2020 年 8 月実施
問題 1　電気工学
(1頁目／2 頁中)

(1) 容量 30 kVA，定格一次／二次電圧が 6000 V／150 V，周波数 50 Hz の単相変圧器について，次の問に答えよ．なお，一次巻線の巻数は 4000 回である．

(a) 巻数比 a および最大磁束 ϕ_m [mWb]を求めよ．

(b) 二次側から見た等価抵抗が 0.04 Ω，等価リアクタンスが 0.06 Ωであるとき，百分率抵抗降下 p [%]と百分率リアクタンス降下 q [%]を求めよ．また，この変圧器に遅れ力率 80%の全負荷をかけたときの電圧変動率 ε [%]を求めよ．

(2) 容量 50 kVA の単相変圧器について，負荷が定格容量の 50%の大きさで，力率 1.0 のときに，最大効率 98%が得られた．次の問に答えよ．

(a) このときの銅損 P_c [W]を求めよ．

(b) 電圧および力率を一定に保ったまま，負荷を定格容量の 50%から 80%の大きさにしたときの銅損 P_c [W]および効率 η [%]を求めよ．

(3) Fig. 1 のフィードバック制御系について，次の問に答えよ．ただし，ゲイン K は正の定数である．

(a) この制御系の特性方程式を求めよ．

(b) この制御系の根軌跡の概形を示せ．また，ゲイン K に対する安定性について述べよ．

(c) この制御系の固有周波数 ω_n および減衰率 ζ を求めよ．

(d) この制御系において，ゲイン K が 0.01，0.25，100，それぞれの場合の単位ステップ応答の概形を示せ．

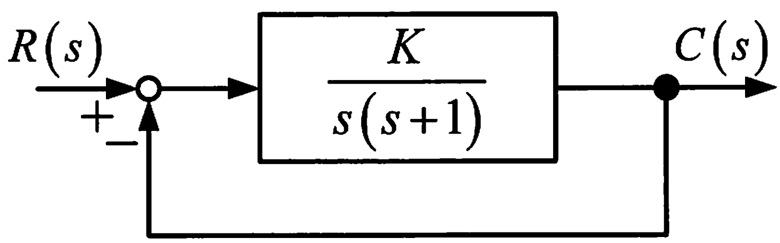

Fig. 1

Question No. 1: Electrical engineering (2／2)

2020 年 8 月実施
問題 1　電気工学
(2頁目／2 頁中)

(1) Answer the following questions about a 30 kVA, 6000 V/150 V, 50 Hz single-phase transformer, where the number of turns of the primary winding is 4000.

(a) Find the turn ratio a and the maximum flux ϕ_m [mWb], respectively.

(b) Find the percent resistance drop p [%] and the percent reactance drop q [%], respectively, when the equivalent resistance and the equivalent reactance seen from the secondary are 0.04 Ω and 0.06 Ω, respectively. Furthermore, find the voltage regulation ε [%] while supplying a full load at 0.8 lagging power factor.

(2) Answer the following questions about a 50 kVA single-phase transformer, which has a maximum efficiency of 98% while supplying a load of 50% at 1.0 power factor.

(a) Find the copper loss P_c [W].

(b) Find the copper loss P_c [W] and the efficiency η [%], when the load is changed from 50% to 80% while keeping the voltage and the power factor constant.

(3) Answer the following questions about the feedback control system shown in Fig. 1, where the gain K is positive.

(a) Find the characteristic equation of the control system.

(b) Sketch the root locus of the control system and describe the stability in terms of the gain K.

(c) Find the natural frequency ω_n and the damping factor ζ of the control system, respectively.

(d) Sketch the waveforms of the unit step response of the control system when the gain K is 0.01, 0.25, and 100, respectively.

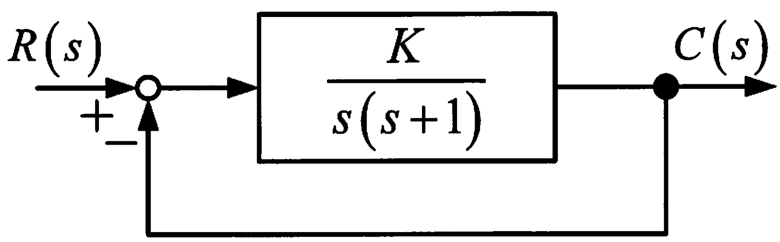

Fig. 1

2020年8月実施
問題2　通信工学
(1頁目／2頁中)

周波数$[-f_m, f_m]$に帯域制限された入力信号$g(t)$を，周期Tの周期波形

$$p_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t - nT)$$

を用いて変調し，出力信号$g_s(t) = g(t)p_s(t)$を得る．ここで信号$p(t)$は

$$p(t) = \begin{cases} 1/\tau, & |t| \le \tau \text{のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

で与えられる．ただしτは定数であり$\tau < T/2$を満たす．以下の問に答えよ．

(1) 信号$p(t)$のフーリエ変換$P(f)$を求め，$P(f)$の概形を図示せよ．

(2) 信号$p_s(t)$を，指数関数を用いたフーリエ級数により表わせ．

(3) 信号$g_s(t)$のフーリエ変換$G_s(f)$を，$g(t)$のフーリエ変換$G(f)$を用いて求めよ．

(4) $G_s(f)$に対し

$$\lim_{\tau \to 0} G_s(f)$$

を求め，周波数領域における瞬時標本化を図を用いて説明せよ．ただし，$G(f)$はFig. 2に示す周波数特性をもつ．

(5) 信号$g_s(t)$を伝達関数

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \le B \text{のとき} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

をもつ理想低域通過フィルタに入力し，元の信号$g(t)$に復調する処理を考える．周期Tおよび帯域幅Bに対して満たすべき条件を求めよ．

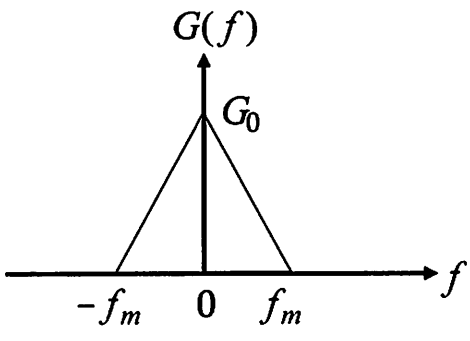

Fig.2

2020 年 8 月実施
問題 2　通信工学
(2 頁目／2 頁中)

An input signal $g(t)$, whose band width is limited to the frequency range $[-f_m, f_m]$, is modulated by a periodic signal

$$p_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p\,(t - nT)$$

which has a period of T, and an output signal $g_s(t) = g(t)p_s(t)$ is obtained. Here, the signal $p(t)$ is given by

$$p(t) = \begin{cases} 1/\tau, & \text{when } |t| \le \tau \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where τ is a constant and satisfies $\tau < T/2$. Answer the following questions.

(1) Derive the Fourier transform $P(f)$ of the signal $p(t)$, and sketch the outline of $P(f)$.

(2) Derive the Fourier series of the signal $p_s(t)$ using exponential functions.

(3) Derive the Fourier transform $G_s(f)$ of the signal $g_s(t)$ using the Fourier transform $G(f)$ of $g(t)$.

(4) Calculate

$$\lim_{\tau \to 0} G_s(f)$$

for $G_s(f)$, and explain instantaneous sampling in the frequency domain using a figure. Here, $G(f)$ has a frequency response shown in Fig. 2.

(5) Consider the process that the signal $g_s(t)$ is input to an ideal low pass filter having a transfer function

$$H(f) = \begin{cases} 1, & \text{when } |f| \le B \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

and is demodulated to the original signal $g(t)$. Derive the conditions to be satisfied for the period T and the band width B.

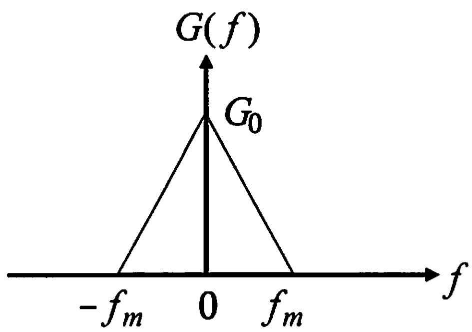

Fig. 2

Question No. 3: Electronic engineering (1／2)

2020 年 8 月実施
問題 3　電子工学
(1 頁目／2 頁中)

Fig. 3(a) はエミッタ接地交流増幅回路を示している．バイポーラトランジスタは活性領域で動作しており，エミッタ接地電流利得 β は 100 である．R_1, R_2, R_E の値はそれぞれ 3 kΩ, 2.7 kΩ, 200 Ω, ベースのバイアス電圧 V_B は 2.7 V, コレクタに流れ込むバイアス電流 I_C は 10 mA である．以下の問に答えよ．

(1) R_E および C_E の役割を説明せよ．

(2) 電源電圧 V_{CC} の値を求めよ．

(3) ベース・エミッタ間のバイアス電圧 V_{BE} の値を求めよ．

交流信号に対するバイポーラトランジスタの動作は Fig. 3(b)の簡略化 h パラメータモデルで表現される．h_{ie} および h_{fe} の値はそれぞれ 4.5 kΩ および 100 である．交流信号に対して容量 C_{in}, C_{out}, C_E は短絡とみなせるものとする．

(4) エミッタ接地交流増幅回路の微小信号等価回路を示し，入力抵抗の値を求めよ．

(5) 電圧利得 v_O/v_i の大きさが 2 となるような R_L の値を求めよ．

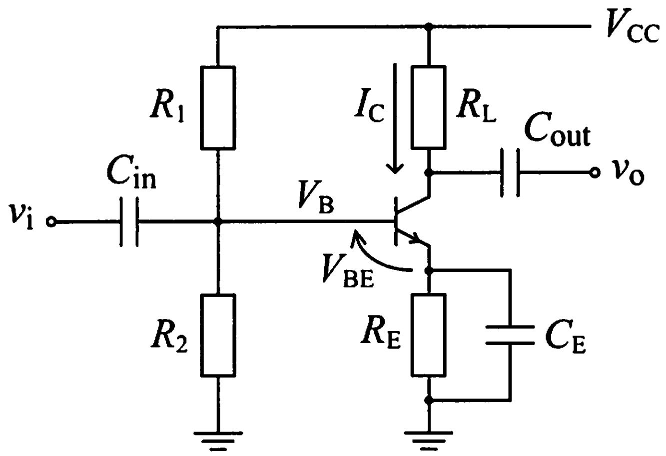

Fig. 3(a)

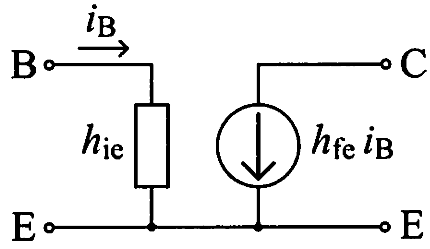

Fig. 3(b)

2020 年 8 月実施
問題 3　電子工学
(2頁目／2 頁中)

Fig. 3(a) shows a common emitter AC amplifier circuit. The bipolar junction transistor is operated in the active region with the common emitter current gain β being 100. The values of R_1, R_2, and R_E are 3 kΩ, 2.7 kΩ, and 200 Ω, respectively, the bias voltage of the base V_B is 2.7 V and the bias current entering the collector I_C is 10 mA. Answer the following questions.

(1) Explain the roles of R_E and C_E.

(2) Calculate the power supply voltage V_{CC}.

(3) Calculate the base–emitter bias voltage V_{BE}.

Operation of the bipolar junction transistor for an AC signal is represented by a simplified h-parameter model shown in Fig. 3(b). The values of h_{ie} and h_{fe} are 4.5 kΩ and 100, respectively. The capacitors C_{in}, C_{out}, and C_E can be considered as shorted for an AC signal.

(4) Show an equivalent circuit of the common emitter AC amplifier circuit for a small signal and calculate the input resistance.

(5) Calculate the value of R_L for which the amplitude of the voltage gain v_O/v_i will be 2.

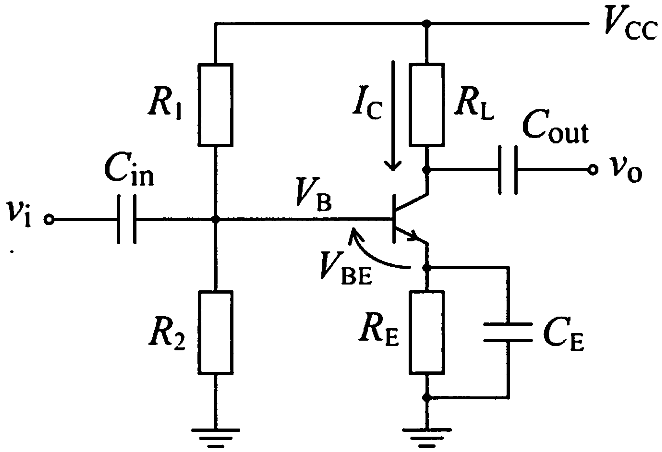

Fig. 3(a)

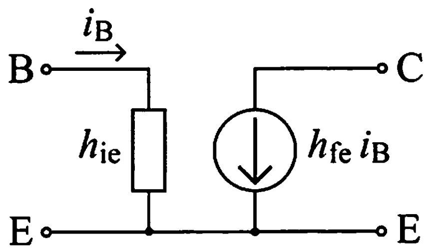

Fig. 3(b)

2020 年 8 月実施
問題４　計算機１
（１頁目／４頁中）

2 ビットの 2 進非負整数$A = (a_1, a_0)_2$および $B = (b_1, b_0)_2$が入力されたときに，2 ビットの 2 進非負整数$X = (x_1, x_0)_2$および 1 ビットの 2 進数$Y = (y_0)_2$をそれぞれ与える論理関数f_Xとf_Yの真理値表を Table 4 に示す．ここで，$a_1, a_0, b_1, b_0, x_1, x_0, y_0 \in \{0, 1\}$ であり，$(\ )_2$は 2 進数の値を表す．・，＋，$\overline{\ }$，⊕を，それぞれ，論理積 (AND)，論理和 (OR)，論理否定 (NOT)，排他的論理和 (EXOR) の演算子記号として用いて，以下の問に答えよ．

(1) f_Yを，AND，OR および NOT 演算子を用いた最簡積和形論理式で表せ．

(2) 3 入力の NOR ゲートのみを用いて，f_Yを実現する論理回路の回路図を描け．

(3) 以下はf_Yの機能を説明する文章である．$\boxed{}$の部分にあてはまる簡潔な記述を，AとBを用いて解答せよ．

「論理関数f_Yは，$\boxed{}$のとき$Y = 1$を出力し，それ以外のときは$Y = 0$を出力する．」

(4) Fig. 4(a)に，P_H，$Q_H \in \{0, 1\}$をそれぞれ入力とし，和$S_H \in \{0, 1\}$と次段への桁上げ$C \in \{0, 1\}$を出力する半加算器 HA の回路記号を示す．2 入力の EXOR ゲートと 2 入力の AND ゲートのみを用いて，半加算器 HA を実現する論理回路の回路図を描け．

(5) 半加算器 HA と 2 入力の AND ゲートのみを用いて，f_Xを実現する論理回路の回路図を描け．ただし，半加算器と AND ゲートの総数を最少とせよ．

(6) $Z = A \times B = (z_3, z_2, z_1, z_0)_2$とする．ここで，×は算術乗算を表し，$z_3, z_2, z_1, z_0 \in \{0, 1\}$である．半加算器 HA と 2 入力の AND ゲートのみを用いて，z_2を出力する論理回路の回路図を描け．ただし，半加算器と AND ゲートの総数を最少とせよ．

(7) P_F，$Q_F \in \{0, 1\}$と前段からの桁上げ$C_B \in \{0, 1\}$を入力とし，和$S_F \in \{0, 1\}$と次段への桁上げ$C_N \in \{0, 1\}$を出力する全加算器 FA の回路記号を Fig. 4(b)に示す．半加算器 HA と 2 入力の OR ゲートのみを用いて，全加算器 FA を実現する論理回路の回路図を描け．ただし，半加算器と OR ゲートの総数を最少とせよ．

(8) $Y = 1$を満足する入力AとBについて，$W = A - B = (w_1, w_0)_2$とする．ここで，−は算術減算を表し，$w_1, w_0 \in \{0, 1\}$である．全加算器 FA と 2 入力の EXOR ゲートのみを用いて，Wを出力する論理回路の回路図を描け．ただし，全加算器と EXOR ゲートの総数を最少とせよ．なお，$Y = 0$を与える入力AとBについては考えなくてよい．

2020 年 8 月実施
問題４　計算機１
（２頁目／４頁中）

Table 4

A		B		X		Y
a_1	a_0	b_1	b_0	x_1	x_0	y_0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1

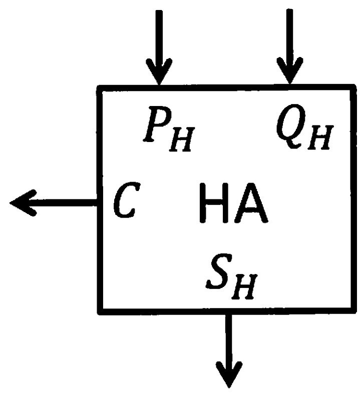

Fig. 4(a)

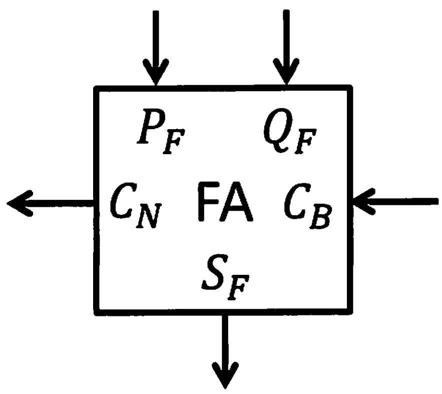

Fig. 4(b)

2020 年 8 月実施
問題4　計算機 1
（3 頁目／4 頁中）

Table 4 shows a truth table for logical functions f_X and f_Y. f_X gives a 2-bit non-negative binary integer number $X = (x_1, x_0)_2$, and f_Y gives a 1-bit binary number $Y = (y_0)_2$, respectively, when 2-bit non-negative binary integer numbers $A = (a_1, a_0)_2$ and $B = (b_1, b_0)_2$ are given as inputs. Here, $a_1, a_0, b_1, b_0, x_1, x_0, y_0 \in \{0, 1\}$, and $(\ )_2$ denotes the value of a binary number. Answer the following questions using $\cdot$, $+$, $^-$, and $\oplus$ operators for the logical conjunction (AND), disjunction (OR), negation (NOT), and exclusive OR (EXOR), respectively.

(1) Show a logical formula for f_Y in the minimum sum-of-products form using AND, OR, and NOT operators.

(2) Draw a logic circuit for f_Y using 3-input NOR gates only.

(3) The following sentence should explain the function of f_Y. Give a brief description suitable for filling the box $\boxed{}$ using A and B.

"The logical function f_Y gives $Y = 1$ when $\boxed{}$, otherwise $Y = 0$."

(4) Fig. 4(a) shows a circuit symbol for a half adder HA, whose inputs are P_H and $Q_H \in \{0, 1\}$, and outputs are a sum $S_H \in \{0, 1\}$ and a carry to the next stage $C \in \{0, 1\}$. Draw a logic circuit for the half adder HA using 2-input EXOR and 2-input AND gates only.

(5) Draw a circuit diagram for f_X using half adders HA and 2-input AND gates only. Here, minimize the total number of half adders and AND gates.

(6) Let $Z = A \times B = (z_3, z_2, z_1, z_0)_2$ where $\times$ denotes arithmetic multiplication, and $z_3, z_2, z_1, z_0 \in \{0, 1\}$. Draw a circuit diagram which outputs z_2 using half adders HA and 2-input AND gates only. Here, minimize the total number of half adders and AND gates.

(7) Fig. 4(b) shows a circuit symbol for a full adder FA whose inputs are P_F, $Q_F \in \{0, 1\}$, and a carry from the former stage $C_B \in \{0, 1\}$, and outputs are a sum $S_F \in \{0, 1\}$ and a carry to the next stage $C_N \in \{0, 1\}$. Draw a circuit diagram for the full adder FA using half adders HA and 2-input OR gates only. Here, minimize the total number of half adders and OR gates.

(8) Let $W = A - B = (w_1, w_0)_2$ for inputs A and B which satisfy $Y = 1$. Here, $-$ denotes arithmetic subtraction, and $w_1, w_0 \in \{0, 1\}$. Draw a circuit diagram for W using full adders FA and 2-input EXOR gates only. Ignore the inputs A and B which give $Y = 0$, and minimize the total number full adders and EXOR gates.

2020 年 8 月実施
問題４　計算機１
（４頁目／４頁中）

Table 4

A		B		X		Y
a_1	a_0	b_1	b_0	x_1	x_0	y_0
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1

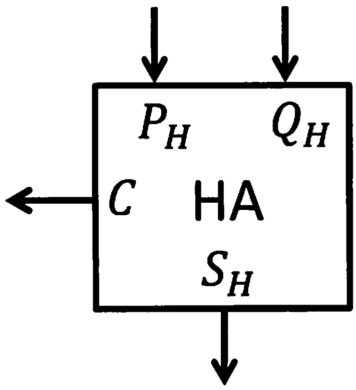

Fig. 4(a)

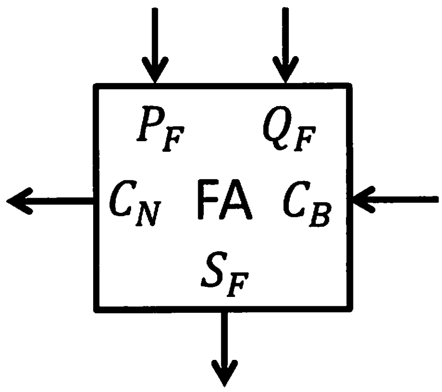

Fig. 4(b)

2020年 8月実施
問題5 計算機2
(1頁目／4頁中)

Fig. 5(a) の構文を持つ関数型プログラミング言語を考える．$f(x_1, \ldots, x_k) = E$ によって定義されている関数呼び出し $f(E_1, \ldots, E_k)$ の評価方法として，以下の 2 つの戦略を考える．

- **値呼び**: $E_1, \ldots, E_k$ を整数 $n_1, \ldots, n_k$ になるまで簡約し，E の $x_1, \ldots, x_k$ をそれぞれ $n_1, \ldots, n_k$ で置き換えて得られる式で関数呼び出し全体を置き換える．
- **名前呼び**: E の $x_1, \ldots, x_k$ をそれぞれ $E_1, \ldots, E_k$ で置き換えて得られる式で関数呼び出し全体を置き換える．

いずれの戦略においても，関数呼び出し以外の式は次のように簡約される．

- $E_1 + E_2$: E_1 と E_2 を整数 n_1, n_2 になるまで簡約し，式全体を n_1 と n_2 の和で置き換える．
- $E_1 * E_2$: E_1 と E_2 を整数 n_1, n_2 になるまで簡約し，式全体を n_1 と n_2 の積で置き換える．
- **IFEQ**(E_1, E_2, E_3, E_4): E_1 と E_2 を整数 n_1, n_2 になるまで簡約し，$n_1 = n_2$ ならば式全体を E_3 で，そうでなければ E_4 で置き換える．

関数 f_1 が Fig. 5(b) の関数定義で与えられているとき，それぞれの評価戦略の下での $f_1(1, 2)$ の簡約列は Fig. 5(c) で示される．以下の問に答えよ．

(1) 値呼び戦略および名前呼び戦略での $f_1(2, 4)$ の簡約列を書け．

(2) m, n を正の整数とし，$m < n$ とする．$f_1(m, n)$ を評価するときに加算の回数および乗算の回数を求めよ．値呼び，名前呼びのそれぞれの場合について，m, n で表せ．

(3) ある関数型プログラミング言語が与えられたとき，その言語が値呼び戦略と名前呼び戦略のどちらを採用しているかを判定するためにはどのようなプログラムを実行すればよいか．Fig. 5(d) で与えられる関数 *dummy* および *recur* を用いて答えよ．ただし，プログラムの実行から観測できるのは，プログラムが停止するか否か，および停止した場合の最終値のみとする．

2020年 8月実施
問題5 計算機2
(2頁目／4頁中)

P	$::=$	$D_1; \ldots; D_m; E$	プログラム program
D	$::=$	$f(x_1, \ldots, x_k) = E$	関数定義 function definition
E	$::=$	n	整数 integer
	$\mid$	x	変数 variable
	$\mid$	$E_1 + E_2$	加算 addition
	$\mid$	$E_1 * E_2$	乗算 multiplication
	$\mid$	$\mathbf{IFEQ}(E_1, E_2, E_3, E_4)$	条件分岐 conditional branch
	$\mid$	$f(E_1, \ldots, E_k)$	関数呼び出し function call

Fig. 5 (a)

$$f_1(x, y) \ = \ \mathbf{IFEQ}(x, y, 1, y * f_1(x+1, y))$$

Fig. 5 (b)

値呼び:
call-by-value:

$$\begin{aligned} & f_1(1,2) \longrightarrow \ \mathbf{IFEQ}(1,2,1,2*f_1(1+1,2)) \longrightarrow 2*f_1(1+1,2) \\ & \longrightarrow 2*f_1(2,2) \longrightarrow 2*\mathbf{IFEQ}(2,2,1,2*f_1(2+1,2)) \longrightarrow 2*1 \longrightarrow 2 \end{aligned}$$

名前呼び:
call-by-name:

$$\begin{aligned} & f_1(1,2) \longrightarrow \ \mathbf{IFEQ}(1,2,1,2*f_1(1+1,2)) \longrightarrow 2*f_1(1+1,2) \\ & \longrightarrow 2*\mathbf{IFEQ}(1+1,2,1,2*f_1((1+1)+1,2)) \\ & \longrightarrow 2*\mathbf{IFEQ}(2,2,1,2*f_1((1+1)+1,2)) \longrightarrow 2*1 \longrightarrow 2 \end{aligned}$$

Fig. 5 (c)

$$\begin{aligned} \mathit{dummy}(x) &= 0 \\ \mathit{recur}(x) &= \mathit{recur}(x) \end{aligned}$$

Fig. 5 (d)

Consider the functional programming language whose syntax is shown in Fig. 5(a). Given a function definition $f(x_1, \dots, x_k) = E$, consider the following two strategies to evaluate a function call $f(E_1, \dots, E_k)$.

- **call-by-value**: Reduce $E_1, \dots, E_k$ until they become integers $n_1, \dots, n_k$, respectively, and then replace the function call with the expression obtained by replacing $x_1, \dots, x_k$ in E with $n_1, \dots, n_k$, respectively.
- **call-by-name**: Replace the function call with the expression obtained by replacing $x_1, \dots, x_k$ in E with $E_1, \dots, E_k$, respectively.

Under both strategies, expressions other than function calls are reduced as follows.

- $E_1 + E_2$: Reduce E_1 and E_2 until they become integers n_1 and n_2, respectively, and then replace the whole expression with the sum of n_1 and n_2.
- $E_1 * E_2$: Reduce E_1 and E_2 until they become integers n_1 and n_2, respectively, and then replace the whole expression with the product of n_1 and n_2.
- **IFEQ**(E_1, E_2, E_3, E_4): Reduce E_1 and E_2 until they become integers n_1 and n_2, respectively, and replace the whole expression with E_3 if $n_1 = n_2$, and with E_4 otherwise.

When the function f_1 is given by the function definition in Fig. 5(b), the reduction sequence of $f_1(1, 2)$ under each strategy is shown in Fig. 5(c). Answer the following questions.

(1) Write reduction sequences of $f_1(2, 4)$ under the call-by-value and the call-by-name evaluation strategies.

(2) Let m and n be positive integers and $m < n$. Find the number of additions and the number of multiplications executed during the evaluation of $f_1(m, n)$. Express your answer in terms of m and n for each of the call-by-value and the call-by-name strategies.

(3) What program should be executed to determine which of the call-by-value and the call-by-name strategies is used by a given functional programming language? Answer using the *dummy* and *recur* functions given in Fig. 5(d). Assume that from a program execution, you can only observe whether the program terminates or not, and the final value if the program terminates.

P	$::= D_1; \ldots; D_m; E$	プログラム program
D	$::= f(x_1, \ldots, x_k) = E$	関数定義 function definition
E	$::= n$	整数 integer
	$\mid\ x$	変数 variable
	$\mid\ E_1 + E_2$	加算 addition
	$\mid\ E_1 * E_2$	乗算 multiplication
	$\mid\ \mathbf{IFEQ}(E_1, E_2, E_3, E_4)$	条件分岐 conditional branch
	$\mid\ f(E_1, \ldots, E_k)$	関数呼び出し function call

Fig. 5 (a)

$$f_1(x, y) \ = \ \mathbf{IFEQ}(x, y, 1, y * f_1(x+1, y))$$

Fig. 5 (b)

値呼び:
call-by-value:

$$\begin{aligned} & f_1(1,2) \longrightarrow \ \mathbf{IFEQ}(1,2,1,2*f_1(1+1,2)) \longrightarrow 2*f_1(1+1,2) \\ & \longrightarrow 2*f_1(2,2) \longrightarrow 2*\mathbf{IFEQ}(2,2,1,2*f_1(2+1,2)) \longrightarrow 2*1 \longrightarrow 2 \end{aligned}$$

名前呼び:
call-by-name:

$$\begin{aligned} & f_1(1,2) \longrightarrow \ \mathbf{IFEQ}(1,2,1,2*f_1(1+1,2)) \longrightarrow 2*f_1(1+1,2) \\ & \longrightarrow 2*\mathbf{IFEQ}(1+1,2,1,2*f_1((1+1)+1,2)) \\ & \longrightarrow 2*\mathbf{IFEQ}(2,2,1,2*f_1((1+1)+1,2)) \longrightarrow 2*1 \longrightarrow 2 \end{aligned}$$

Fig. 5 (c)

$$\begin{aligned} \mathit{dummy}(x) &= 0 \\ \mathit{recur}(x) &= \mathit{recur}(x) \end{aligned}$$

Fig. 5 (d)

2020 年 8 月実施
問題６　物理専門
（１ 頁目／４頁中）

Fig.6 に示すように，x 軸上の一次元調和振動子ポテンシャル $V(x) = \frac{1}{2} m{\omega_0}^2 x^2$ に束縛されて運動する質量 m の粒子の状態について考える．粒子の定常状態の波動関数を $\psi(x)$，全エネルギーを$E, \hbar = \frac{h}{2\pi}$（$h$はプランク定数），$\omega_0 > 0$とする．以下の問に答えよ．

(1)　この粒子に対するハミルトニアン演算子 $\hat{H}$ を記せ．

(2)　$q = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x$, $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}$と置いて無次元化し，シュレディンガー方程式を記せ．

(3)　調和振動子の固有関数 $\psi_n(q)$ はエルミート多項式 $H_n(q)$ を使って以下の式で表される．$n = 0, 1, 2, \cdots$である．

$$\psi_n(q) = A_n e^{-\frac{q^2}{2}} H_n(q)$$

(a) $\psi_n(q)$ に関する規格化条件をもとに，規格化定数 $|A_n|$ を求めよ．エルミート多項式の直交性に関する以下の式を使って良い．δ_{nm} はクロネッカーのデルタである．

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(q) H_m(q) e^{-q^2} dq = \delta_{nm} 2^n n! \sqrt{\pi}$$

(b) 固有関数 $\psi_0(q)$ を求めよ．また $\psi_0(q)$ に関する q の期待値 $\langle q_0 \rangle$ と位置エネルギー $V(q)$ の期待値 $\langle V_0 \rangle$ を求めよ．$H_0(q) = 1$である．以下の定積分を使って良い．

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{-q^2} dq = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

2020 年 8 月実施
問題６　物理専門
（２頁目／４頁中）

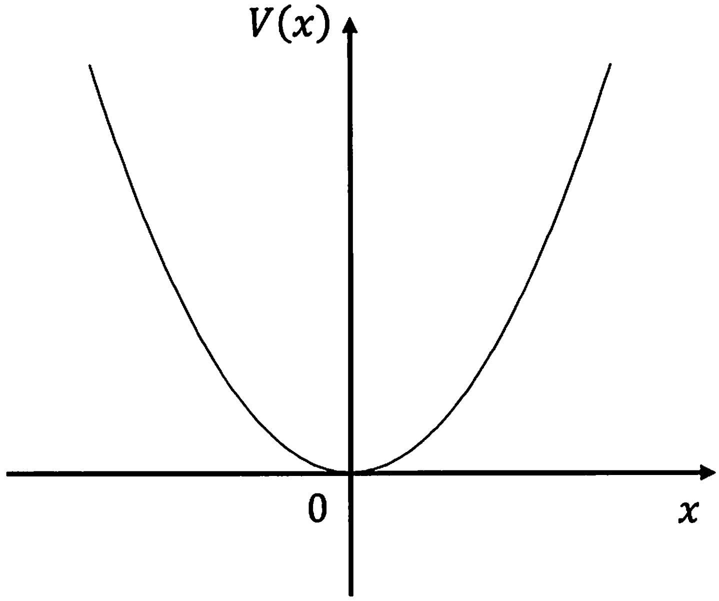

Fig. 6

Consider the state of a particle of mass m bound in the one-dimensional harmonic oscillator potential $V(x) = \frac{1}{2} m\omega_0{}^2 x^2$ along the x-axis, as shown in Fig. 6. Let the wave function in a stationary state be $\psi(x)$. In the following, E is the total energy and $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h: Plank's constant), and $\omega_0 > 0$. Answer the following questions.

(1) Write the Hamiltonian operator $\hat{H}$ of the particle.

(2) Write the Schrödinger equation by normalization with $q = \sqrt{\frac{m\omega_0}{\hbar}}x$ and $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega_0}$.

(3) The eigenfunction $\psi_n(q)$ of the harmonic oscillator is expressed with Hermite polynomials $H_n(q)$ as

$$\psi_n(q) = A_n e^{-\frac{q^2}{2}} H_n(q),$$

where $n = 0, 1, 2, \cdots$.

(a) Find the normalization constant $|A_n|$ based on the normalization condition for $\psi_n(q)$. The following equation of Hermite polynomial orthogonality can be used, where δ_{nm} is the Kronecker delta.

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(q) H_m(q) e^{-q^2} dq = \delta_{nm} 2^n n! \sqrt{\pi}$$

(b) Find the eigenfunction $\psi_0(q)$. Find the expectation value $\langle q_0 \rangle$ of q and the expectation value $\langle V_0 \rangle$ of the potential energy $V(q)$ for $\psi_0(q)$, where $H_0(q) = 1$. The following integral equation can be used.

$$\int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{-q^2} dq = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

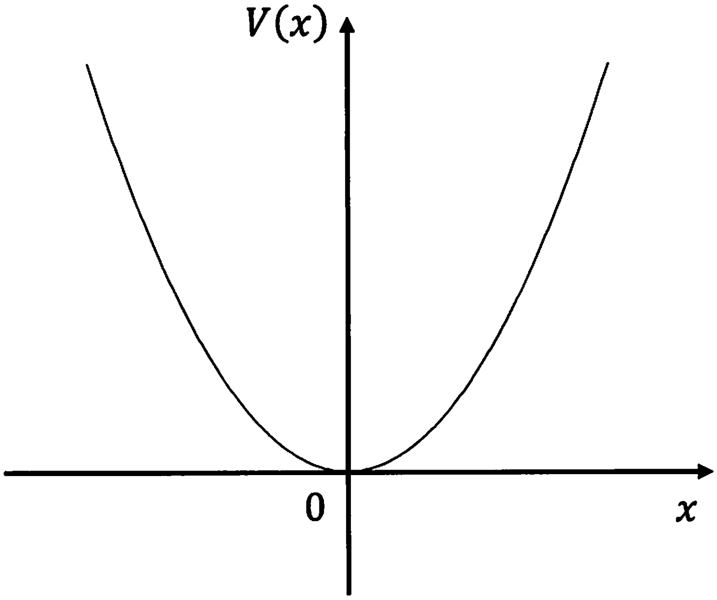

Fig. 6