2019 年 3 月実施
問題 1　電磁気学
(1 頁目／2 頁中)

Fig. 1 に示すように，半径 a の導体極板からなる円形平行平板コンデンサを考える．極板間が，誘電率 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, 厚さ d_1, d_2 の誘電体 1, 2 で満たされている．上下の極板にそれぞれ電荷 $+Q$, $-Q$ を与えた．極板は十分大きく端効果は無視できるものとする．誘電体間の境界における真電荷の面密度が 0 であり，誘電体 1, 2 の透磁率を μ としたとき，以下の問に答えよ．

(1) 誘電率の異なる誘電体の境界上における，電束密度および電界に対する境界条件を，Gauss の法則および Faraday の電磁誘導の法則を用いて導出せよ．

(2) 誘電体 1, 2 の内部における電束密度 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2$，電界 $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$，極板間の電位差 V をそれぞれ求めよ．

(3) コンデンサの静電容量 C を求めよ．さらに，この静電容量 C を用いてコンデンサに蓄えられるエネルギー W_C を求めよ．

(4) 二つの誘電体中の電界が有するエネルギーの総和 W_E を求め，問(3)で求めたエネルギー W_C と一致することを示せ．

(5) 上の極板に働く静電力の向きと大きさを求めよ．

(6) 極板上の電荷が $Q = Q_0 \cos \omega t$ で時間的に変動しているとする．このとき，中心軸から r の位置の磁界 $\boldsymbol{H}$ を求めよ．ただし $0 \le r \le a$ であり，放射は無視できるものとする．また，コンデンサ内部の電界と磁界のエネルギー $W_E(t)$と $W_M(t)$を求め，$W_E(t)$と $W_M(t)$の時間変化の概略を図示せよ．

Consider a capacitor having conducting disk electrodes of radius a located in parallel as shown in Fig.1. Two different dielectrics 1 and 2 of permittivities ε_1, ε_2 and thicknesses d_1, d_2 are inserted between the electrodes. Charges $+Q$ and $-Q$ are given to the upper and lower electrodes, respectively. Here the sizes of the electrodes are large enough that edge effects of the electrodes are negligible. Assuming a zero surface charge density at the boundary between the dielectrics 1 and 2, and that the permeability of both the dielectrics 1 and 2 is μ, answer the following questions.

(1) Derive the boundary conditions at the boundary between the two different dielectrics for both electric flux densities and electric fields by using Gauss's law and Faraday's law of induction.

(2) Find the electric flux densities $\boldsymbol{D}_1$, $\boldsymbol{D}_2$ inside the dielectrics 1 and 2, the electric fields $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ inside the dielectrics 1 and 2, and the voltage V between the electrodes.

2019 年 3 月実施
問題 1　電磁気学
(2 頁目／2 頁中)

(3) Find the capacitance C of the capacitor. Furthermore find the energy W_C stored in the capacitor by using the capacitance C.

(4) Find the sum W_E of the energies stored by the electric fields inside the two dielectrics. Furthermore, prove that W_E is equivalent to W_C obtained in question (3).

(5) Find the direction and magnitude of the electrostatic force exerted on the upper electrode.

(6) The charges on the electrodes are temporary varying as $Q = Q_0 \cos \omega t$. Find the magnetic field $\boldsymbol{H}$ at the distance r from the center axis. Here $0 \leq r \leq a$ and the radiation is negligible. Furthermore find the energies $W_E(t)$ and $W_M(t)$ stored by the electric fields and the magnetic fields inside the capacitor, respectively; draw schematic viewgraphs of $W_E(t)$ and $W_M(t)$.

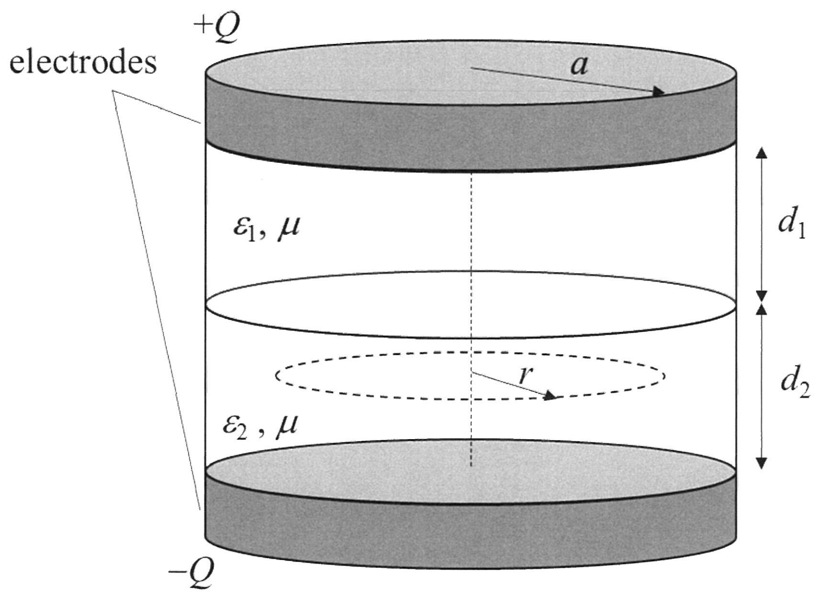

Fig. 1

2019 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(1 頁目／2 頁中)

(1) Fig. 2(a)に示す回路において，電圧源の角周波数はωであり，可変抵抗Rで消費される電力が最大になるように可変抵抗Rと可変キャパシタCが調整されている．以下の問に答えよ．

(a) R および C を ω, R_0, L_0 を用いて表せ．

(b) 可変抵抗Rで消費される電力を求めよ．

(2) Fig. 2(b)に示す回路について以下の問に答えよ．電圧源の角周波数はωである．また，分布定数線路は無損失であるとし，その分布定数線路の長さ，特性インピーダンス，位相定数，波長をそれぞれ l, Z_0, β, λ とする．

(a) 端子対 (1-1’) から見たインピーダンス Z_{in} を求めよ．

(b) $l = \lambda/4$ のとき，端子対 (1-1’) から見たインピーダンス Z_{in} を求めよ．

(c) $l = \lambda$, $Z_0 = 50\,\Omega$ とする．$Z = 50\,\Omega$ のとき，および$Z = 25\,\Omega$ のときの $V(x)/V_0$ をそれぞれ求めよ．また $0 \leq x \leq l$ の範囲において，$Z = 50\,\Omega$ および$Z = 25\,\Omega$ のときの $|V(x)/V_0|$ の概形をそれぞれ描け．

(1) In the circuit shown in Fig. 2(a), the angular frequency of the voltage source is ω, and the variable resistor R and the variable capacitor C are adjusted to maximize the electric power dissipated in the variable resistor R. Answer the following questions.

(a) Express R and C in terms of ω, R_0, and L_0.

(b) Find the electric power dissipated in the variable resistor R.

(2) Answer the following questions about the circuits shown in Fig. 2(b). The angular frequency of the voltage source is ω. Assume that the transmission line is lossless, and the length, the characteristic impedance, the phase constant, and the wavelength of the transmission line are l, Z_0, β, and λ, respectively.

(a) Find the impedance Z_{in} seen from the terminal pair (1-1’).

(b) Find the impedance Z_{in} seen from the terminal pair (1-1’) for $l = \lambda/4$.

(c) Let $l = \lambda$ and $Z_0 = 50\,\Omega$. Derive $V(x)/V_0$ for $Z = 50\,\Omega$ and $Z = 25\,\Omega$. Sketch the graphs of $|V(x)/V_0|$ for $Z = 50\,\Omega$ and $Z = 25\,\Omega$ in the range of $0 \leq x \leq l$.

2019 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(2 頁目／2 頁中)

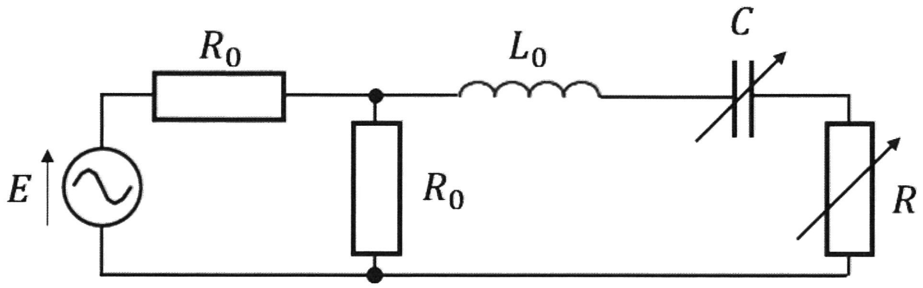

Fig. 2(a)

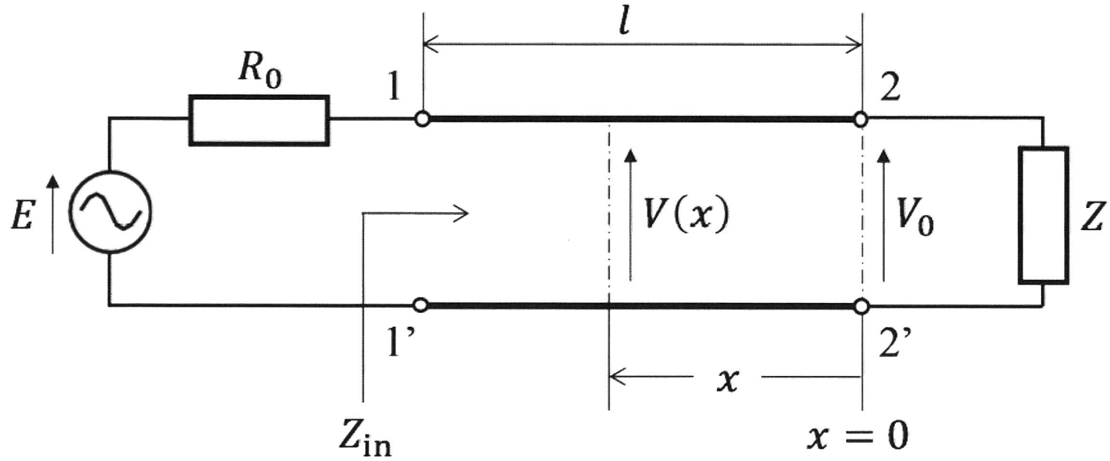

Fig. 2(b)

2019 年 3 月実施
問題3 情報基礎 1
(1 頁目／2 頁中)

以下では非負整数の集合を $\mathbb{N}$ で表すものとする．アルファベット $\Sigma_k = \{0, \ldots, k-1\}$ 上の任意の文字列 $a_1 \ldots a_n \in \Sigma_k^n$ を非負整数として解釈する関数 $\phi_k \colon \Sigma_k^* \to \mathbb{N}$ を

$$\phi_k(a_1 \ldots a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} k^i$$

と定義する．例えば， $\phi_2(1001) = \phi_2(001001) = 9$ である．また，この関数を拡張し，任意の言語 $L \subseteq \Sigma_k^*$ に対して $\phi_k(L) = \{\, \phi_k(w) \in \mathbb{N} \mid w \in L \,\}$ と定義する．例えば，Fig. 3 (a) に示す決定性有限状態オートマトン (DFA) の受理する Σ_2 上の言語を L_a とすると， $\phi_2(L_\mathrm{a})$ は偶数非負整数全体の集合である．本問中の図において，太い矢印で開始状態を指し，二重丸で受理状態を表す．また，ある DFA より状態数の少ない他のいかなる DFA も同じ言語を受理しないとき，その DFA を最簡形 DFA と呼ぶ．

(1) 等式 $\phi_2(11001110100) = \phi_4(w)$ を満たす文字列 $w \in \Sigma_4^*$ をひとつ与えよ．

(2) 等式 $\phi_2(w) = \phi_4(130321)$ を満たす文字列 $w \in \Sigma_2^*$ をひとつ与えよ．

(3) 言語 $\{\, w \in \Sigma_2^* \mid \phi_2(w)$ は 3 の倍数$\,\}$ を受理する最簡形 DFA を描け．

(4) 言語 $\{\, w \in \Sigma_4^* \mid \phi_4(w)$ は 3 の倍数$\,\}$ を受理する最簡形 DFA を描け．

(5) Fig. 3 (b) に示す DFA の受理する Σ_2 上の言語を L_b とする．等式 $\phi_4(L) = \phi_2(L_\mathrm{b})$ を満たす言語 $L \subseteq \Sigma_4^*$ を受理する最簡形 DFA を描け．

(6) Fig. 3 (c) に示す DFA の受理する Σ_4 上の言語を L_c とする．等式 $\phi_2(L) = \phi_4(L_\mathrm{c})$ を満たす言語 $L \subseteq \Sigma_2^*$ を受理する最簡形 DFA を描け．

In what follows, $\mathbb{N}$ denotes the set of all non-negative integers. Define a function $\phi_k \colon \Sigma_k^* \to \mathbb{N}$ that interprets an arbitrary string $a_1 \ldots a_n \in \Sigma_k^n$ over an alphabet $\Sigma_k = \{0, \ldots, k-1\}$ as a non-negative integer by

$$\phi_k(a_1 \ldots a_n) = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} k^i\,.$$

For example, $\phi_2(1001) = \phi_2(001001) = 9$. We extend the function by $\phi_k(L) = \{\, \phi_k(w) \in \mathbb{N} \mid w \in L \,\}$ for an arbitrary language $L \subseteq \Sigma_k^*$. For example, $\phi_2(L_\mathrm{a})$ is the set of all even non-negative integers for the language L_a over Σ_2 accepted by the deterministic finite-state automaton (DFA) shown in Fig. 3 (a). In each figure of this question, the thick arrow indicates the initial state and the double circle denotes the accepting state. A DFA is said to be minimum if no other DFA with fewer states accepts the same language.

2019 年 3 月実施
問題3 情報基礎1
(2頁目／2頁中)

(1) Give a string $w \in \Sigma_4^*$ satisfying $\phi_2(11001110100) = \phi_4(w)$.

(2) Give a string $w \in \Sigma_2^*$ satisfying $\phi_2(w) = \phi_4(130321)$.

(3) Draw the minimum DFA that accepts the language $\{\, w \in \Sigma_2^* \mid \phi_2(w) \text{ is a multiple of } 3 \,\}$.

(4) Draw the minimum DFA that accepts the language $\{\, w \in \Sigma_4^* \mid \phi_4(w) \text{ is a multiple of } 3 \,\}$.

(5) Let L_b be the language over Σ_2 that the DFA shown in Fig. 3 (b) accepts. Draw the minimum DFA that accepts a language $L \subseteq \Sigma_4^*$ satisfying $\phi_4(L) = \phi_2(L_\mathrm{b})$.

(6) Let L_c be the language over Σ_4 that the DFA shown in Fig. 3 (c) accepts. Draw the minimum DFA that accepts a language $L \subseteq \Sigma_2^*$ satisfying $\phi_2(L) = \phi_4(L_\mathrm{c})$.

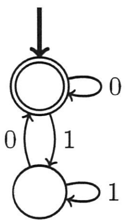

Fig. 3 (a)

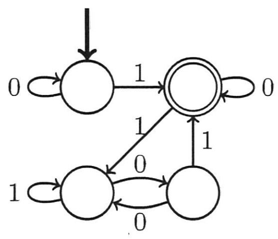

Fig. 3 (b)

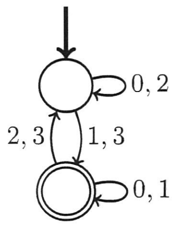

Fig. 3 (c)

2019年 3月実施
問題4 情報基礎2
(1頁目／3頁中)

長さ $\mathtt{N} \geq 2$ の配列 $A = (A[1], \ldots, A[\mathtt{N}])$ の各要素に実数が格納されている．配列 A の二つの要素番号を引数にとる手続き P と Q を次のように定義する．

- 手続き $\mathtt{P}(i,j)$ は，もし $A[i] < A[j]$ の場合に 1，それ以外の場合に 0 を返す．
- 手続き $\mathtt{Q}(i,j)$ は，配列 A の i 番目と j 番目の要素を入れ替える．ただし，もし $i = j$ なら配列 A は変化しない．

手続き P および Q 以外では配列 A にはアクセスしないという条件下で，配列 A 内の実数を昇順に整列するアルゴリズムを考える．本問では，手続き P の呼び出し回数を計算量と呼ぶ．

以下の問に答えよ．

(1) 上記条件を満たす整列アルゴリズムに対する計算量の漸近的下界を Ω 記法を用いて示せ．

(2) Fig. 4(a) に示す整列アルゴリズム Alg1 の疑似コードを考える．手続き P の呼び出し回数を N を用いて示せ．また，答の求め方も説明せよ．

(3) Fig. 4(b) に示す整列アルゴリズム Alg2 について，手続き Q の総呼び出し回数が $\mathtt{N}-1$ 回以下となるように，(A), (B), (C) に入る適切な疑似コードを示せ．ただし，疑似コードは Fig. 4(a) に示す疑似コードの表記に従うものとする．

(4) Fig. 4(c) に示す整列アルゴリズム Alg3 の疑似コードを考える．ただし，Fig. 4(c) 中に示す手続き R が利用できる．

(a) Alg3 の基本戦略と処理の概要を言葉で簡潔に説明せよ．

(b) 配列 A の初期値を $(2, 5, 4, 3, 2)$ とする．Alg3 の 6 行目および 19 行目にある手続き Q の実行直後に毎回配列 A の値を表示することを考える．配列 A の値を表示される順番に全て示せ．

(c) Alg3 の計算量を Θ 記法を用いて示せ．

Every element in an array $A = (A[1], \ldots, A[\mathtt{N}])$ of length $\mathtt{N} \geq 2$ contains a real number. We define procedures `P` and `Q`, which take two element indices of the array A as their arguments, as follows:

- The procedure `P`(i,j) returns 1 if $A[i] < A[j]$, and 0 otherwise.
- The procedure `Q`(i,j) swaps the i-th and j-th elements in the array A, where the array A is unchanged if $i = j$.

We consider algorithms for sorting the real numbers in the array A in ascending order under the condition that algorithms never access the array A except for the procedures `P` and `Q`. In this question, we refer to the number of calls to the procedure `P` as the computational complexity.

Answer the following questions.

(1) Give the asymptotic lower bound of the computational complexity in big Ω notation for sorting algorithms that satisfy the above condition.

(2) Consider the pseudocode for the sorting algorithm `Alg1` shown in Fig. 4(a). Give the number of calls to the procedure `P` as an expression of N. Moreover, explain your derivation of the result.

(3) Following the notation of the pseudocode shown in Fig. 4(a), give an appropriate pseudocode by filling `( A )`, `( B )`, and `( C )` of the sorting algorithm `Alg2` shown in Fig. 4(b) so that the total number of calls to the procedure `Q` is $N - 1$ or less.

(4) Consider the pseudocode for the sorting algorithm `Alg3` shown in Fig. 4(c), where a procedure `R`, also shown in Fig. 4(c), is available.

  (a) Succinctly describe the fundamental strategy and an outline of the process of `Alg3` in words.

  (b) Suppose that the initial values of the array A are $(2, 5, 4, 3, 2)$. We consider displaying the values of the array A every time right after the procedure `Q` at line 6 and line 19 in `Alg3` is performed. Show all the values of the array A in the order in which they are displayed.

  (c) Give the computational complexity of `Alg3` in big Θ notation.

2019年 3月実施
問題4 情報基礎2
(3頁目／3頁中)

```
Alg1(N):
  for i := 1 to N-1 do
    for j := 2 to N-i+1 do
      if P(j, j-1) = 1 then
        Q(j, j-1)
      endif
    endfor
  endfor
```

Fig. 4(a)

```
Alg2(N):
  for i := 1 to N-1 do
    k := i
    for j := i+1 to N do
      if ( A ) then
        ( B )
      endif
    endfor
    ( C )
  endfor
```

Fig. 4(b)

```
Alg3(N):
  for i := 1 to N do
    R(N-i+1, N)
  endfor
  for i := 1 to N-1 do
    Q(1, N-i+1)
    R(1, N-i)
  endfor
```

```
R(i, m):
  k := i
  while k <= m do
    j := k
    k := k*2
    if k <= m then
      if k+1 <= m and P(k, k+1) = 1 then
        k := k+1
      endif
      if P(j, k) = 1 then
        Q(j, k)
      endif
    endif
  endwhile
```

Fig. 4(c)

2019年 3月実施
問題5 物理基礎
(1頁目／2頁中)

時間に依存しないポテンシャル V で相互作用する, N 個の粒子からなる系を考察する. i 番目の粒子 $(i = 1, 2, \cdots, N)$ の運動方程式は以下のように書ける.

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}_i V(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N)$$

ここで, m_i と $\boldsymbol{r}_i$ は i 番目の粒子の質量と位置ベクトルである. また, x_i, y_i, z_i を $\boldsymbol{r}_i$ の直交座標成分として, $\boldsymbol{\nabla}_i V = (\partial V/\partial x_i,\ \partial V/\partial y_i,\ \partial V/\partial z_i)$ である.

(1) 全エネルギー

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} + V$$

が保存されること, 即ち, $dE/dt = 0$ を示せ.

(2) V が任意の無限小平行移動 $\delta \boldsymbol{x}$ に関して不変である, つまり,

$$V(\boldsymbol{r}_1 + \delta\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{r}_2 + \delta\boldsymbol{x},\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N + \delta\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N) \tag{5A}$$

と仮定する.

(a) 以下の関係を導出せよ.

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\nabla}_i V = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i},\ \frac{\partial V}{\partial y_i},\ \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) = \boldsymbol{0}$$

(b) 全運動量

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$$

が保存されること, 即ち, $d\boldsymbol{P}/dt = \boldsymbol{0}$ を示せ.

(3) V が任意の無限小回転 $\delta\boldsymbol{\theta}$ に関して不変である, つまり,

$$V(\boldsymbol{r}_1 + \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2 + \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N + \delta\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{r}_N) = V(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N) \tag{5B}$$

と仮定する. ここで, 記号 $\times$ は外積を表す.

(a) 全角運動量

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$$

が保存されること, 即ち, $d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{0}$ を示せ. 必要ならば, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a})$ を用いよ.

(b) $\boldsymbol{L}$ が原点の選択に依存しないとき, 系の運動が満たすべき条件を示せ. ここで V は Eq. (5A) も満たし, 従って, 任意の原点に対して $d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{0}$ であると仮定する.

2019 年 3 月実施
問題5 物理基礎
(2頁目／2頁中)

Consider a system consisting of N particles, which interact with a time-independent potential V. The equation of motion of the ith particle ($i = 1, 2, \cdots, N$) is written as

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = -\boldsymbol{\nabla}_i V(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N).$$

Here, m_i and $\boldsymbol{r}_i$ are the mass and the position vector of the ith particle, respectively. Also, $\boldsymbol{\nabla}_i V = (\partial V/\partial x_i,\ \partial V/\partial y_i,\ \partial V/\partial z_i)$ with x_i, y_i, and z_i being the Cartesian coordinates of $\boldsymbol{r}_i$.

(1) Show that the total energy

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} \cdot \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} + V$$

is conserved, namely, $dE/dt = 0$.

(2) Suppose that V is invariant for an arbitrary infinitesimal translation $\delta \boldsymbol{x}$:

$$V(\boldsymbol{r}_1 + \delta\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{r}_2 + \delta\boldsymbol{x},\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N + \delta\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N). \tag{5A}$$

(a) Derive the following relation:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\nabla}_i V = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial y_i}, \frac{\partial V}{\partial z_i} \right) = \boldsymbol{0}.$$

(b) Show that the total momentum

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$$

is conserved, namely, $d\boldsymbol{P}/dt = \boldsymbol{0}$.

(3) Suppose that V is invariant for an arbitrary infinitesimal rotation $\delta\boldsymbol{\theta}$:

$$V(\boldsymbol{r}_1 + \delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2 + \delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N + \delta\boldsymbol{\theta}\times\boldsymbol{r}_N) = V(\boldsymbol{r}_1,\ \boldsymbol{r}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{r}_N), \tag{5B}$$

where the symbol $\times$ means outer product.

(a) Show that the total angular momentum

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \times m_i \frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt}$$

is conserved, namely, $d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{0}$. If necessary, use $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})$.

(b) When $\boldsymbol{L}$ is independent of the choice of the origin, show the condition which the motion of the system has to satisfy. Here, assume that V also satisfies Eq. (5A) and, therefore, that $d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{0}$ for an arbitrary origin.

2019年 3月実施
問題6 数学基礎
(1頁目／2頁中)

(1) 関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}$$

について考える．ただし，x は実数であり，σ は $\sigma > 0$ を満たす実定数である．次の問に答えよ．

(a) 関数 $f(x)$ の概形を描け．

(b) 関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(w)$ を求めよ．

(c) 関数 $F(w)$ の概形を描け．

(2) 行列

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 7 \\ 7 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

と

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

について考える．次の問に答えよ．

(a) 行列 A の行列式を求めよ．

(b) A^{-1} を求めよ．

(c) 行列 B のすべての固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めよ．

2019年 3月実施
問題6 数学基礎
(2頁目／2頁中)

(1) Consider the function

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}.$$

Here x is a real number, and σ is a real constant satisfying $\sigma > 0$.
Answer the following questions.

(a) Sketch the function $f(x)$.

(b) Find the Fourier transform $F(w)$ of the function $f(x)$.

(c) Sketch the function $F(w)$.

(2) Consider the matrices

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 & 7 \\ 7 & 1 & 7 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 7 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix},$$

and

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(a) Compute the determinant of the matrix A.

(b) Compute A^{-1}.

(c) Compute all the eigenvalues and their corresponding eigenvectors of the matrix B.