

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & (w_1x_1 + \cdots + w_nx_n \geq \theta \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

が成り立つとき，f をしきい値関数と呼ぶ．以下の問に答えよ．なお，$\wedge$ は論理積演算，$\vee$ は論理和演算を表す．

(1) 次の積和論理式を，リテラルの最も少ない等価な積和論理式に直せ．

(a) $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2)$
(b) $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) \vee x_2 \vee (x_2 \wedge x_3)$
(c) $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$

(2) しきい値関数ではない2変数論理関数が存在するか否か，根拠とともに示せ．

(3) 3変数正関数は全部でいくつあるか，根拠とともに示せ．

(4) しきい値関数ではない3変数正関数が存在するか否か，根拠とともに示せ．

An n-variable logic function f with arguments $x_1, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ is called a positive function if f is a constant function or can be expressed in a sum-of-products form with positive literals $x_1, \ldots, x_n$ only. An n-variable logic function f is called a threshold function if it satisfies

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1 & \text{if } w_1x_1 + \cdots + w_nx_n \geq \theta \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

for some real numbers $w_1, \ldots, w_n, \theta$. Answer the following questions. Note that $\wedge$ and $\vee$ denote the logical conjunction and disjunction, respectively.

(1) Modify the following sum-of-products forms into equivalent ones with the least number of literals.

(a) $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2)$
(b) $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2) \vee x_2 \vee (x_2 \wedge x_3)$
(c) $x_1 \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$

(2) Does there exist a 2-variable logic function which is not a threshold function? Justify your answer.

(3) How many 3-variable positive functions exist? Justify your answer.

(4) Does there exist a 3-variable positive function which is not a threshold function? Justify your answer.

2018年 3月実施
問題4 情報基礎2
(1頁目／2頁中)

本問では, グラフとは有限無向グラフであり, 自己ループ辺および多重辺が存在することは許すものとする. また, 次の用語と記号を定義する.

- 任意のグラフ G について, G の点の数を $n(G)$, 辺の数を $m(G)$ でそれぞれ表す.
- 任意のグラフ G とその点 x について, G における x の次数を $\deg(G,x)$ で表す.
- グラフ G 上の任意の歩道 C について, C の長さ $\ell(C)$ は C が通る辺の延べ総数である.
- C をグラフ G 上の閉じた歩道とするとき, C が 1-回路 (またはオイラー回路) であるとは, C が G の各々の辺をちょうど1回ずつ通ることを言い, C が 2-回路であるとは, C が G の各々の辺を1回または2回通ることを言う.
- グラフ G の部分グラフ H がパリティ部分グラフであるとは, H が G の全ての点を含み, かつ G 上の任意の点 x について, $\deg(G,x)$ と $\deg(H,x)$ の偶奇が一致することを言う. G のパリティ部分グラフ H で辺の数 $m(H)$ が最も少ないものを最小パリティ部分グラフと言う.

このとき, 次の問に答えよ. ただし, 必要ならば次の事実 (A), (B) を証明なしに用いてもよい.

(A) 連結グラフ G が 1-回路を持つためには, G の全ての点の次数が偶数であることが必要十分である.

(B) 任意の自然数 n について, n 個の点から成る木は $n-1$ 本の辺を持つ.

(1) G を連結グラフとする.

(a) H を G の任意のパリティ部分グラフとするとき, G は $\ell(C) = m(G) + m(H)$ となる 2-回路 C を持つことを示せ.

(b) C を G 上の任意の 2-回路とするとき, G は $m(H) = \ell(C) - m(G)$ となるパリティ部分グラフ H を持つことを示せ.

(2) G を連結グラフ, H をその最小パリティ部分グラフとする.

(a) H は閉路を持たないことを示せ.

(b) G 上の最も短い 2-回路の長さを $\mu_2(G)$ とするとき, H は $m(G) + n(G) - \mu_2(G)$ 個の連結成分から成ることを示せ.

2018年 3月実施
問題4 情報基礎2
(2頁目／2頁中)

In this question, any graph is a finite undirected graph which may have self-loops and multiple edges. Define the following terms and symbols:

- For any graph G, let $n(G)$ and $m(G)$ denote the number of vertices and edges in G, respectively.
- For any graph G and any vertex x in G, $\deg(G, x)$ denotes the degree of x in G.
- For any graph G and any walk C on G, the length $\ell(C)$ of C is the total number of edges that C passes.
- For a graph G and a closed walk C on G, C is a 1-circuit (or an Euler circuit) if C passes each edge of G exactly once, and C is a 2-circuit if C passes each edge of G once or twice.
- A subgraph H of a graph G is a parity subgraph if H contains all vertices of G and for any vertex x in G, $\deg(G, x)$ and $\deg(H, x)$ have the same odd-even parity. A parity subgraph H of G is a minimum parity subgraph if the number $m(H)$ of edges in H is minimum among all parity subgraphs of G.

Answer the following questions. If necessary, the following facts (A) and (B) can be applied without proof.

(A) A connected graph G has a 1-circuit if and only if every vertex of G is of even degree.

(B) For any natural number n, any tree of n vertices has $n - 1$ edges.

(1) Let G be any connected graph.

(a) Prove that for any parity subgraph H of G, G has a 2-circuit C such that $\ell(C) = m(G) + m(H)$.

(b) Prove that for any 2-circuit C in G, G has a parity subgraph H such that $m(H) = \ell(C) - m(G)$.

(2) Let G be any connected graph and H be any minimum parity subgraph of G.

(a) Prove that H contains no cycle.

(b) Let $\mu_2(G)$ denote the length of a shortest 2-circuit in G. Prove that H consists of $m(G) + n(G) - \mu_2(G)$ connected components.

2018 年 3 月実施
問題5 物理基礎
(1頁目／2頁中)

質量 m の質点が, 時間に依存しない中心対称ポテンシャル U のもとで運動している系を考察する. 質点の位置ベクトルは $\boldsymbol{r}$ で表し, その原点はポテンシャルの中心に置く. つまり質点の運動方程式は $m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\nabla U(r)$ とかけ, ここで $r = |\boldsymbol{r}|$ である.

(1) エネルギー $E = \frac{1}{2}m\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^2 + U(r)$ と角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ が保存されること, 即ち, $\frac{dE}{dt} = 0$ 及び $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$ を示せ. ここで記号 $\times$ は外積を表す.

(2) $\boldsymbol{L}$ の保存は, 質点の運動が, ある (原点を含む) 平面内に限られることを意味する. 今この平面を x-y 面にとり, 質点の位置を $\boldsymbol{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$ と表す. ここで θ は, $\boldsymbol{r}$ と x 軸の間の角度である. 以下の関係を示せ.

$$L = mr^2\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \tag{5A}$$

ここで $L = |\boldsymbol{L}|$ である.

(3) Eq. (5A) は, $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ を r の関数として表している. 質点がポテンシャルの中心に到達できるためには, 以下の不等式が必要条件として成立しなければならない.

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 > 0$$

今, ポテンシャルが $U(r) = -\frac{A}{r^\alpha}$ の型をもち, α と A は正の実数であるとする. 上記不等式が α と A に課す制限を求めよ. ここで, この不等式は結果的に,

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \infty$$

を意味すると仮定する.

2018年 3月実施
問題5 物理基礎
(2頁目／2頁中)

Consider a system where a particle of mass m moves in a time-independent centrally symmetric potential U. The position vector of the particle is denoted by $\boldsymbol{r}$, whose origin is located at the center of the potential. Accordingly, the equation of motion of the particle is written as $m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\nabla U(r)$, where $r = |\boldsymbol{r}|$.

(1) Prove that the energy $E = \frac{1}{2}m\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|^2 + U(r)$ and the angular momentum $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times m\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$ are conserved, namely, $\frac{dE}{dt} = 0$ and $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = 0$. Here, the symbol $\times$ means outer product.

(2) The conservation of $\boldsymbol{L}$ means that the motion of the particle is confined in a certain plane (which contains the origin). We now take the plane as the x-y plane, and express the position of the particle as $\boldsymbol{r} = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$, where θ is the angle between $\boldsymbol{r}$ and the x axis. Show the following relations:

$$L = mr^2\left|\frac{d\theta}{dt}\right|,$$

$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r), \tag{5A}$$

where $L = |\boldsymbol{L}|$.

(3) Eq. (5A) shows $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ as a function of r. In order for the particle to reach the center of the potential, the following inequality must be fulfilled as a necessary condition:

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 > 0.$$

Now, let us suppose that the potential takes the form $U(r) = -\frac{A}{r^\alpha}$, where α and A are real positive numbers. Find the restriction which the above inequality imposes on α and A. Here, we assume that the inequality consequently means

$$\lim_{r\to 0}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \infty.$$

2018年 3月実施
問題6 数学基礎
(1頁目／3頁中)

ガウス積分は以下の公式で与えられる．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

ここで a は正の実数とする．以下の問に答えよ．

(1) 以下の実数 x_1, x_2, x_3 に関する重積分を考える．

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}f(x_1, x_2, x_3)\right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

ここで $f(x_1, x_2, x_3)$ は以下のように定義される．

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1.$$

(a) $f(x_1, x_2, x_3)$ を以下の 2 次形式で書き直した際に得られる対称行列 A を求めよ．

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) 行列 A の行列式の値を求めよ．

(c) 行列 A を対角化する直交行列 O を求めよ．

(d) 定積分 I_1 を計算せよ．

(2) 以下の実数 x に関する積分を複素積分を用いて考える． p は虚軸上にない複素数とする．

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + p^2} dx.$$

(a) 被積分関数の引数を複素数 z に拡張した次の関数の極は $z = \pm ip$ で与えられる．

$$g(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 + p^2}.$$

留数定理を用いて，Fig.6(a) で与えられる積分経路 C による $\oint_C g(z)dz$ を計算せよ．

(b) 積分経路 C 上で半径 R の円周上及び半径 ϵ の円周上の積分が， $R \to \infty$ および $\epsilon \to 0$ で 0 となることを用いて I_2 を計算せよ．

以下の実数 x に関する積分を含む関数をラプラス変換を用いて考える．

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{\sqrt{x}} dx.$$

ここで t は正の実数とする．

(c) $f(t)$ にラプラス変換を実行することにより像関数 $F(p) \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ を求めよ．

(d) これらの結果を用いて $f(t)$ を求めよ．

2018年 3月実施
問題6 数学基礎
(2頁目／3頁中)

The Gaussian integral is given by the following formula.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2\right) dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}.$$

Here a is a real positive number. Answer the following questions.

(1) Consider the following multiple integral by real numbers x_1, x_2 and x_3.

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}f(x_1, x_2, x_3)\right) dx_1 dx_2 dx_3.$$

Here $f(x_1, x_2, x_3)$ is defined as

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1.$$

(a) When $f(x_1, x_2, x_3)$ is written in the following quadratic form, find a symmetric matrix A such that

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) Compute the determinant of the matrix A.

(c) Find the orthogonal matrix O diagonalizing the matrix A.

(d) Compute I_1.

(2) Consider the following integral by a real number x by considering a complex integral. Here p is a complex number, which is absent on the imaginary axis.

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2 + p^2} dx.$$

(a) The poles of the following function, which is the integrand with the complex variable z, are given by $z = \pm ip$.

$$g(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 + p^2}.$$

By using the residue theorem, compute $\oint_C g(z)dz$ along the contour C in Fig.6(a).

(b) Compute I_2 by using the fact that the integrals along the circumference with a radius R and that with a radius ϵ on the contour C vanish when $R \to \infty$ and $\epsilon \to 0$.

Consider the following function with an integral by a real number x by using the Laplace transformation.

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{\sin tx}{\sqrt{x}} dx.$$

Here t is a real positive number.

(c) Apply the Laplace transformation to $f(t)$ and obtain the image function $F(p) \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$.

(d) Find $f(t)$ by using the above results.

2018年 3月実施
問題6 数学基礎
(3頁目／3頁中)

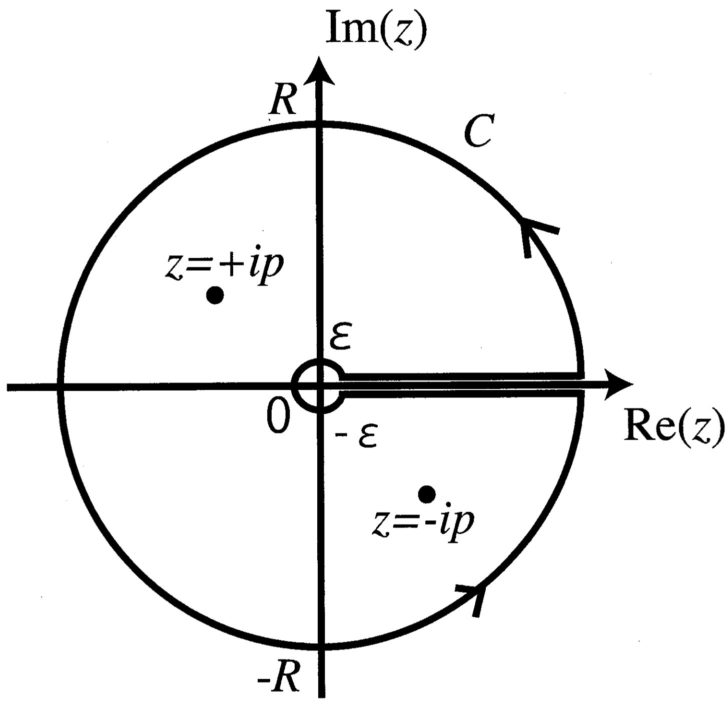

Fig. 6 (a) Contour C