2021 年 3 月 1 日 9:40－10:40

大学院工学研究科	電気エネルギーシステム専攻
	通信工学専攻
	電子工学専攻
大学院情報科学研究科	情報・生命系群
大学院医工学研究科	工学系コース電気・情報系

大学院入学試験問題

基礎科目
Basic Subjects

注意： ６設問中，２問題を選んで，答案用紙（問題ごとに１枚）に解答せよ．答案用紙が不足する場合は裏面を使って良い．問題は和文と英文を併記してある．

Attention: Choose 2 questions out of the following 6 questions and answer each of them on a separate answer sheet. You may use the backside. Questions are written in both Japanese and English.

2021 年 3 月実施
問題1 電磁気学
(1 頁目／2 頁中)

自由空間における電流密度 $\boldsymbol{J}$，電荷密度 ρ，電界 $\boldsymbol{E}$，磁界 $\boldsymbol{H}$，電束密度 $\boldsymbol{D}$，磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の関係はマクスウェル方程式で表される．これらの時間変化は角周波数 $\omega(\neq 0)$ の正弦波で表されており，時間変化の記述は省略される．自由空間の誘電率，透磁率はそれぞれ ϵ_0，μ_0 であり，自由空間における波数は k_0 である．以下の問に答えよ．

(1) ガウスの法則およびアンペア-マクスウェルの法則をそれぞれ微分形で示せ．

(2) ガウスの法則およびアンペア-マクスウェルの法則を用いて電流密度 $\boldsymbol{J}$ と電荷密度 ρ の関係式を導出し，その物理的意味を記せ．

(3) 自由空間における電界 $\boldsymbol{E}$ が以下の式で表されている．

$$\boldsymbol{E} = E_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

ここで，E_0 は定数である．r と θ は球座標 (r, θ, ϕ) である．

(a) この電界 $\boldsymbol{E}$ に対応する磁界 $\boldsymbol{H}$ の振幅と向きを求めよ．必要であれば，球座標における任意のベクトル $\boldsymbol{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$ に関する以下のベクトル公式を用いてよい．

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

(b) この電磁界に対応する複素ポインティングベクトルの振幅と向きを求めよ．

2021年 3月実施
問題1 電磁気学
(2頁目／2頁中)

The relationships between a current density $\boldsymbol{J}$, an electric charge density ρ, an electric field $\boldsymbol{E}$, a magnetic field $\boldsymbol{H}$, an electric flux density $\boldsymbol{D}$ and a magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ in free-space are described by Maxwell's equations. Their time variation is described by a sinusoidal wave whose angular frequency is $\omega(\neq 0)$ and description of the time variation is omitted. The permittivity and permeability of free-space are ε_0 and μ_0, respectively and the wavenumber in free-space is k_0. Answer the following questions.

(1) Show Gauss's law and Ampère-Maxwell's law respectively in differential forms.

(2) Using Gauss's law and Ampère-Maxwell's law, derive the relation between the current density $\boldsymbol{J}$ and the electric charge density ρ and give its physical meaning.

(3) Electric field $\boldsymbol{E}$ in free-space is described by the following equation.

$$\boldsymbol{E} = E_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{r} \sin\theta\, \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

Here, E_0 is a constant. r and θ are spherical coordinates (r, θ, ϕ).

(a) Find the magnitude and the direction of the magnetic field $\boldsymbol{H}$ corresponding to the electric field $\boldsymbol{E}$. The following vector identity for an arbitrary vector $\boldsymbol{A} = (A_r, A_\theta, A_\phi)$ in spherical coordinates can be used if necessary.

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{\hat{\boldsymbol{r}}}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right] + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

(b) Find the magnitude and direction of the complex Poynting vector corresponding to the electromagnetic field.

2021 年 3 月実施
問題 2　電気回路
（1 頁目／2 頁中）

Fig. 2 のようにインダクタL，抵抗R，コンデンサCの直列回路がある．コンデンサCが充電され，その電圧はE_0である．時刻$t = 0$でスイッチSを閉じた．$t \geq 0$の範囲で以下の問に答えよ．

(1) コンデンサCの電荷$q(t)$に関する回路の基本式を微分方程式として記述せよ．

(2) 問(1)の微分方程式で電荷の特解を$q_s(t) = e^{st}$と仮定してsに関する特性方程式を記述し，その根を求めよ．

(3) 問(2)の特性方程式で$R^2 = 4L/C$の場合，時刻tにおける電荷の一般解$q(t)$は式(2A)のように導出できる．このとき電流$i(t)$を求め，電流波形の概形（極値を含む）を描け．

$$q(t) = CE_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\left(1 + \frac{Rt}{2L}\right) \tag{2A}$$

(4) 問(3)の場合に，$0 \leq t \leq \infty$の間に抵抗Rで消費されるエネルギーを求め，このエネルギーが時刻$t = 0$でコンデンサCに蓄えられていた静電エネルギーと等しいことを示せ．必要であれば式(2B)を使用せよ．

$$\int_0^\infty e^{-at}\, t^{n-1} dt = \frac{(n-1)!}{a^n} \tag{2B}$$

ただし，aは実数，nは整数とする．

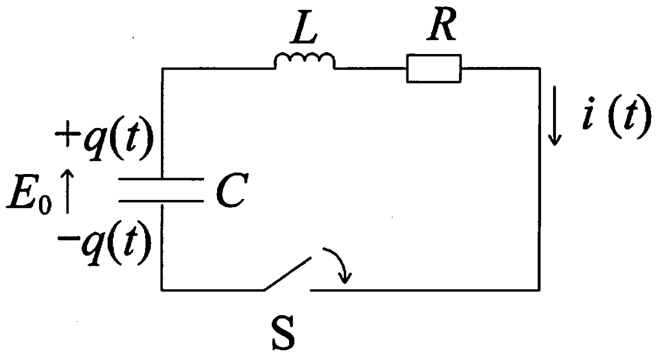

Fig. 2

2021 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(2 頁目／2 頁中)

As shown in Fig. 2, there is a series circuit of inductor L, resistor R, and capacitor C. The capacitor C is charged and its voltage is E_0. The switch S is closed at time $t = 0$. Answer the following questions within the range of $t \geq 0$.

(1) Show the circuit equation with the electric charge $q(t)$ of the capacitor C as a differential equation.

(2) Derive the characteristic equation for s with the special solution of the charge as $q_s(t) = e^{st}$ in your answer in question (1), and find the root.

(3) When $R^2 = 4L/C$ in the characteristic equation of question (2), the general solution $q(t)$ is obtained as shown in equation (2A). Find the current $i(t)$ and draw the outline (including extreme value) of the current waveform.

$$q(t) = CE_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\left(1 + \frac{Rt}{2L}\right) \tag{2A}$$

(4) In the case of question (3), find the energy consumed by the resistor R between $0 \leq t \leq \infty$, and show that this energy is equal to the electrostatic energy stored in the capacitor C at time $t = 0$. If necessary, use equation (2B).

$$\int_0^{\infty} e^{-at}\, t^{n-1} dt = \frac{(n-1)!}{a^n} \tag{2B}$$

where, a is a real number and n is an integer.

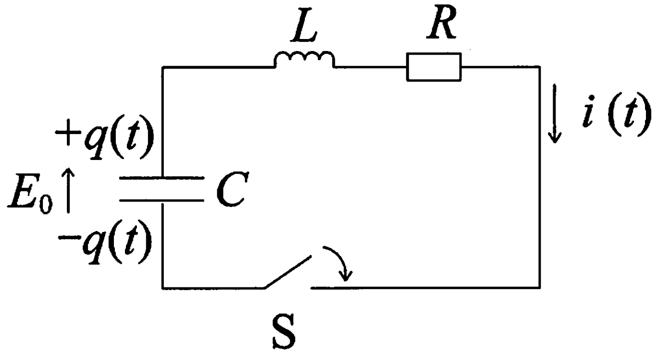

Fig. 2

2021年 3月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／1頁中)

$x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1\}$ とし，$\cdot$，$+$，$\oplus$，$\bar{\ }$ は，それぞれ論理積演算，論理和演算，排他的論理和演算，否定演算である．任意の n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に関して，以下の定義式で示される f^d を f の双対関数という．

$$f^d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$$

このとき，$f^d = f$ が成り立てば，f は自己双対関数であるといい，$f^d = \overline{f}$ が成り立てば，f は自己反双対関数であるという．以下の問に答えよ．

(1) 以下の論理関数が自己双対関数であるか，自己反双対関数であるか，いずれでもないかを判定し，根拠とともに示せ．

(a) $f_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

(b) $f_2 = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$

(2) $f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ が自己双対関数の場合，その否定である $\overline{f_3}$ も自己双対関数になることを，上記の双対関数の定義式を用いて証明せよ．

(3) 任意の n 変数論理関数 g と h の大小関係が，任意の $x_1, x_2, \ldots, x_n$ について，$g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で定義されるとき，それぞれの双対関数 g^d と h^d の大小関係はどのようになるか，根拠とともに示せ．

Consider $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1\}$, and $\cdot$, $+$, $\oplus$, and $\bar{\ }$ are AND, OR, EXOR and NOT operators, respectively. For an n-variable Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, f^d defined by the following formula is a dual function of f.

$$f^d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n})}$$

If $f^d = f$ is held, f is called a self-dual function. If $f^d = \overline{f}$ is held, f is called a self-anti-dual function. Answer the following questions.

(1) Determine whether each of the following functions is a self-dual function, a self-anti-dual function, or neither, and justify your answer.

(a) $f_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$

(b) $f_2 = x_1 \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$

(2) When $f_3(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is a self-dual function, prove that $\overline{f_3}$ is also a self-dual function using the above definition formula of a dual function.

(3) When the relationship between magnitudes of two n-variable Boolean functions g and h is defined as $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ for any $x_1, x_2, \ldots, x_n$, show the relationship between magnitudes of their dual functions g^d and h^d, and justify your answer.

2021年 3月実施
問題4 情報基礎2
(1頁目／2頁中)

以下の問に答えよ.

(1) ある関数 $g(n)$ が与えられたとき，その漸近記法 $\Theta(g(n))$ は関数の集合として以下のように定義される.

$$\Theta(g(n)) = \{f(n):\ \text{ある正の定数}\ c_1, c_2, n_0\ \text{が存在し,}\ \text{すべての}\ n \geq n_0\ \text{に対して}\ 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)\}$$

以下のそれぞれの関数 $f(n)$ が $\Theta(n^2)$ に属するか否かを答え，証明せよ.

(a) $f(n) = \frac{1}{5}n^2 - 2n$

(b) $f(n) = 3n \log n^2 + 4n^2$

(2) Fig. 4の重み付き無向グラフにおいて，頂点 a から g に至る最短経路を求め，図示せよ.

(3) Fig. 4の重み付き無向グラフの最小全域木を求め，図示せよ.

(4) 複数の集合を表現するためのデータ構造を考える. N 個の要素が与えられ，それぞれの要素はいずれか一つの集合に属している. このデータ構造では，定数時間で任意の二つの集合を併合して一つにまとめることができる. ある要素が与えられたとき，それが属する集合を見つけるための時間計算量は $O(\log N)$ である.

辺の重みがすべて正の実数であるような E 本の辺と，V 個の頂点から成るような，任意のスパースな重み付き連結無向グラフがある. 以下の問に答えよ.

(a) 与えられたデータ構造を用いて，時間計算量 $O(E \log E)$ で最小全域木を求めるアルゴリズムを説明せよ. x 個の要素を整列するために，時間計算量が $O(x \log x)$ の任意のアルゴリズムを用いてよい.

(b) (a) で示したアルゴリズムの時間計算量が $O(E \log E)$ であることを示せ.

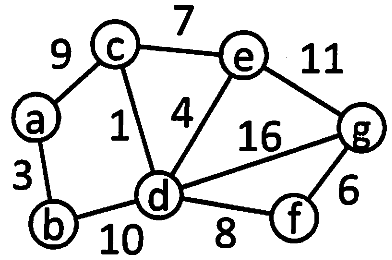

Fig. 4

Answer the following questions.

(1) Given a function $g(n)$, the asymptotic notation $\Theta(g(n))$ is defined by a set of functions as follows.

$$\Theta(g(n)) = \{f(n) : \text{there exist positive constants } c_1, c_2, \text{ and } n_0 \text{ such that } 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n) \text{ for all } n \geq n_0\}$$

Show whether each function $f(n)$ below belongs to $\Theta(n^2)$ or not, and give a proof for each.

(a) $f(n) = \frac{1}{5}n^2 - 2n$
(b) $f(n) = 3n \log n^2 + 4n^2$

(2) Find and show schematically the shortest path from the vertex a to g in the weighted undirected graph shown in Fig. 4.

(3) Find and show schematically the minimum spanning tree of the weighted undirected graph shown in Fig. 4.

(4) Consider a data structure for representing multiple sets. N items are given and each item belongs to one of the sets. This data structure allows merging an arbitrary pair of sets into one in a constant time. When an item is specified, the time complexity of finding the set which the item belongs to is $O(\log N)$.

Suppose there is a sparse, weighted, undirected connected graph consisting of E edges whose weights are all positive real numbers, and V vertices. Answer the following questions.

(a) Describe an algorithm for finding a minimum spanning tree in the time complexity $O(E \log E)$ using the data structure given above. Any algorithm whose time complexity is $O(x \log x)$ for sorting x items may be used.
(b) Show that the time complexity of the algorithm in (a) is $O(E \log E)$.

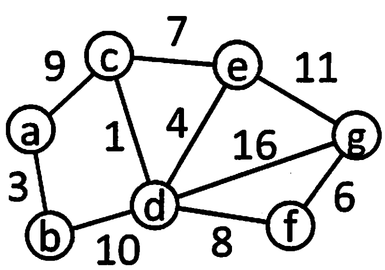

Fig. 4

2021 年 3 月実施
問題５　物理基礎
（１頁目／２頁中）

Fig. 5 (a)に示すように，薄い円板A（半径a，重心O_A，面密度σ）と薄い正方形板B（1 辺$2b$，重心O_B，面密度σ）を考える．円板Aと正方形板Bは，O_AとO_Bを通り各々の板面に鉛直なz軸のまわりを回転している．

(1) 円板Aと正方形板Bのz軸のまわりの慣性モーメントI_A，I_Bを求めよ．

(2) 円板Aと正方形板Bの角速度が各々ω_A，ω_Bであるとき，円板Aと正方形板B各々の角運動量L_A，L_Bを求めよ．

(3) Fig. 5 (b)に示すように，各々角速度ω_A，ω_Bで回転していた円板Aと正方形板Bが連結し，共通の角速度ωで回転するようになった．連結の前後で角運動量は保存されるものとし，ωを求めよ．

(4) 問(3)において，連結によって失われる運動エネルギーを求めよ．

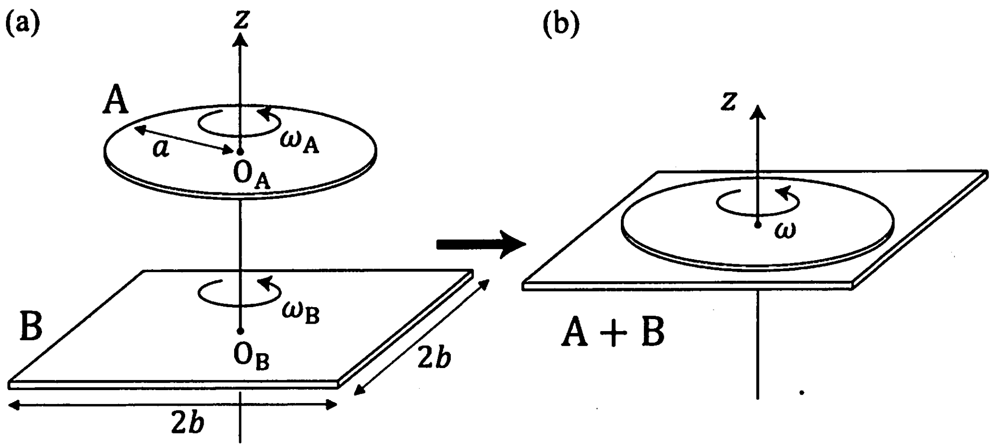

Fig. 5

2021 年 3 月実施
問題５　物理基礎
（２頁目／２頁中）

As shown in Fig. 5 (a), consider a thin disk A (radius a, center of mass O_A, area density σ) and a thin square plate B (side length $2b$, center of mass O_B, area density σ). The disk A and the square plate B are rotating about the z-axis normal to the planes through O_A and O_B.

(1) Find the moments of inertia I_A and I_B about the z-axis of the disk A and the square plate B, respectively.

(2) When the angular velocities of the disk A and the square plate B are ω_A and ω_B, respectively, find the angular momenta L_A and L_B of the disk A and the square plate B, respectively.

(3) As shown in Fig. 5 (b), the disk A and the square plate B rotating at the angular velocities of ω_A and ω_B are connected, and then they rotate at the common angular velocity ω. Find ω assuming that the angular momentum is conserved before and after the connection.

(4) In question (3), find the loss of kinetic energy due to the connection.

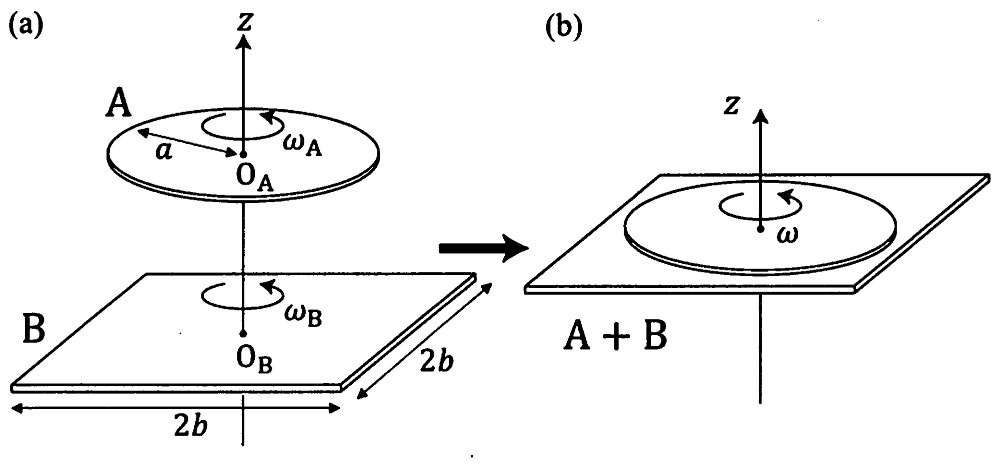

Fig. 5

2021 年 3 月実施
問題 6　数学基礎
(1 頁目／2 頁中)

（1）行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について考える．

以下の問に答えよ．

(a) A のすべての固有値と，それに対応する固有ベクトルを求めよ．

(b) $P^{-1}AP$ が対角行列になるような正則行列 P を一つ求めよ．また，それに対応する $P^{-1}AP$ を求めよ．

（2）関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)=\mathscr{L}[f(t)]$ とする．ただし，s は複素数，t は実数でかつ $t \geq 0$ とする．ラプラス変換を用いて次の微分方程式を解くことを考える．

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=\sin 2t \quad .$$

ここで，$x(0)=0$ かつ $dx(0)/dt=0$ である．以下の問に答えよ．

(a) $\mathscr{L}[x(t)]=X(s)$ とおくとき，$\mathscr{L}[dx(t)/dt]=sX(s)$ および $\mathscr{L}[d^2x(t)/dt^2]=s^2X(s)$ となることを導け．

(b) $x(t)$ を求めよ．

2021 年 3 月実施
問題 6　数学基礎
(2 頁目／2 頁中)

（1） Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Answer the following questions.

(a) Find all the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of A.

(b) Find an invertible matrix P so that $P^{-1}AP$ becomes a diagonal matrix. Also find the corresponding $P^{-1}AP$.

（2） Let $F(s) = \mathscr{L}[f(t)]$ be the Laplace transform of function $f(t)$. Here, s is a complex number and t is a real number satisfying $t \geq 0$. Consider the solution of the following differential equation using the Laplace transform.

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \sin 2t \quad .$$

Here $x(0) = 0$ and $dx(0)/dt = 0$. Answer the following questions.

(a) Derive $\mathscr{L}[\, dx(t)/dt \,] = sX(s)$ and $\mathscr{L}[\, d^2x(t)/dt^2 \,] = s^2X(s)$, where $\mathscr{L}[\, x(t) \,] = X(s)$.

(b) Find $x(t)$.