2020年 8月実施
問題1　電磁気学
(1頁目／4頁中)

Fig. 1に示す同心球状コンデンサを考える．内球と外球殻はいずれも完全導体である．内球と外球殻の中心が座標系の原点である．位置ベクトルは $\boldsymbol{r}$ で，その大きさは $r = |\boldsymbol{r}|$ である．内球の半径は a であり，外球殻の半径は b である．内球は正に帯電しており，その電荷は $+Q$ である．外球殻は負に帯電しており，その電荷は $-Q$ である．同心球状コンデンサ内部の $r = a$ から $r = a + t$ までは誘電体球殻が装荷されており，その誘電率は ε_1 である．誘電体球殻を除く同心球状コンデンサ内部の媒質は真空であり，その誘電率は ε_0 である．外球殻の厚みは無視できるほど小さいものとする．以下の問に答えよ．

(1) 静電界におけるガウスの法則を数式で表し，その物理的意味を説明せよ．

(2) 静電界 $\boldsymbol{E}$ においては，$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ が常に成り立つ．ストークスの定理を用いてこの式の積分形を求め，その物理的意味を説明せよ．

(3) 同心球状コンデンサ内部 $(a \leq r \leq b)$ の電界の大きさと向きを求めよ．

(4) 同心球状コンデンサの静電容量 C が，以下のように表されることを示せ．

$$C = \frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+t}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{a+t} - \frac{1}{b})}$$

(5) 同心球状コンデンサ内部 $(a \leq r \leq b)$ の静電エネルギー密度を求めよ．

(6) 同心球状コンデンサの静電エネルギーを求めよ．

(7) 内球や誘電体球殻に影響を与えることなく，外球殻の半径が $b + \Delta b$ $(\Delta b \ll b)$ に増加したとする．同心球状コンデンサ内部の静電エネルギーの変化量を求めよ．

2020年 8月実施
問題1　電磁気学
(2頁目／4頁中)

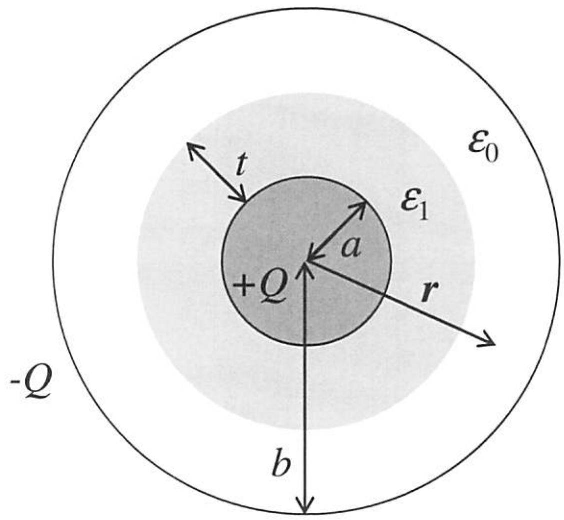

Fig. 1

Let us consider a concentric spherical-shaped capacitor, as shown in Fig. 1. Both the internal sphere and the external spherical shell are perfect electrical conductors. The center of the internal sphere and the external spherical shell is the coordinate origin. A position vector is $\boldsymbol{r}$ and its magnitude is $r = |\boldsymbol{r}|$. The radius of the internal sphere is a and the radius of the external spherical shell is b. The internal sphere is positively charged and its charge is $+Q$. The external spherical shell is negatively charged and its charge is $-Q$. A dielectric spherical shell is located from $r = a$ to $r = a + t$ inside the concentric spherical-shaped capacitor and its permittivity is ε_1. The medium inside the concentric spherical-shaped capacitor, except for the dielectric spherical shell is vacuum and its permittivity is ε_0. The thickness of the external spherical shell is negligibly small. Answer the following questions.

(1) Show the equation of Gauss's law for electrostatic fields and give its physical meaning.

(2) The equation $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$ always holds for electrostatic fields $\boldsymbol{E}$. Find the integral form of the equation using Stokes's theorem and give its physical meaning.

(3) Find the magnitudes and directions of the electric fields inside the concentric spherical-shaped capacitor ($a \leq r \leq b$).

(4) Show that the electrostatic capacitance of the concentric spherical-shaped capacitor is,

$$C = \frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+t}) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{a+t} - \frac{1}{b})}$$

(5) Find the electrostatic energy density inside the concentric spherical-shaped capacitor ($a \leq r \leq b$).

(6) Find the electrostatic energy of the concentric spherical-shaped capacitor.

(7) The radius of the external spherical shell increases to $b + \Delta b$ ($\Delta b \ll b$) without affecting the internal sphere and the dielectric spherical shell. Find the variation of the electrostatic energy inside the concentric spherical-shaped capacitor.

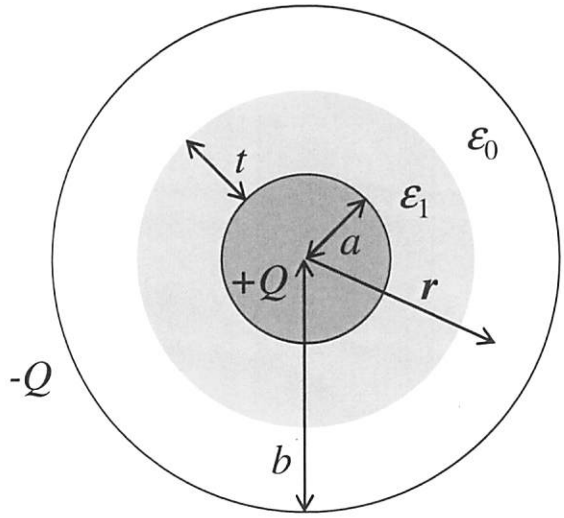

Fig. 1

2020年8月実施
問題2　電気回路
(1頁目／4頁中)

(1) Fig. 2(a)に示す損失のある分布定数線路（特性インピーダンス Z_0，伝送定数 γ，長さ l）が負荷インピーダンス Z_r で終端されている際のインピーダンス Z_{in} を求めよ．ただし γ は複素数である．また上記分布定数線路が無損失分布定数線路（位相定数 β）である場合，同様に負荷インピーダンス Z_r で終端されている際のインピーダンス Z_{in} を求めよ．

(2) Fig. 2(b)に示すコンデンサ（静電容量 C）のインピーダンスと Fig. 2(c)に示す終端開放の無損失分布定数線路（特性インピーダンス Z_0，位相定数 β）のインピーダンス Z_{in} が等しいとして，線路長 l_x を求めよ．ただし入力端子(0-0')に接続される正弦波交流電源の角周波数を ω とする．

(3) Fig. 2(d)に示すように，1段の1/4波長無損失分布定数線路（特性インピーダンス Z_{01}，位相定数 β）を無損失分布定数線路（特性インピーダンス Z_0，位相定数 β，長さ l）と負荷抵抗（実数 R）との間に挿入することにより接続点(1-1')におけるインピーダンスを整合したい．Z_{01}，Z_0，R の関係式を導け．

(4) Fig. 2(e)に示すように，2段の1/4波長無損失線路（特性インピーダンス Z_{02}，Z_{03}，位相定数 β）を無損失分布定数線路（特性インピーダンス Z_0，位相定数 β，長さ l）と負荷抵抗（実数 R）との間に挿入することにより接続点(2-2')におけるインピーダンスを整合したい．Z_{02}, Z_{03}，Z_0，R の関係式を導け．また負荷抵抗 R と特性インピーダンス Z_0 が大きく異なる場合に，1/4波長無損失線路の段数を増やすことによる効果をスミスチャート等を参考にして説明せよ．

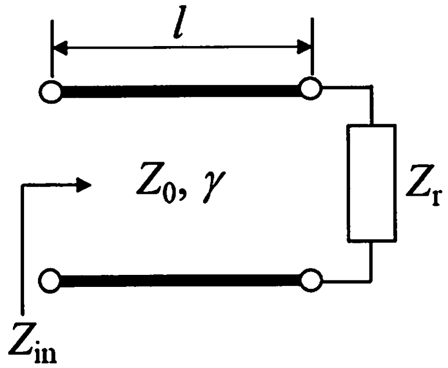

Fig. 2(a)

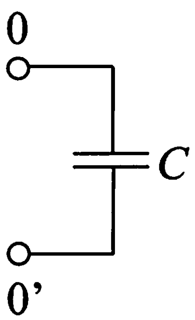

Fig. 2(b)

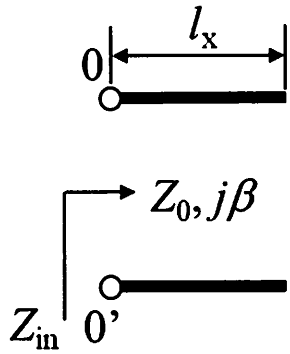

Fig. 2(c)

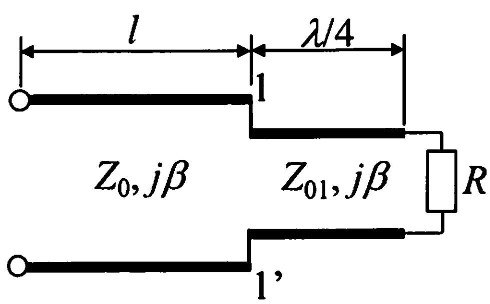

Fig. 2(d)

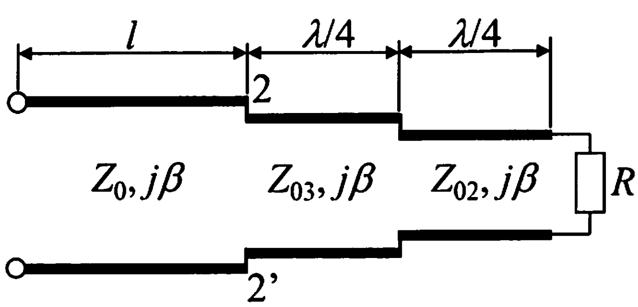

Fig. 2(e)

2020年8月実施
問題2　電気回路
(3頁目／4頁中)

(1) As shown in Fig. 2(a), the distributed constant line (characteristic impedance Z_0, propagation constant γ, and length l) is terminated by the load impedance Z_r. The distributed constant line has loss, and the γ is complex number. Find the impedance Z_{in}. In addition, if the distributed constant line is lossless (phase constant β) and the line is terminated by the load impedance Z_r, find the impedance Z_{in}.

(2) When the impedance of the capacitor (capacitance C) shown in Fig. 2(b) is equal to the impedance Z_{in} of the open-ended lossless distributed constant line (characteristic impedance Z_0, phase constant β) shown in Fig. 2(c), find the line length l_x. The angular frequency of the input sinusoidal AC source at the connection point (0-0') is ω.

(3) As shown in Fig. 2(d), we want to match the impedance at the connection point (1-1') by inserting the one-stage 1/4 wavelength lossless distributed constant line (characteristic impedance Z_{01}, phase constant β) between the lossless distributed constant line (characteristic impedance Z_0, phase constant β, length l) and a load resistance (real number R). Derive the relational expression of Z_{01}, Z_0, and R.

(4) As shown in Fig. 2(e), we want to match the impedance at the connection point (2-2') by inserting two 1/4 wavelength lossless distributed constant lines (characteristic impedance Z_{02} and Z_{03}, phase constant β) between the lossless distributed constant line (characteristic impedance Z_0, phase constant β, length l) and a load resistance (real number R). Derive the relational expression of Z_{02}, Z_{03}, Z_0, and R. If the load resistance R and the characteristic impedance Z_0 differ greatly, describe the effect of increasing the number of the 1/4 wavelength lossless distributed constant lines using a Smith chart and so on.

2020 年 8 月実施
問題 2　電気回路

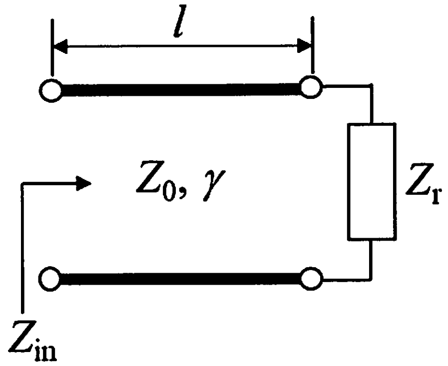

Fig. 2(a)

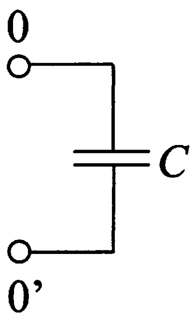

Fig. 2(b)

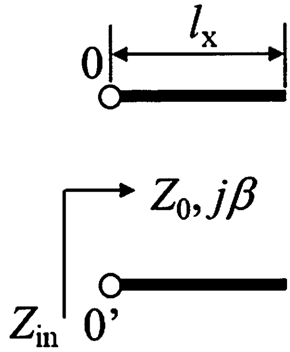

Fig. 2(c)

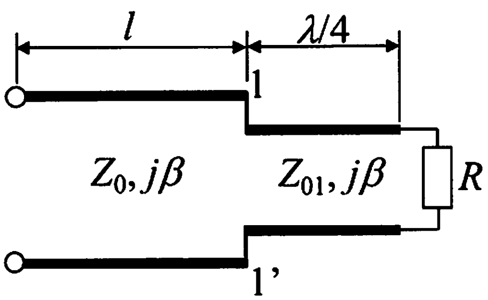

Fig. 2(d)

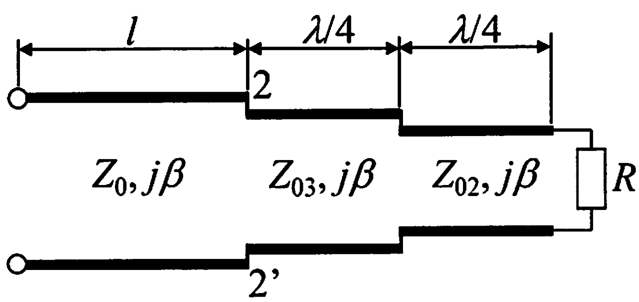

Fig. 2(e)

2020年 8月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／1頁中)

$x, y, z, w, c_0, c_1 \cdots c_n, c_{12}, x_1, x_2 \cdots x_n \in \{0,1\}$ とし，$\cdot$，$+$，$\oplus$，$\overline{\ }$ は，それぞれ論理積演算，論理和演算，排他的論理和演算，否定演算である．以下の問に答えよ．

(1) クワイン･マクラスキー法により，$\overline{x}\cdot y\cdot \overline{z}\cdot \overline{w}+\overline{x}\cdot y\cdot \overline{z}\cdot w+x\cdot y\cdot \overline{z}\cdot \overline{w}+x\cdot y\cdot \overline{z}\cdot w+x\cdot \overline{y}\cdot \overline{z}\cdot w+x\cdot \overline{y}\cdot z\cdot w$ を簡単化せよ．簡単化の過程も示すこと．

(2) 正リテラルのみからなる積項を排他的論理和で結合して表した式を環和（リードマラー）標準形という．また，n 変数論理関数の環和標準形において，2次以上の積項を含まないとき，つまり，$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = c_0 \oplus c_1 \cdot x_1 \oplus c_2 \cdot x_2 \oplus \cdots \oplus c_n \cdot x_n$ と書けるとき，f は線形関数という．例えば，2変数論理関数の環和標準形は，$f(x, y) = c_0 \oplus c_1 \cdot x \oplus c_2 \cdot y \oplus c_{12} \cdot x \cdot y$ であり，$c_{12} = 0$ のときに f は線形関数となる．

  (a) 以下の論理関数が線形関数であるか否かを根拠とともに答えよ．
    (i) $f_1(x,y,z) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z + \overline{x}\cdot y\cdot z + x\cdot\overline{y}\cdot z$
    (ii) $f_2(x,y,z) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z + x\cdot y\cdot\overline{z} + x\cdot y\cdot z$

  (b) n 変数論理関数の中で線形関数は 2^{n+1} 個存在するか否かを根拠とともに答えよ．

  (c) 3変数奇パリティ関数 $P(x,y,z)$ を，積和標準形で表した後，その式を環和標準形に変換せよ．その過程も示すこと．ここで，$P(x,y,z)$ は，奇数個の入力が1のときに1を出力し，それ以外には0を出力する．

Consider $x, y, z, w, c_0, c_1 \cdots c_n, c_{12}, x_1, x_2 \cdots x_n \in \{0,1\}$, and $\cdot$, $+$, $\oplus$, $\overline{\ }$ are AND, OR, EXOR and NOT operators, respectively. Answer the following questions.

(1) Simplify $\overline{x}\cdot y\cdot \overline{z}\cdot \overline{w}+\overline{x}\cdot y\cdot \overline{z}\cdot w+x\cdot y\cdot \overline{z}\cdot \overline{w}+x\cdot y\cdot \overline{z}\cdot w+x\cdot \overline{y}\cdot \overline{z}\cdot w+x\cdot \overline{y}\cdot z\cdot w$ using the Quine-McCluskey method, and also show its process.

(2) An EXOR synthesis of product terms of only positive literals is Ring-sum (Reed-Mullar) canonical form. If a n-variable Boolean function in this form does not include second or higher degree terms, meaning that $f(x_1, x_2 \cdots x_n) = c_0 \oplus c_1 \cdot x_1 \oplus c_2 \cdot x_2 \oplus \cdots \oplus c_n \cdot x_n$ is held, f is a linear function. For example, a 2-variable function in this form is $f(x,y) = c_0 \oplus c_1 \cdot x \oplus c_2 \cdot y \oplus c_{12} \cdot x \cdot y$, and f is a linear function when $c_{12} = 0$.

  (a) Determine whether each of the following functions is linear or not, and justify your answers.
    (i) $f_1(x,y,z) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z + \overline{x}\cdot y\cdot z + x\cdot\overline{y}\cdot z$
    (ii) $f_2(x,y,z) = \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z} + \overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z + x\cdot y\cdot\overline{z} + x\cdot y\cdot z$

  (b) Determine whether the number of linear functions of n-variable Boolean functions is 2^{n+1} or not, and justify your answer.

  (c) Show a sum-of-products canonical form of the 3-variable odd parity function $P(x,y,z)$, then transform the equation to the Ring-sum (Reed-Mullar) canonical form, and show its process. Here, $P(x,y,z)$ outputs 1 when an odd number of inputs is 1, and 0 otherwise.

2020年 8月実施
問題4 情報基礎2
(1頁目／4頁中)

数式を表すようなある種の木は，式木と呼ばれる．葉ノードが値を持ち，それ以外のノードが二項演算子を持つような，式木を考える．式木 T_L と T_R で表される二つの式の評価結果に演算子 op. を作用させるとき，全体の式木 T は Fig. 4 のように表される．値を持つ単一の葉ノードも式木とみなす．

以下の問に答えよ．

(1) 以下の式を表す式木を図示せよ．ただし，キャレット (^) はべき乗を表す．

$$(a+b) \times \{(x_0 - x_1)\hat{\ }2 + (y_0 - y_1)\hat{\ }2\}$$

(2) Fig. 4 の木を，T_L, T_R, 演算子 op. の順序で走査 (traverse) することを考える．式木に含まれるすべてのノードに同じ走査順序を適用することによって，各ノードが一度だけ訪問されるようにできる．各ノードは，訪問されたときに，保持している値または演算子を出力として表示する．各ノードは，子ノードが存在するときに，それらへのポインタを持つとする．

式木 T の根ノードが与えられたとき，T の木全体を走査するアルゴリズムを，擬似コードで表せ．

(3) P, Q に対する演算 op. は，通常は P op. Q のように中置記法で記される．これを P Q op. と並べ替えた表記は，後置記法と呼ばれる．ただし，並び替え後の P, Q のそれぞれは，値あるいは後置記法の式である．問 (1) の与式を後置記法に変換せよ．

(4) 問 (3) で得られた式を評価するアルゴリズムを，キューまたはスタックのいずれか適切なデータ構造を用いて，簡潔に説明せよ．

(5) 後置記法で示された以下の式は，構文誤りを一つ含む．この式に問 (4) のアルゴリズムを適用したとき，この構文誤りを検出する方法を，簡潔に説明せよ．

$$c\ d\ e\ +\ \times\ f\ +\ \times$$

また，もう一つの種類の構文誤りを含む式の例を挙げ，その誤りを検出する方法を，簡潔に説明せよ．

2020 年 8 月実施
問題4 情報基礎2
(2頁目／4頁中)

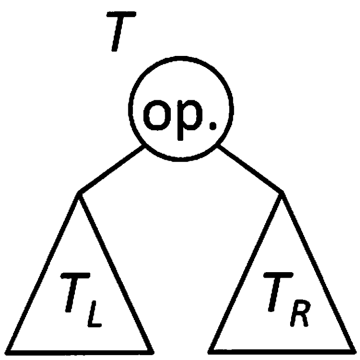

Fig. 4

A specific kind of tree used to represent mathematical expressions is called an expression tree. Consider an expression tree in which the leaf nodes have values and the other nodes have binary operators. An entire expression tree T is depicted in Fig. 4, where an operator op. is applied to the evaluation results of the two mathematical expressions represented by the expression trees T_L and T_R. A single leaf node containing a value is also considered as an expression tree.

Answer the following questions.

(1) Show schematically the expression tree representing the following mathematical expression, where caret (^) denotes an exponent.

$$(a+b) \times \{(x_0 - x_1)\hat{\ }2 + (y_0 - y_1)\hat{\ }2\}$$

(2) Consider traversing the expression tree in Fig. 4 in the order of T_L, T_R, and the operator op. Each node can be visited only once by applying the same traversal order to every node in an expression tree. Each node shows its value or operator as output when it is visited. Assume each node has pointers to its child nodes if they exist.

Considering that the root node of expression tree T is given, show an algorithm for traversing the entire tree of T by using a pseudo code.

(3) An operation op. on P, Q is normally written as P op. Q in infix notation. Its reordered notation as $P\ Q$ op. is called postfix notation, where each of P and Q after the reordering is a value or an expression in postfix notation. Translate the mathematical expression given in question (1) to postfix notation.

(4) Explain briefly an algorithm for evaluating the expression obtained in question (3) by using a queue or stack data structure whichever is appropriate.

(5) The following expression shown in postfix notation contains a syntax error. Explain briefly a method for detecting the error when the algorithm in question (4) is applied to this expression.

$$c\ d\ e\ +\ \times\ f\ +\ \times$$

In addition, show an example of expression containing another kind of syntax error and explain briefly a method for detecting the error.

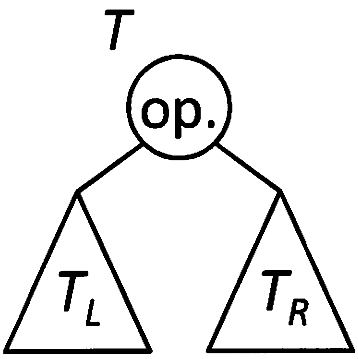

Fig. 4

2020 年 8 月実施
問題５　物理基礎
（１頁目／２頁中）

1 次元ポテンシャル$U(x)$上を運動する質量mの粒子を考える．$\alpha > 0$，$\beta > 0$とする．
以下の問に答えよ．

$$U(x) = \alpha\left(e^{-2\beta x} - 2e^{-\beta x}\right)$$

(1) ポテンシャル$U(x)$の概形を描け．

(2) ポテンシャル$U(x)$の最小値U_0を求めよ．また，粒子がとりうるエネルギーE_1の範囲を求めよ．

(3) 粒子の運動が周期的となるエネルギーE_2の範囲を求めよ．

(4) ポテンシャル$U(x)$における力のつり合い点x_0を求めよ．

(5) 問(4)で求めたx_0近傍における微小振動の周期を求めよ．

2020 年 8 月実施
問題５　物理基礎
（２頁目／２頁中）

Consider a particle with mass m that is moving in the following one-dimensional potential $U(x)$. Set $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Answer the following questions.

$$U(x) = \alpha\left(e^{-2\beta x} - 2e^{-\beta x}\right)$$

(1) Draw the outline of the potential $U(x)$.

(2) Find the minimum value U_0 of the potential $U(x)$. Then, find the allowed range of energy E_1 that the particle can take.

(3) Find the range of energy E_2 when the motion of the particle is periodic.

(4) Find the force equilibrium point x_0 in the potential $U(x)$.

(5) Find the time period of small oscillations about x_0 obtained in question (4).

2020 年 8 月実施
問題 6　数学基礎
(1 頁目／4 頁中)

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6a^3 & 5a^2 & 2a \end{pmatrix}$ について考える．ここで，$a > 0$ である．実数列 $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ が次の関係を満たすとする．

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}$$

以下の問に答えよ．

(a) A の逆行列を求めよ．

(b) A のすべての固有値と対応する固有ベクトルを求めよ．

(c) 任意の初期値 x_0，x_1，x_2 に対して $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ が成り立つとき，A の固有値が満たすべき条件を示せ．また，a が満たすべき条件を求めよ．

(2) 次に示す複素数 z の関数

$$f(z) = \frac{z}{z^3 + 1}$$

について考える．Fig. 6 に示すように，積分路 C_1，C_2，C_3 を以下のように定義する．

$$\begin{aligned} C_1: &\quad z = t & (0 \le t \le R) \\ C_2: &\quad z = R\exp(it) & \left(0 \le t \le \tfrac{2\pi}{3}\right) \\ C_3: &\quad z = t\exp\left(i\tfrac{2\pi}{3}\right) & (0 \le t \le R) \end{aligned}$$

ただし，t は媒介変数，i は虚数単位，R は $R > 1$ を満たす数である．また，

$$I_n = \int_{C_n} f(z)dz \qquad (n = 1, 2, 3)$$

とおく．以下の問に答えよ．

(a) 複素積分 $I_1 + I_2 - I_3$ の値を求めよ．

(b) $I_3 = I_1 \exp\left(i\frac{4\pi}{3}\right)$ が成り立つことを証明せよ．

(c) $\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$ が成り立つことを証明せよ．

(d) 実定積分 $I = \int_0^\infty f(x)dx$ の値を求めよ．

2020 年 8 月実施
問題 6　数学基礎
（2 頁目／4 頁中）

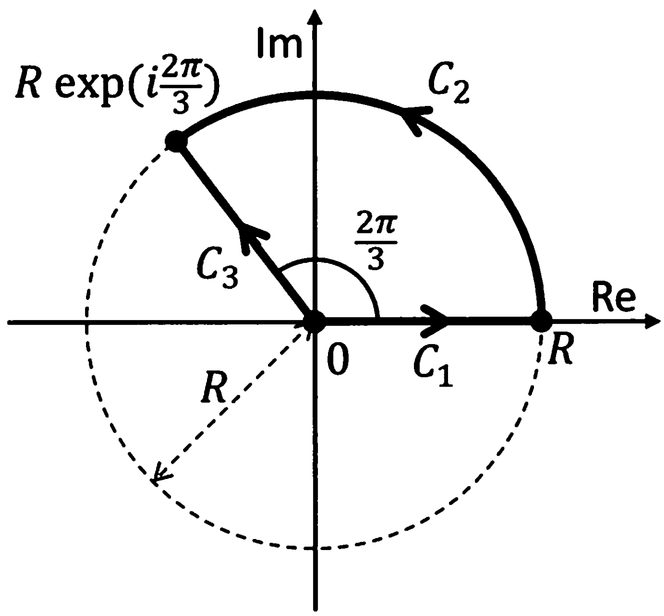

Fig. 6

2020 年 8 月実施
問題 6　数学基礎
(3 頁目／4 頁中)

(1) Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6a^3 & 5a^2 & 2a \end{pmatrix}$. Here $a > 0$. Let the real sequence $\{x_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ that satisfies the following relation be:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ x_{n+3} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions.

(a) Find the inverse matrix of A.

(b) Find all the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of A.

(c) When $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ for arbitrary initial values x_0, x_1, and x_2, show the condition that the eigenvalues of A must satisfy. Find the condition that a must satisfy.

(2) Consider the following function of a complex variable z:

$$f(z) = \frac{z}{z^3 + 1}.$$

As shown in Fig. 6, the integral paths C_1, C_2, and C_3 are defined as follows:

$$\begin{aligned} C_1 :&\quad z = t && (0 \le t \le R) \\ C_2 :&\quad z = R \exp\,(it) && \left(0 \le t \le \tfrac{2\pi}{3}\right) \\ C_3 :&\quad z = t \exp\left(i\tfrac{2\pi}{3}\right) && (0 \le t \le R). \end{aligned}$$

Here t is a parameter, i denotes the imaginary unit, and R is a number satisfying $R > 1$. And let

$$I_n = \int_{C_n} f(z)dz \qquad (n = 1,2,3).$$

Answer the following questions.

(a) Find the value of the complex integral $I_1 + I_2 - I_3$.

(b) Prove that $I_3 = I_1 \exp\left(i\frac{4\pi}{3}\right)$.

(c) Prove that $\lim_{R\to\infty} I_2 = 0$.

(d) Find the value of the real definite integral $I = \int_0^\infty f(x)dx$.

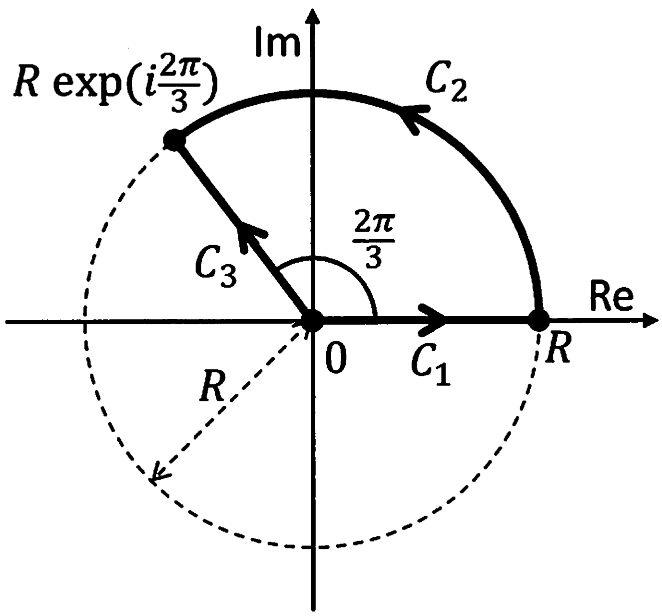

Fig. 6