システム制御工学Ａ　演習問題(補充)

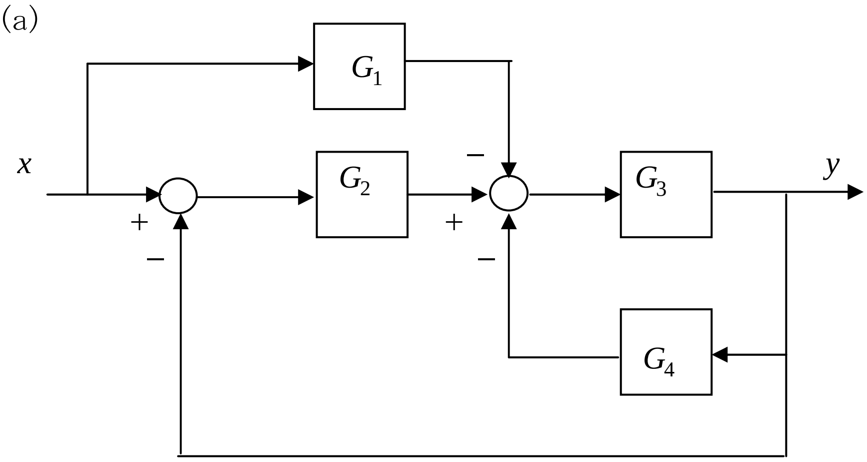
教科書には基本的な演習問題がのっている．このプリントはその補足である．

1-1　家庭用ヒーターシステムのブロック線図を描け．サーモスタットで制御されるヒーターシステムの各要素の機能を識別せよ．

1-2　閉ループの自動トースターを考案せよ．ただし，トーストの焼け具合はパンの色(色度検出器)で判別できるものとする．

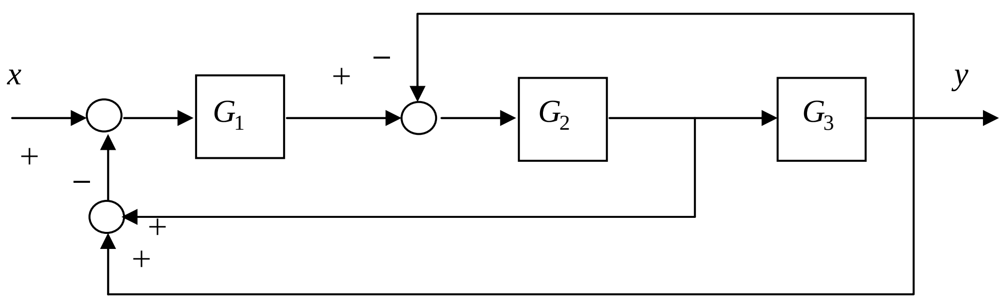
2-1　ブロック線図を単一のブロック線図に書き換えよ．

(a)



Ans.　$y/x = G_3(G_2 - G_1)/(1 + G_2G_3 + G_3G_4)$

(b)



Ans.　$y/x = G_1G_2G_3/(1 + G_2(G_1 + G_3 + G_1G_3))$

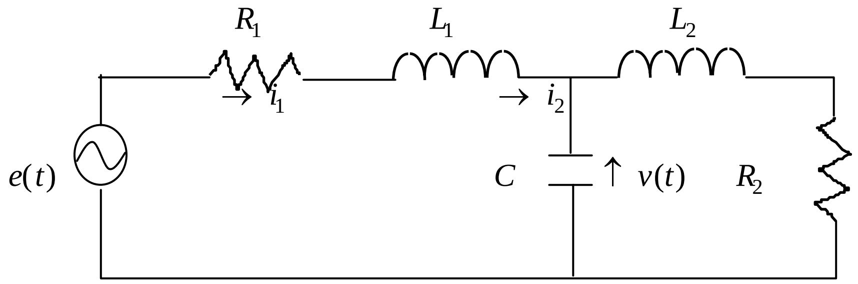
3-1　下記の微分方程式を解け．

(a)　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0,\quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0$

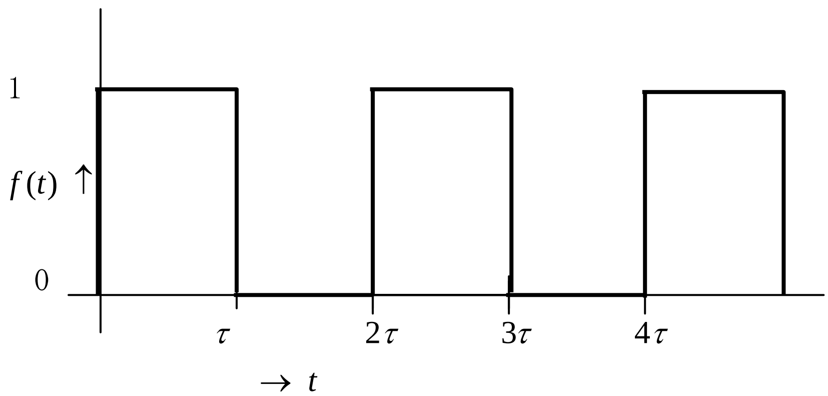
(b)　$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 1,\quad x(0) = 1,\ x'(0) = 1$

Ans. (a) $x(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}$, (b) $x(t) = \dfrac{1}{2} + 2e^{-t} - \dfrac{3}{2}e^{-2t}$

3-2　下図の電気回路の微分方程式を求めよ.



3-3　無限に繰り返される下図の周期関数のラプラス変換を求めよ.



Ans. $\dfrac{1}{s(1+e^{-\tau s})}$

3-4　つぎの微分方程式で記述される系のインパルス応答($x(t) = \delta(t)$に対する応答)を求めよ.

$$\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{dy}{dt} = x,\quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Ans. $y = 1 - \cos t$

3-5　つぎの関数を部分分数展開せよ.

(a) $\dfrac{5}{(s+1)(s+5)}$　　(b) $\dfrac{10}{s(s+2)(s+5)}$

(c) $\dfrac{10}{s(s^2+2s+10)}$　　(d) $\dfrac{2(s+2)}{s^2(s+1)(s+4)}$

Ans. (d) $\dfrac{1}{s^2} - \dfrac{3}{4s} + \dfrac{2}{3(s+1)} + \dfrac{1}{12(s+4)}$

4-1　問 3-2 の電気回路について入力eから出力vまでの伝達関数を求めよ.

Ans. $\dfrac{L_2 s + R_2}{L_1 L_2 C s^3 + (R_1 L_2 + R_2 L_1) C s^2 + (L_1 + L_2 + R_1 R_2 C) s + R_1 + R_2}$

4-2　つぎの連立微分方程式で記述される系がある.

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1 - bx_2 + u$$

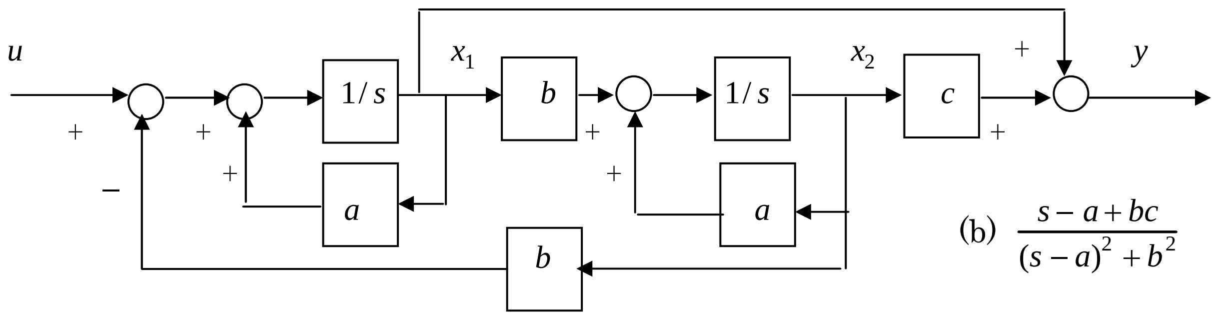
$$\frac{dx_2}{dt} = bx_1 + ax_2$$

系の出力を

$$y = x_1 + cx_2$$

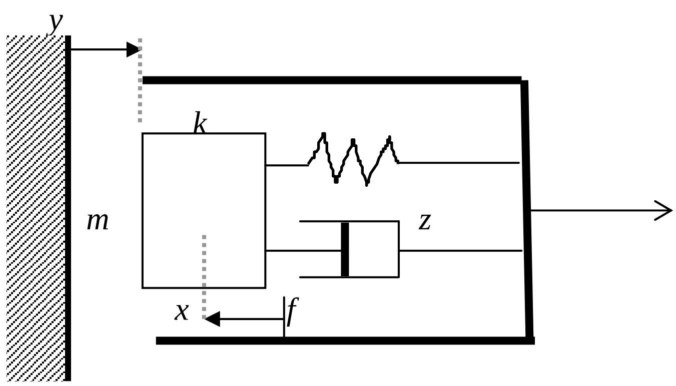
とする．(a) 比例要素と積分とからなるこの系のブロック線図を描け．(b) ブロック線図の等価変換(簡単化)により，入力uから出力yまでの伝達関数を求めよ．

Ans. (a)



(b) $\dfrac{s-a+bc}{(s-a)^2+b^2}$

4-3　下図は加速度計の原理図である．質量m[g]がばね(ばね定数k[dyn/cm])とダッシュポット(粘性抵抗係数f[dyn/cm/s])により枠と結合されている．枠が加速度z[cm/s^2]を受け，質量mの枠に対する変位をx[cm]とする．



(a) ばね力，粘性力を含む$z \to x$のブロック線図を求めよ．

(b) $z \to x$の伝達関数を求めよ．

ヒント：慣性系に対する枠の位置をyとすると，系の運動方程式は

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x-y) + f\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

また，$z = \ddot{y}$である．

5-1　問 4-3 について

(a) この系が振動的であるための条件を求めよ．

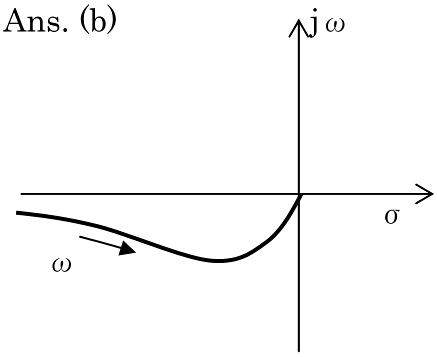
(b) 減衰率ςが 0.707 ($=1/\sqrt{2}$) となるための条件はどう表されるか．

5-2　つぎの伝達関数のベクトル軌跡と Bode 図を描け．

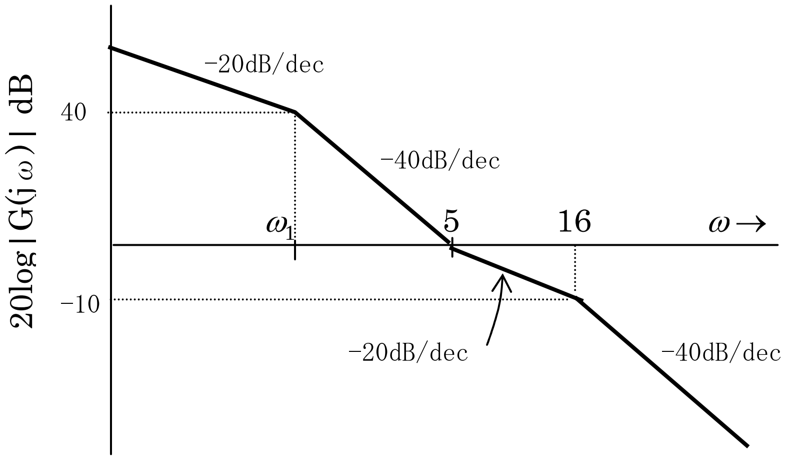
(a) $\dfrac{1}{(1+0.5s)(1+2s)}$　　(b) $\dfrac{1+0.5s}{s^2}$

(c) $\dfrac{2}{s^2(1+0.5s)(1+0.4s)}$　　(d) e^{-sL}

Ans. (b)



5-3　下図はボード線図の折れ線近似ゲインである．最小位相系であるとして，伝達関数を求めよ．



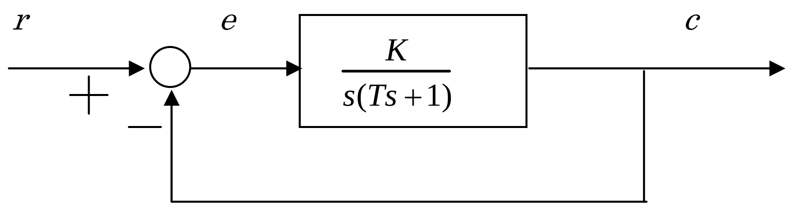
Ans.　$\dfrac{50(0.2s+1)}{s(2s+1)((1/16)s+1)}$

5-4　下図の系について

(a) 減衰率ςおよび固有周波数ω_nを求めよ．

(b) 行き過ぎ量[%]をK, Tで表せ．

(c) 系の周波数応答のゲインのピーク値M_pをK, Tで表せ．



5-5　周波数伝達関数

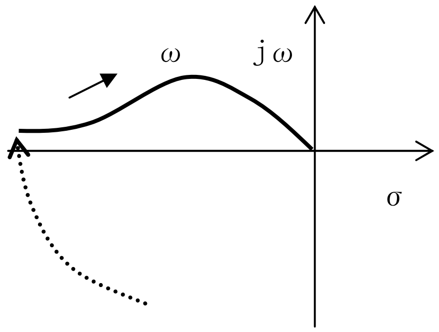
$$G(j\omega)=\frac{1+j\omega T_1}{1+j\omega T_2}$$

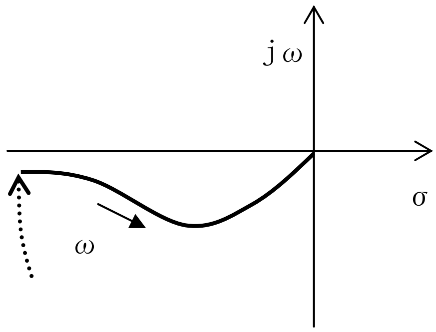
について，$T_1 > T_2$と$T_2 > T_1$の2通りの場合のボード線図の概形を描け．また，位相角（遅れあるいは進み位相）が最大となる角周波数を求めよ．

Ans.　教科書の(8.16)，(8.22)式を使うと，いずれも極値を与える角周波数は$1/\sqrt{T_1T_2}$

6-1　つぎの開ループ伝達関数を持つ系の安定性を Nyquist 安定判別法によりを吟味せよ．
ただし，$a > b > 0,\ K > 0$．

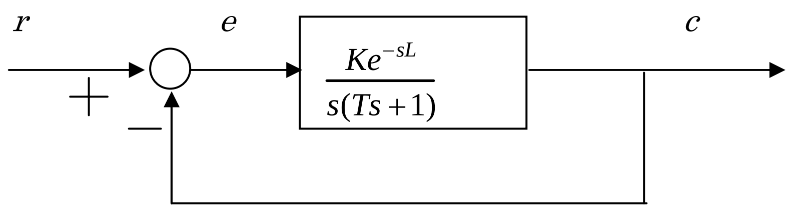
(a) $GH(s) = \dfrac{K(s+a)}{s^2(s+b)}$　　　(b) $GH(s) = \dfrac{K(s+b)}{s^2(s+a)}$





Ans.（a）すべてのゲインに対して不安定　　　（b）すべてのゲインに対して安定

6-2　下図に示す制御系が安定となるための K の範囲を求めよ．



ただし，$T = 1[\mathrm{min}],\ L = 0.1[\mathrm{min}]$.

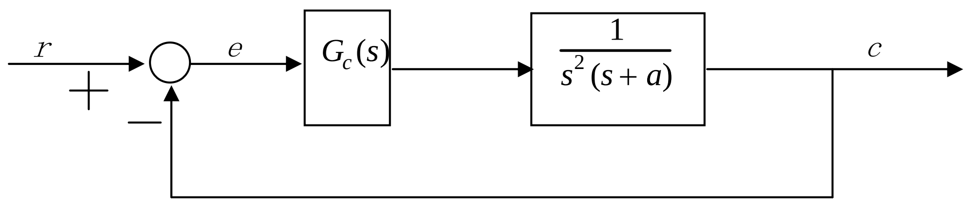
Ans．$0.1\omega + \tan^{-1}\omega = \pi/2$（この非線形方程式は逐次近似法などにより解ける．各自，近似解を求めてみよ）より $\omega \cong 3.1$．よって安定限界の K は

$$K = \omega\sqrt{1+\omega^2} \cong 10.1.\quad \therefore 0 < K < 10.1$$

6-3　下図に示す制御系は，ゲイン補償（$G_c(s) = K$）のみでは安定化することができない系である．G_c として

$G_c(s) = K(1+Ts)$，（PD 補償）

を用いたとき，系を安定化するには，K および T をどのように選べばよいか（ただし，$a > 0$）．また，そのときのベクトル軌跡の概形を描け．



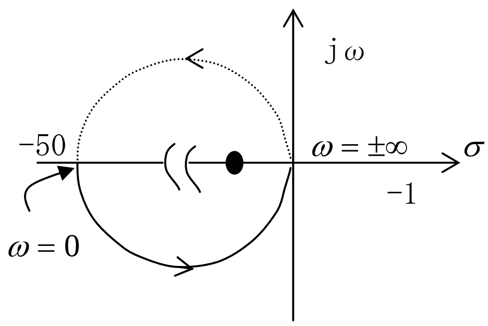
Ans．$T > 1/a$ とすればすべての K (>0)に対し安定（$T \le 1/a$ のときいかなる K に

対しても安定とはならない）．ベクトル軌跡は 6-1 の解答を参考とせよ．

6-4　つぎの一巡伝達関数をもつフィードバック系について Nyquist 線図を描き安定判別を行え．

$$GH(s)=\frac{20(s+5)}{(s-1)(s+2)}$$

Ans．下図より，$N=1$．GH の不安定な極数 P は 1．$N=P$ より安定．



6-5　開ループ伝達関数が

$$GH(s)=\frac{\sqrt{2}e^{-sL}}{s+1}$$

で与えられる系が安定限界となるときのむだ時間 L を求めよ．また，そのときのベクトル軌跡の概形を描け．

Ans．$L=3\pi/4$（L がこの値より大きくなると不安定になる）

6-6　開ループ伝達関数が

$$GH(s)=\frac{Ke^{-sL}}{s}$$

で与えれれる系について

（a）ゲイン交差周波数 ω_c と位相交差周波数 ω_π を K, L を用いて表せ．

（b）$\mathrm{GM}=6.02\,\mathrm{dB}$ になるための条件を求めよ．

（c）$5\mathrm{dB}\le\mathrm{GM}\le 10\mathrm{dB}$ および $20^\circ\le\mathrm{PM}\le 50^\circ$ となるための条件を求めよ．

Ans.（b）$LK=\pi/4$．（c）GM に関する条件より，$0.16\pi\le KL\le 0.28\pi$．これと，教科書演習問題 6.4 の解答と合わせ，$0.22\pi\le KL\le 0.28\pi$．

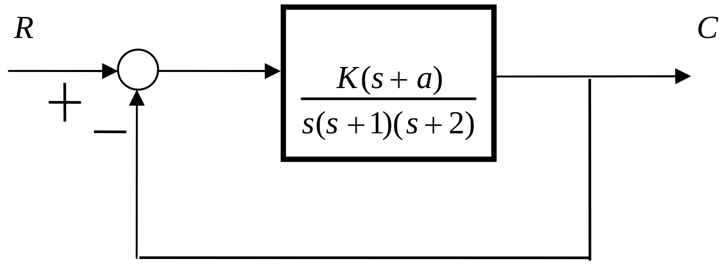
6-7　開ループ伝達関数が

$$GH(s)=\frac{K(T_2s+1)}{(T_1s+1)(s-1)^2},\quad T_1,\ T_2,\ K>0$$

で与えられる系が安定であるためには，T_1, T_2 のいずれが他より大きいことが必要か．

Ans．Hurwitz などより $K(T_2-T_1)-2-2T_1^2-2KT_1T_2+4T_1=K(T_2-T_1)-2(T_1-1)^2$ $-2KT_1T_2>0$．よって第 1 項が正であることが必要．$\therefore T_2>T_1$．

6-8　系が安定となるaの値の範囲を求めよ．また，この系を安定限界となるようにaを選んだときの特性方程式のすべての根を求めよ．ただし，$K=10$とせよ．

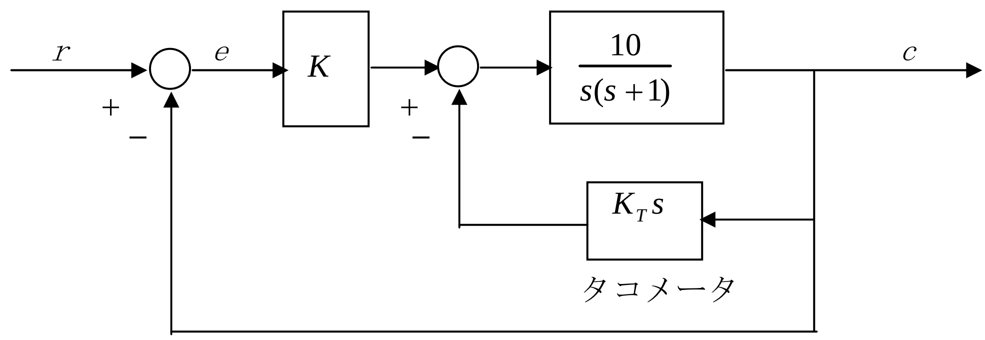


Ans.　$0<a<3.6$．特性根：$\pm 2\sqrt{3}j,\ -3$．

7-1　下図のタコメータフィードバックをもつサーボ系について，下記の条件を同時に満たすようにするには，$K,\ K_T$をどのように選んだらよいか．

(a)　定常速度偏差≤ 0.05．

(b)　減衰率$\varsigma = 0.5$．



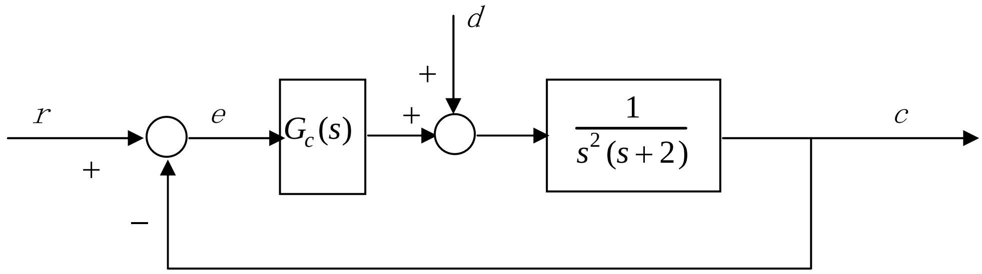
Ans.　$1+10K_T=\sqrt{10K}$ かつ $K \geq 40$．

7-2　下図の系について

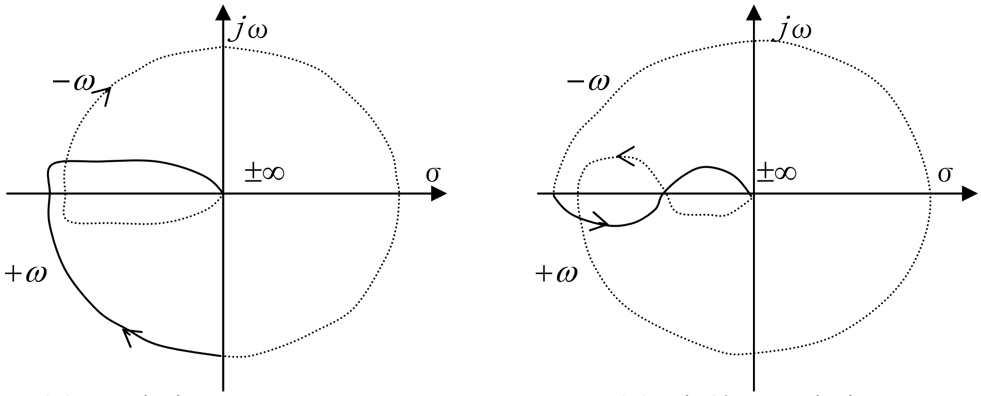
(a)　下記の補償要素を用いたときのベクトル軌跡の概形を描き，それぞれの場合の安定性について論ぜよ．

$$(1)\ G_c(s)=K, \quad (2)\ G_c(s)=\frac{K(1+2s)}{1+Ts},\quad K,T>0$$

(b)　(1)の補償要素を用いたとき，単位ステップ関数の外乱$d(t)$に対して，定常偏差を 0.2 にするためには（むろん系は安定でなければならない）KおよびTの値をどのように選べばよいか．



Ans. (a)



(1) 不安定　　　　　　　　　　(2) 条件つき安定

（$T \geq 1.5$では安定となるKは存在しない）

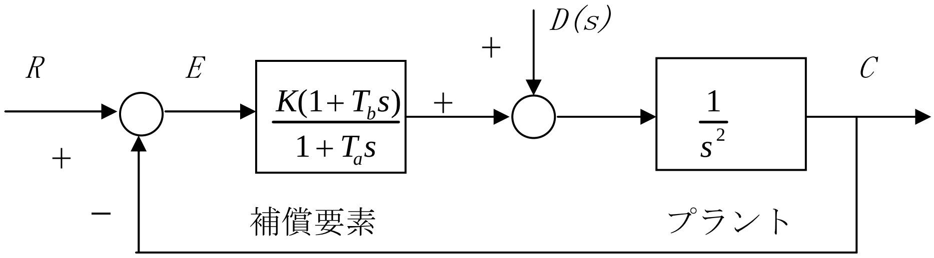
(b) 安定条件は $2T+1-KT>0,\ \ 4(2T+1)-(2T+1)^2-4KT>0$．定常偏差=0.2 より，

$K=5$ ． $\therefore K=5,\ T<\sqrt{19/4}-2 \cong 0.18.$

7-3　下図のフィードバック制御系についてつぎの問に答えよ．

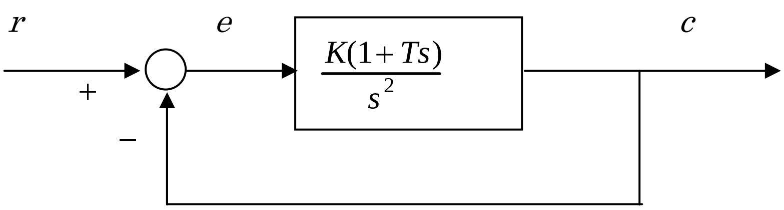
(a) 系を安定にするK，T_a，T_bに関する条件を示せ．補償は位相遅れか位相進みか．

(b) $T_a = 1/\sqrt{3}$とする．開ループ系のゲイン交差角周波数$\omega_c = 1$ rad/sかつ位相余裕が30°となるKとT_bを求めよ．このとき，単位ステップ関数の外乱$D(s)=1/s$に対する定常偏差はいくらか．この偏差を改善するためにKのみを増やしたとすると，ω_cと位相余裕はどうなるか．定性的に述べよ．



Ans. (a) 位相進み．(b) $K=1/\sqrt{3},\ T_b=\sqrt{3}$．定常偏差=$\sqrt{3}$ ． Kを大きくすれば，ω_cはいくらでも大きく，定常偏差はいくらでも小さくできるが，位相余裕が0に近づく．

7-4　下図のフィードバック系において，入力$r(t)=t^2$に対する定常偏差が$e=0.02$でかつ位相余裕を 45 度となるようにしたい．Tをどのように選べばよいか．



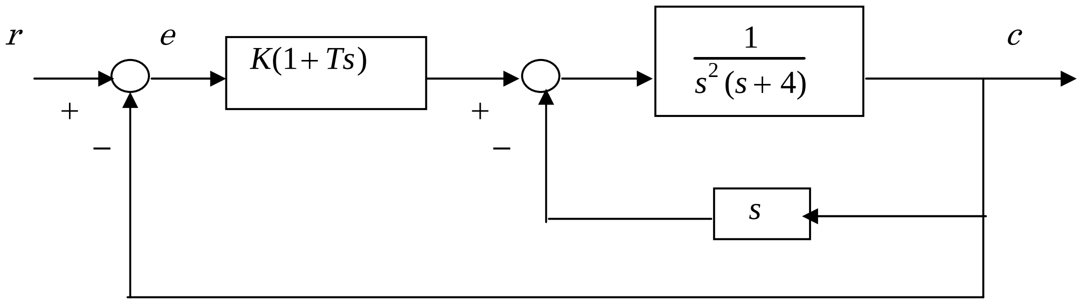
Ans. $T=0.0841$

7-5　下図の制御系についてつぎの問に答えよ．ただし，K, T は正数とする．

(a)　この系が安定であるためには，K, T はどのような条件を満たせばよいか.

(b)　$K \to \infty$ としてもこの系が安定であるためには，T をどのように選べばよいか.

(c)　この系の閉ループ極の一つを−2 とし，安定でかつ単位ランプ関数の入力 $r(t) = t$ に対する定常偏差を 0.1 となるようにしたい．このことが可能であることを示し，そのときの残りの極を求めよ．



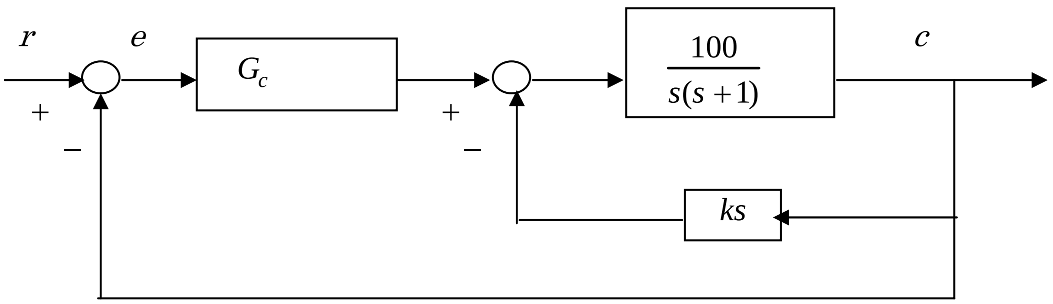
Ans.（b） $T \ge 1/4.$（c） $K = 10,\ T = 4/5.$（可能）．他の２つの閉ループ極は $-1 \pm 2j$．

8-1　下図の系について

(a)　$G_c(s) = 1$ とする．$k = 0$ のときの定常速度偏差，ステップ入力に対する行き過ぎ量[%]を求めよ．

(b)　行き過ぎ量を 30%以内におさえるためには k をいくらにすればよいか．またそのときの定常速度偏差を求めよ．

(c)　行き過ぎ量を(b)で得た値に保ったまま，定常速度偏差を(a)で得た値程度に小さくしたい．そのためには補償要素 G_c をどのように選べばよいか.



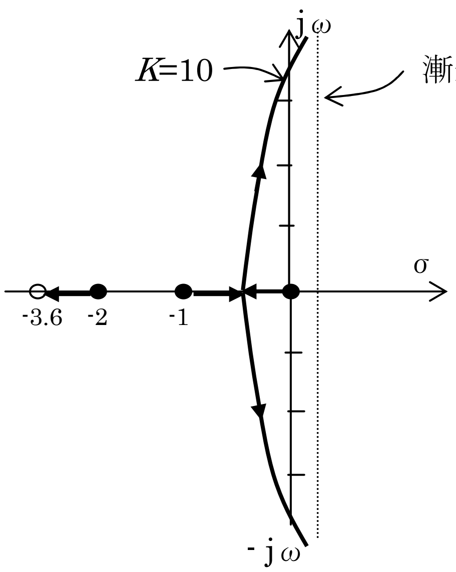
Ans.（a） $\omega_n = 10,\ 2\varsigma\omega_n = 1.\ \therefore \varsigma = 0.05.$　$\varsigma = 0.05$ に対する行き過ぎ量は教科書の(5.66)式から85%．定常速度偏差は 0.01．（b）行き過ぎ量を 30%以内におさえるためには，$\varsigma \ge 0.37$．そのためには，$k \ge 0.064$．いま $k = 0.07$ とおくと，$\varsigma = 0.4$．このとき，定常速度偏差は0.08（(a)の８倍）．（c）位相遅れ補償を行えば行き過ぎ量を変えずに定常速度偏差のみを小さくできる．すなわち

$$G_c(s) = K\frac{1+Ts}{1+\beta Ts},\quad \beta > 1$$

たとえば$\beta = 10$, $K = 10$, $T = 2$とすると（Bode 線図の）高周波領域は変わらず低周波領域のゲインが 10 倍に上がる（教科書の p. 178, 179 の説明を見よ）．このとき，定常速度偏差は$(100k+1)/1000 = 1/125 = 0.008$.

8-2　問 6−8 のフィードバック系について，aを問 6−8 で求めた安定限界の値とする．このとき，　$0 < K < \infty$に対する根軌跡の概形を描け．

Ans.

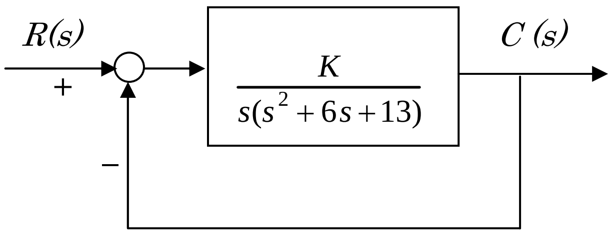


8−3　下図のフィードバック系についてつぎの問に答えよ．

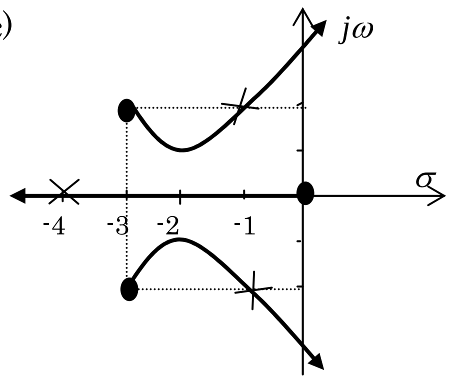
（a）系が安定であるためのKの範囲を求めよ．

（b）系の特性方程式がその実部が−1 であるような一対の共役複素根をもつためのKの値を求めよ．また，このときの特性根のすべてを求めよ．

（c）系の根軌跡を描け．また，(b)で求めた特性根の根軌跡上における位置を示せ．



(c)



×印が K=20 における特性根の位置

Ans.（a）$(0 <)K < 78$.

（b）$K = 20$．特性根は $-1 \pm 2j, \; -4$