2020 年 3 月実施
問題 1　電磁気学
(1頁目／3 頁中)

Fig. 1(a), Fig. 1(b)に示すように，誘電率 ε の誘電体が真空と平面で接している系を考える．平面電磁波が異なる誘電体媒質間の境界に対して垂直に入射すると，電磁波の一部は透過し，残りは境界面で反射され，このとき反射率 r と透過率 t はそれぞれ，入射波(複素電界 $\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$, 複素磁界 $\boldsymbol{H}_\mathrm{i}$)に対する反射波(複素電界 $\boldsymbol{E}_\mathrm{r}$, 複素磁界 $\boldsymbol{H}_\mathrm{r}$)と透過波(複素電界 $\boldsymbol{E}_\mathrm{t}$, 複素磁界 $\boldsymbol{H}_\mathrm{t}$)の電力密度の比で与えられる．図中の矢印は電磁波の進行方向を示しており，x, y, z 軸をFig.1(a)のように定義する．また，電磁波の角周波数を ω, x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, $\hat{\boldsymbol{z}}$ とし，系に真電荷，導電電流は無いものとする．真空の誘電率を ε_0, 透磁率を μ_0 とし，誘電体は x, y 方向に十分大きく，その透磁率は真空の透磁率 μ_0 と等しいとする．以下の問に答えよ．

(1) 異なる誘電体媒質の境界面における電界，磁界の境界条件を述べよ．

(2) Fig.1(a)に示すように，z 方向に無限の厚みを有する誘電体が $z = 0$ で真空と接しており，入射波，反射波，透過波の複素電界は次式で表されるとする．

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{i} = E_\mathrm{i} e^{-jk_0 z}\,\hat{\boldsymbol{x}}$$
$$\boldsymbol{E}_\mathrm{r} = E_\mathrm{r} e^{jk_0 z}\,\hat{\boldsymbol{x}}$$
$$\boldsymbol{E}_\mathrm{t} = E_\mathrm{t} e^{-jkz}\,\hat{\boldsymbol{x}}$$

ただし，k_0 と k はそれぞれ真空中と誘電体中の電磁波の波数であり，$k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}$で与えられる．

(a) 入射波の複素磁界 $\boldsymbol{H}_\mathrm{i}$ を求めよ．

(b) $E_\mathrm{r}, E_\mathrm{t}, r, t$ を，$E_\mathrm{i}, \varepsilon_0, \varepsilon$ を用いて表せ．

(3) Fig.1(b)に示すように，真空中に有限な厚み L の誘電体板が設置されている．$z = 0$ と $z = L$ における二つの境界面において電磁波の反射，透過が起こり，入射波の一部が Fig.1(b)中の右側の真空領域へ透過するものとする．Fig.1(b)中の入射波と透過波の電力密度の比で与えられる透過率が，最大，最小となる厚み L を求めよ．

Consider the systems shown in Fig. 1(a) and Fig. 1(b), where dielectrics of permittivity ε and a vacuum are in contact at a plane. When a plane electromagnetic wave is normally incident on the boundary between different dielectric materials, a portion of the electromagnetic wave is transmitted and the rest is reflected at the boundary; then the reflectivity r and the transmittance t are given by the ratios of the power densities of the reflected (the complex electric field $\boldsymbol{E}_\mathrm{r}$, the complex magnetic field

2020 年 3 月実施
問題 1　電磁気学
（2頁目／3 頁中）

$\boldsymbol{H}_{\mathrm{r}}$) and transmitted (the complex electric field $\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$, the complex magnetic field $\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}$) waves to that of the incident wave (the complex electric field $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$, the complex magnetic field $\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}$), respectively. Arrows in the figures indicate the propagation directions of the electromagnetic waves, and the x, y, and z axes are defined as shown in Fig. 1(a). Here the angular frequency of the electromagnetic wave is given by ω, the unit vectors in the x, y, and z directions are defined as $\hat{\boldsymbol{x}}$, $\hat{\boldsymbol{y}}$, and $\hat{\boldsymbol{z}}$, respectively, and no true charge and no conductive current exist in the system. The permittivity and the permeability of the vacuum are given as ε_0 and μ_0, respectively; the dielectric is sufficiently large in the x and y directions, and the permeability of the dielectric is equal to that of the vacuum, i.e., μ_0. Answer the following questions.

(1) Describe the boundary conditions of the electric and magnetic fields at the boundary between two different dielectric media.

(2) As shown in Fig. 1(a), a dielectric having an infinite thickness in the z direction and a vacuum are in contact at $z = 0$, the complex electric fields $\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}}$, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}}$, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}}$ of the incident, reflected, and transmitted waves are given by

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{i}} = E_{\mathrm{i}} e^{-jk_0 z}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,,$$
$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{r}} = E_{\mathrm{r}} e^{jk_0 z}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,,$$
$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{t}} = E_{\mathrm{t}} e^{-jkz}\,\hat{\boldsymbol{x}}\,,$$

respectively. Here k_0 and k are the wavenumbers of the electromagnetic waves in the vacuum and the dielectric, respectively, being given as $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ and $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}$.

(a) Find the complex magnetic field $\boldsymbol{H}_{\mathrm{i}}$ of the incident wave.

(b) Express E_{r}, E_{t}, r, and t in terms of E_{i}, ε_0, and ε.

(3) As shown in Fig. 1(b), a dielectric plate having a finite thickness L is located in a vacuum. The reflection and the transmission of the electromagnetic wave occur at both the two boundaries at $z = 0$ and $z = L$; then a portion of the incident wave is transmitted into the vacuum region on the right-hand side in Fig. 1(b). Find the thicknesses L that give the maximum and minimum transmittances, where the transmittance is defined as the ratio of the power density of the transmitted wave to that of the incident wave shown in Fig.1(b).

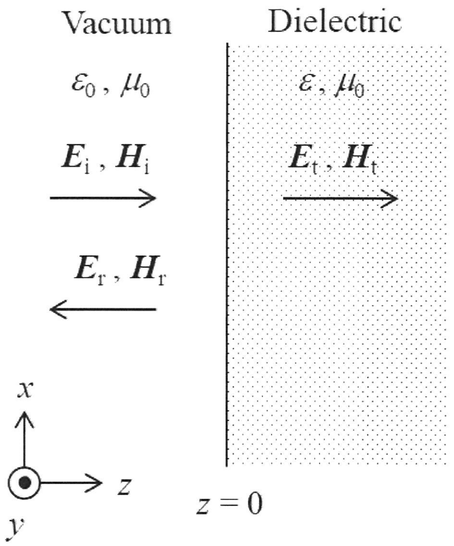
Vacuum
Dielectric
ε_0, μ_0
ε, μ_0
$\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$, $\boldsymbol{H}_\mathrm{i}$
$\boldsymbol{E}_\mathrm{t}$, $\boldsymbol{H}_\mathrm{t}$
$\boldsymbol{E}_\mathrm{r}$, $\boldsymbol{H}_\mathrm{r}$
x
z
y
$z = 0$

Fig. 1(a)

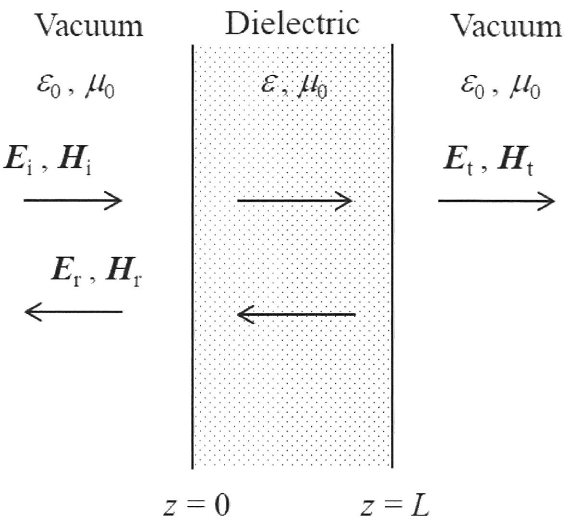
Vacuum
Dielectric
Vacuum
ε_0, μ_0
ε, μ_0
ε_0, μ_0
$\boldsymbol{E}_\mathrm{i}$, $\boldsymbol{H}_\mathrm{i}$
$\boldsymbol{E}_\mathrm{t}$, $\boldsymbol{H}_\mathrm{t}$
$\boldsymbol{E}_\mathrm{r}$, $\boldsymbol{H}_\mathrm{r}$
$z = 0$
$z = L$

Fig. 1(b)

2020 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(1 頁目／3 頁中)

(1) Fig. 2(a) に示す回路について以下の問に答えよ．E はフェーザ電圧である．また，分布定数線路は無損失であるとし，その分布定数線路の長さ，特性インピーダンス，位相定数をそれぞれ l, Z_0, β とする．

(a) 端子対 (2-2') での反射係数を Z_0, Z を用いて表せ．

(b) $Z = aZ_0$ のとき，端子対 (1-1') から見たインピーダンス Z_{in}を求めよ．ここで，a, Z_0 は正の実数とし，$a \neq 1$とする．さらに，Z_{in} が実数となる l を求めよ．

(c) $R_0 = 10\,\Omega$, $Z_0 = 50\,\Omega$, $Z = 50\,\Omega$ とする．Zにおける消費電力が 0.5 W であるとき，$|E|$ の値を求めよ．

(2) Fig. 2(b) に示す回路について以下の問に答えよ．電圧源 $e(t)$ は

$$e(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E_0 & (0 \le t < t_1) \\ 0 & (t_1 \le t) \end{cases}$$

で与えられる．ここで，E_0 は正の実数である．$t < 0$ において回路を流れる電流を 0 とする．

(a) $0 \le t < t_1$ における電圧 $v_L(t)$ を求めよ．

(b) $t \ge t_1$ における $v_L(t)$ を求めよ．

(c) $t_1 = 10L/R$ のとき，$0 < t < 2t_1$ における $v_L(t)$ の概形を描け．

2020 年 3 月実施
問題 2　電気回路

(1) Answer the following questions about the circuit shown in Fig. 2(a). E is a phasor voltage. Assume that the transmission line is lossless, and the length, the characteristic impedance, and the phase constant of the transmission line are l, Z_0, and β, respectively.

(a) Express the reflection coefficient at the terminal pair (2-2') in terms of Z_0 and Z.

(b) Find the impedance Z_{in} seen from the terminal pair (1-1') when $Z = aZ_0$. Here, a and Z_0 are positive real numbers and $a \neq 1$. Also, find l such that Z_{in} is a real number.

(c) Let $R_0 = 10\ \Omega$, $Z_0 = 50\ \Omega$, and $Z = 50\ \Omega$. Find the value of $|E|$ when the electric power dissipated in Z is 0.5 W.

(2) Answer the following questions about the circuit shown in Fig. 2(b). The voltage source $e(t)$ is given by

$$e(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ E_0 & (0 \leq t < t_1) \\ 0 & (t_1 \leq t) \end{cases} .$$

Here, E_0 is a positive real number. The current in the circuit is 0 for $t < 0$.

(a) Find the voltage $v_L(t)$ for $0 \leq t < t_1$.

(b) Find $v_L(t)$ for $t \geq t_1$.

(c) Sketch the graph of $v_L(t)$ for $0 < t < 2t_1$ when $t_1 = 10L/R$.

2020 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(3 頁目／3 頁中)

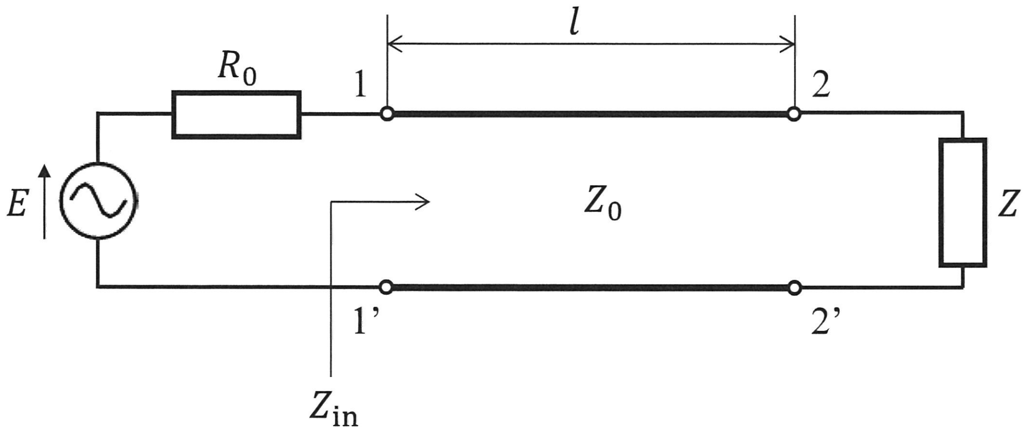

Fig. 2(a)

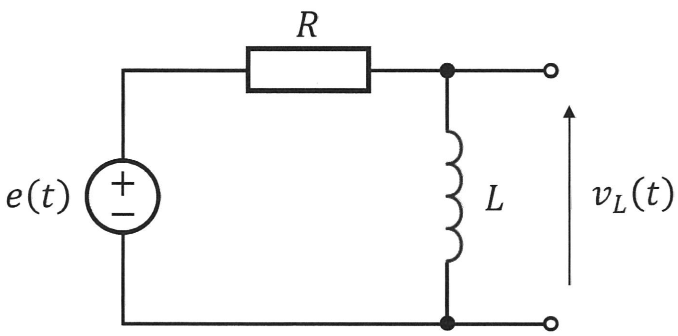

Fig. 2(b)

2020 年 3 月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／1頁中)

論理変数 $x, y, z, a, b \in \{0, 1\}$ とし，$\cdot$，$+$，$\overline{}$ は，それぞれ，論理積演算，論理和演算，否定演算とする．n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の変数を任意に置換しても f の値が変化しないとき，f は対称関数と言う．また，n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の各変数 x_i に対して f が単調増大または単調減少するとき，f はユネイト関数と言う．以下の問に答えよ．

(1) $f_1(x, y, z) = \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot \overline{z}$ が対称関数であるか否か，および，ユネイト関数であるか否かを判定し，根拠とともに示せ．

(2) n 個の変数のうち，k 個 $(0 \leq k \leq n)$ が 1 であるときのみ関数値が 1 となる n 変数論理関数を基本対称関数と言う．以下の問に答えよ．

   (a) 3 変数論理関数 $f(x, y, z)$ の基本対称関数を全て示せ．

   (b) 3 変数多数決関数 $M(x, y, z)$ を，問 (2)(a) で答えた基本対称関数の論理和で示せ．ここでの多数決関数は，x, y, z の変数のうち，2 つ，または 3 つに 1 が入力された場合に 1 を出力し，それ以外には 0 を出力するものである．

(3) 以下の命題が真か偽か根拠とともに判定せよ．

   (a) 対称でかつ n 変数全てで単調増大する n 変数論理関数は全部で $n+1$ 個ある．

   (b) 3 変数論理関数 $f_2(x, y, z)$ が x に対して単調増大する場合，以下が成り立つ．
   $f_2(a \cdot b, y, z) = f_2(a, y, z) \cdot f_2(b, y, z)$.

Consider $x, y, z, a, b \in \{0, 1\}$. AND, OR, and NOT operators are denoted by $\cdot$, $+$, $\overline{}$, respectively. An n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is symmetric if it is unchanged by any permutation of its variables. An n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is unate if it is either monotonically increasing or decreasing for its each variable x_i. Answer the following questions.

(1) Determine whether $f_1(x, y, z) = \overline{x} \cdot z + x \cdot \overline{y} + \overline{x} \cdot y \cdot \overline{z} + x \cdot y \cdot \overline{z}$ is symmetric and whether it is unate, and justify your answers.

(2) The n-variable Boolean function that shows true only when the number of its positive inputs is k $(0 \leq k \leq n)$ is called an elementary symmetric function. Answer the following questions.

   (a) Show all the elementary symmetric functions for a 3-variable Boolean function $f(x, y, z)$.

   (b) Express a 3-variable majority function $M(x, y, z)$ using the sum of the elementary symmetric functions answered at question (2)(a). Here, the majority function outputs true when two or three inputs are positive, and false otherwise.

(3) Determine whether each of the following assertions is true or false, and justify your answer.

   (a) The total number of n-variable Boolean functions that are symmetric and monotonically increasing for their all variables is $n + 1$.

   (b) When a 3-variable Boolean function $f_2(x, y, z)$ is monotonically increasing for x, the following equation holds. $f_2(a \cdot b, y, z) = f_2(a, y, z) \cdot f_2(b, y, z)$.

2020 年 3 月実施
問題4 情報基礎2
(1頁目／3頁中)

$\boldsymbol{A}$ を n 個の実数からなる配列とする．ただし，$\boldsymbol{A}$ は，値の重複がなく昇順に整列されている．$\boldsymbol{X}$ を k 個の実数からなる配列とする．ただし，$1 \leq k \leq n$ である．また，a_i と x_j をそれぞれ $\boldsymbol{A}$ の i 番目の要素および $\boldsymbol{X}$ の j 番目の要素とする．ここで，以下の最適化問題 P を考える．

$$P : \min_{\boldsymbol{X}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \min_{1 \leq j \leq k} (a_i - x_j)^2 \right\}$$

なお，P の解を与える $\boldsymbol{X}$ を $\widehat{\boldsymbol{X}}$ とする．また，$1 \leq \ell \leq m \leq n$ のとき，$V_{\ell,m}$ を以下のように定義する．

$$V_{\ell,m} = \sum_{i=\ell}^{m} (a_i - \mu_{\ell,m})^2 \qquad \mu_{\ell,m} = \frac{1}{m - \ell + 1} \sum_{i=\ell}^{m} a_i$$

以下の問に答えよ．

(1) $k = 1$，つまり，$\widehat{\boldsymbol{X}} = (\widehat{x}_1)$ のとき，$\widehat{x}_1$ を a_i を用いて示せ．

(2) $k = n$ のとき，P の解を示せ．

(3) $k = 2$ のとき，P の解を得る手順を $V_{1,j-1}$ と $V_{j,n}$ を用いて示せ．

(4) 再帰関数 $D_{\ell,m}$ を以下のように定義する．

$$D_{\ell,m} = \begin{cases} V_{1,m} & \text{if } \ell = 1 \\ \min\limits_{\ell \leq i \leq m} \{D_{\ell-1,i-1} + V_{i,m}\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

このとき，P の解は $D_{k,n}$ により計算できる．

(a) $k = 3$ かつ $\boldsymbol{A} = (1, 5, 6, 8, 10)$ とする．Fig. 4 にある表の空欄を埋める形式で $D_{\ell,m}$ の計算結果を示せ（斜線のあるセルの計算は不要）．ただし，各値は小数第二位まで示せ．

(b) 上記再帰関数には，$\widehat{\boldsymbol{X}}$ を得る手順は含まれていない．$\widehat{\boldsymbol{X}}$ を得るために必要な追加の手順を簡潔に述べよ．

Let $\boldsymbol{A}$ be an array of n real numbers, where $\boldsymbol{A}$ is sorted in ascending order without duplicate values. Let $\boldsymbol{X}$ be an array of k real numbers, where $1 \leq k \leq n$. Moreover, a_i and x_j denote the i-th element in $\boldsymbol{A}$ and j-th element in $\boldsymbol{X}$, respectively. Here, we consider the following optimization problem P.

$$P : \min_{\boldsymbol{X}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \min_{1 \leq j \leq k} (a_i - x_j)^2 \right\}$$

Note that $\widehat{\boldsymbol{X}}$ represents $\boldsymbol{X}$ that provides the solution of P. Moreover, $V_{\ell,m}$, where $1 \leq \ell \leq m \leq n$, is defined as follows.

$$V_{\ell,m} = \sum_{i=\ell}^{m} (a_i - \mu_{\ell,m})^2 \qquad\qquad \mu_{\ell,m} = \frac{1}{m - \ell + 1} \sum_{i=\ell}^{m} a_i$$

Answer the following questions.

(1) Suppose $k = 1$, namely, $\widehat{\boldsymbol{X}} = (\widehat{x}_1)$. Give $\widehat{x}_1$ in terms of a_i.

(2) Suppose $k = n$. Give the solution of P.

(3) Suppose $k = 2$. Outline a procedure that finds the solution of P by using $V_{1,j-1}$ and $V_{j,n}$.

(4) The recursive function $D_{\ell,m}$ is defined as follows.

$$D_{\ell,m} = \begin{cases} V_{1,m} & \text{if } \ell = 1 \\ \min\limits_{\ell \leq i \leq m} \{D_{\ell-1,i-1} + V_{i,m}\} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Then, the solution of P can be calculated by $D_{k,n}$.

(a) Suppose $k = 3$ and $\boldsymbol{A} = (1, 5, 6, 8, 10)$. Give the calculation results of $D_{\ell,m}$ in a format filling the empty cells in the table shown in Fig. 4 (the calculation for the cells with a diagonal line is not necessary). Here, each value must be displayed to two decimal places.

(b) The above recursive function does not contain the procedure to obtain $\widehat{\boldsymbol{X}}$. Concisely explain the extra procedure required to obtain $\widehat{\boldsymbol{X}}$.

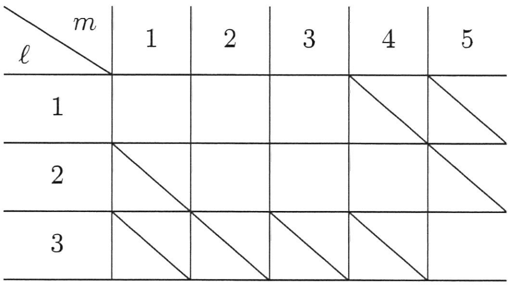

Fig. 4

2020 年 3 月実施
問題５　物理基礎
（１頁目／３頁中）

Fig. 5 に示すように，半径a，質量 M の一様な密度の球が水平な床の点 O に静止している．床面は直行座標系における$x-y$平面と並行である．球は玉突き棒による撃力 F によって初速vでx軸に平行に転がり，点 A の床に垂直な高さdの段差に衝突する運動を考える．撃力 F はx軸に平行に矢印で示すように点 Q に作用する．点 Q は球の中心 P から垂直方向にhだけ高い球の表面上にある．また点 Q は点 O，P，A，B を通り床面に垂直な平面内にある．ただし，$a > d$であり，鉛直下向きの重力加速度をgとする．また，球の転がり抵抗と空気抵抗は無視でき，紙面奥行方向（y軸）の運動はないものとする．

(1) 球の中心 P を通る固定軸のまわりの慣性モーメントIが，$I = 2Ma^2/5$で表せることを示せ．

(2) 玉突き棒が撃力 F を球に与えるとき，球が滑らずに転がるhの条件を求めよ．

(3) 球が段差を乗り越えるとき，球は点 B を中心にした回転運動をはじめる．このときの球の慣性モーメントI'を求めよ．ただし，球は段差を乗り越えるまで点 B を離れないとする．

(4) 球が高さdの段差を乗り越えるために必要な球の初速vを求めよ．

2020 年 3 月実施
問題５　物理基礎

As shown in Fig. 5, a sphere with radius a, mass M, and uniform density is stationary at point O on a horizontal floor. The floor is parallel to the $x-y$ plane in the cartesian coordinate system. Consider the motion of the sphere rolling along a line parallel to the x-axis at an initial speed v due to an impulsive force F applied by a cue, and collision with a vertical step with height d at point A. The impulsive force F is applied parallel to the x-axis at point Q as shown by the arrow. Point Q is on the surface of the sphere and is a vertical distance h above the center of the sphere P. Point Q is in a vertical plane passing through points O, P, A, and B. Note that $a > d$ and the vertical downward gravitational acceleration is g. The rolling resistance and air resistance are negligible, and movement in the depth direction of the paper (y-axis) is not considered.

(1) Show the moment of inertia of the sphere I about its axis through the center of the sphere P is given by $I = 2Ma^2/5$.

(2) When the cue applies the impulsive force F to the sphere, find the condition of h for the sphere to roll without slipping.

(3) When the sphere gets over the step, the sphere starts rotating around point B. Find the moment of inertia of the sphere I' as it rotates around point B. The sphere does not leave from point B until it gets over the step.

(4) Find the initial speed of the sphere v needed to get over the step with height d.

2020 年 3 月実施
問題５　物理基礎
（３頁目／３頁中）

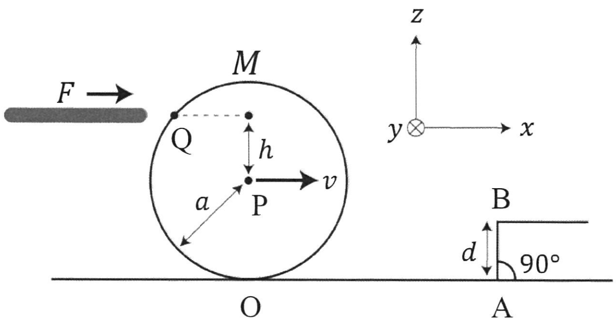

Fig. 5

2020 年 3 月実施
問題 6　数学基礎
(1 頁目／2 頁中)

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ について考える．以下の問いに答えよ．

(a) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(b) A^n を求めよ．ただし，n は非負の整数である．

(c) $\exp(A)$を求めよ．ここで,

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$$

である．ただし，I は A と同次数の単位行列である．

(2) 複素変数 z の関数

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2}$$

について考える．C_1 および C_2 は以下のように定義された積分路である．

$$C_1: z = t \qquad (-R \le t \le +R)$$
$$C_2: z = Re^{it} \qquad (0 \le t \le \pi)$$

ただし，t は媒介変数，a と R は $a > 0$ および $R > 0$ を満たす実数である．i は虚数単位である．以下の問いに答えよ．

(a) $f(z)$ の無限遠点を除くすべての孤立特異点とその留数を求めよ．

(b) $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_2} f(z)dz = 0$ となることを示せ．

(c) 実定積分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2 + a^2} dx$$

の値を求めよ．

2020 年 3 月実施
問題 6　数学基礎
(2 頁目／2 頁中)

(1) Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Answer the following questions.

(a) Find all the eigenvalues and their corresponding eigenvectors of the matrix A.

(b) Find A^n. Here, n is a nonnegative integer.

(c) Find $\exp(A)$. Here

$$\exp(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n,$$

and I is the identity matrix with the same order as A.

(2) Consider the function

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2},$$

of a complex variable z. C_1 and C_2 are the integral path defined as follows:

$$C_1 : z = t \qquad (-R \le t \le +R),$$
$$C_2 : z = Re^{it} \qquad (0 \le t \le \pi).$$

Here, t is a parameter, a and R are real numbers satisfying $a > 0$ and $R > 0$, respectively. i denotes the imaginary unit. Answer the following questions.

(a) Find all the isolated singular points except for the infinity point of $f(z)$ and find their corresponding residues.

(b) Show that $\lim_{R \to +\infty} \int_{C_2} f(z)dz = 0$.

(c) Find the value of the real definite integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2 + a^2} dx.$$