システム制御

第１回　基礎数学(ラプラス変換)

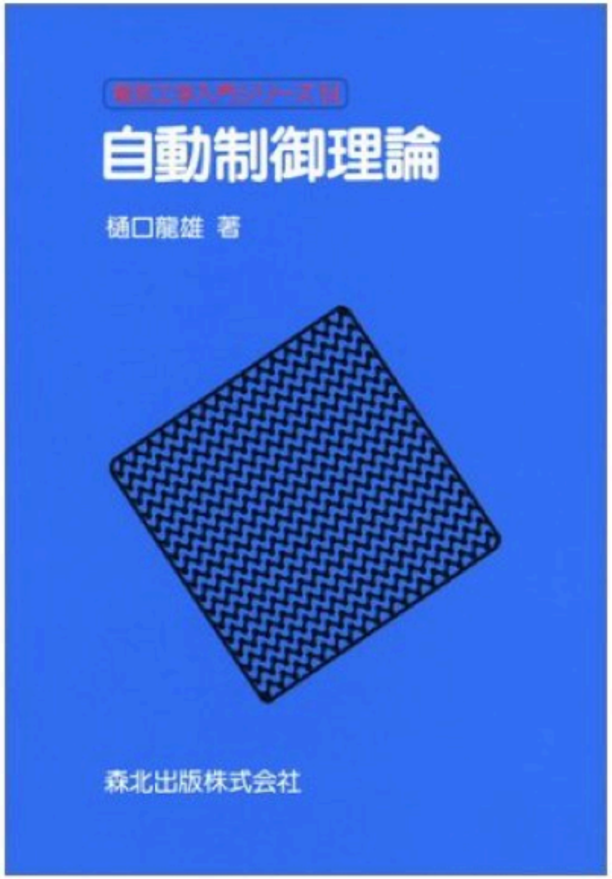
張山昌論

私の連絡先

- 張山昌論 (はりやままさのり)
- メールアドレス: hariyama@tohoku.ac.jp
- 居室: 3号館 308号室 (地下鉄青葉山駅の後ろ)
  (出張がちなので事前にアポイントいただけますよう)
- 電話: 022-795-7153

教科書

- 自動制御理論
- (樋口龍雄，森北出版)
  - わかりやすく，コンパクト，丁寧に書かれているので，自習も可能．



資料について

- 張山のホームページ
  http://www.ecei.tohoku.ac.jp/hariyama/
  の授業のページからプレゼンテーションの資料(PDF形式)をダウンロードできます．できるだけ前日までにアップロード予定.
  授業に持ち込むことを推奨.

※教科書のエッセンスを抽出しているので,
教科書よりは内容が少ないです．テスト前は
教科書を見直すこと.

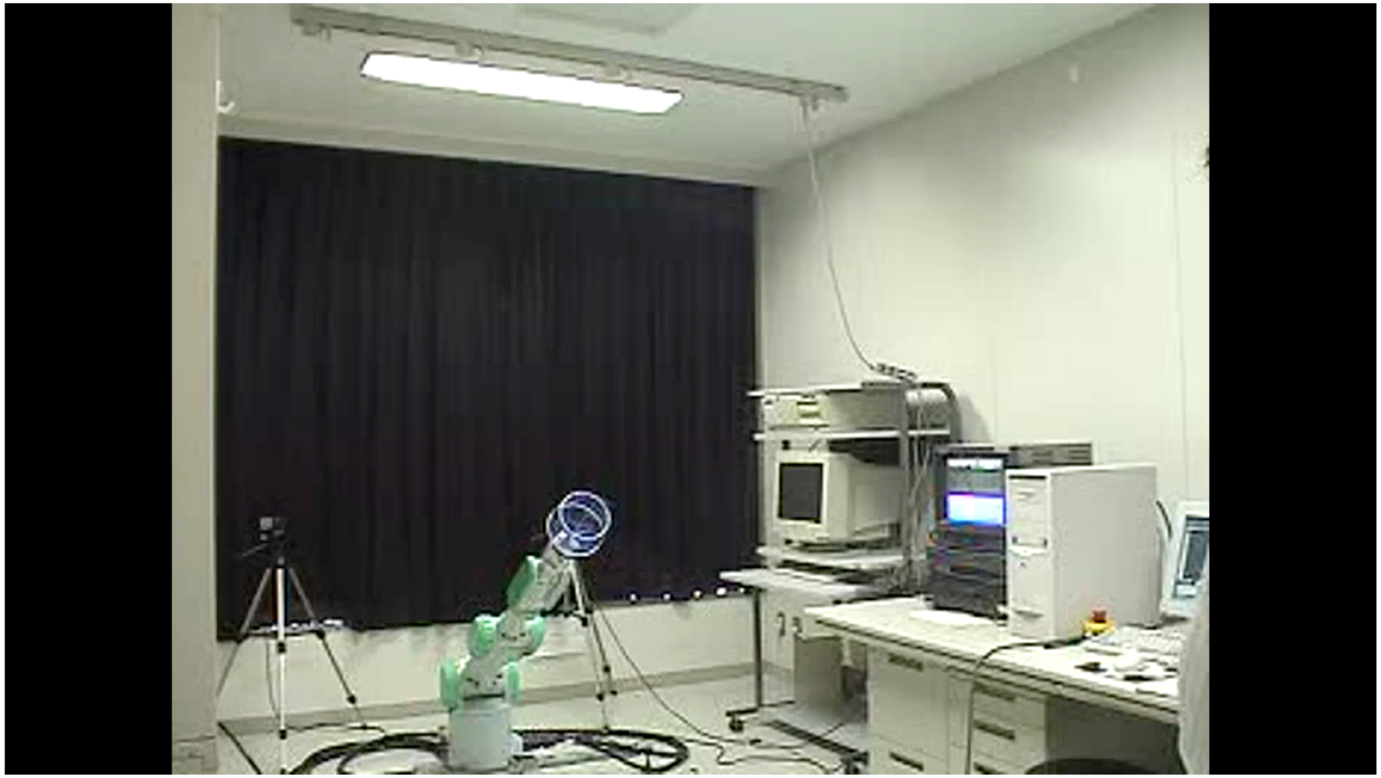
今日の内容

1. 制御工学の概要
2. 基礎数学

1. 制御工学の概要: 制御とは

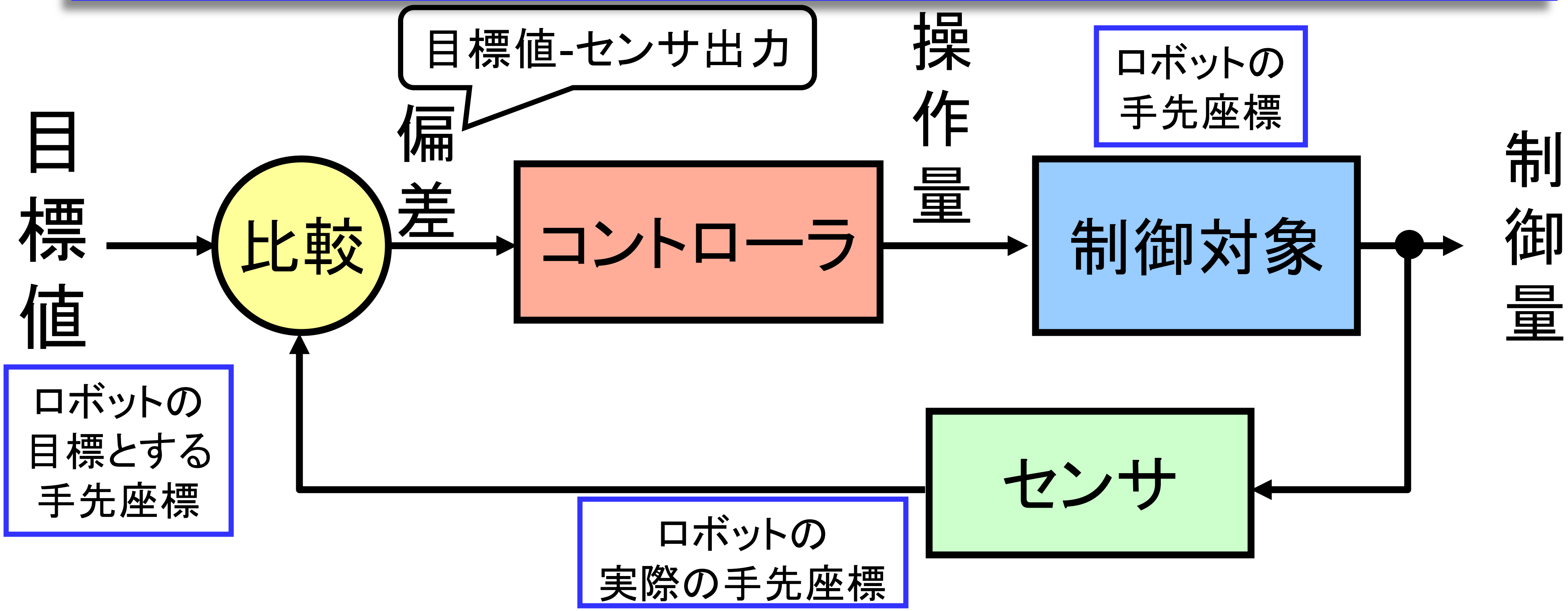
- 対象の状態を目標に「合わせる」, 「保つ」こと
- 制御対象の例
  - ロボット
  - 電子回路
  - 化学プラント
  - 原子炉
  - エアコン

制御対象の例：ロボット



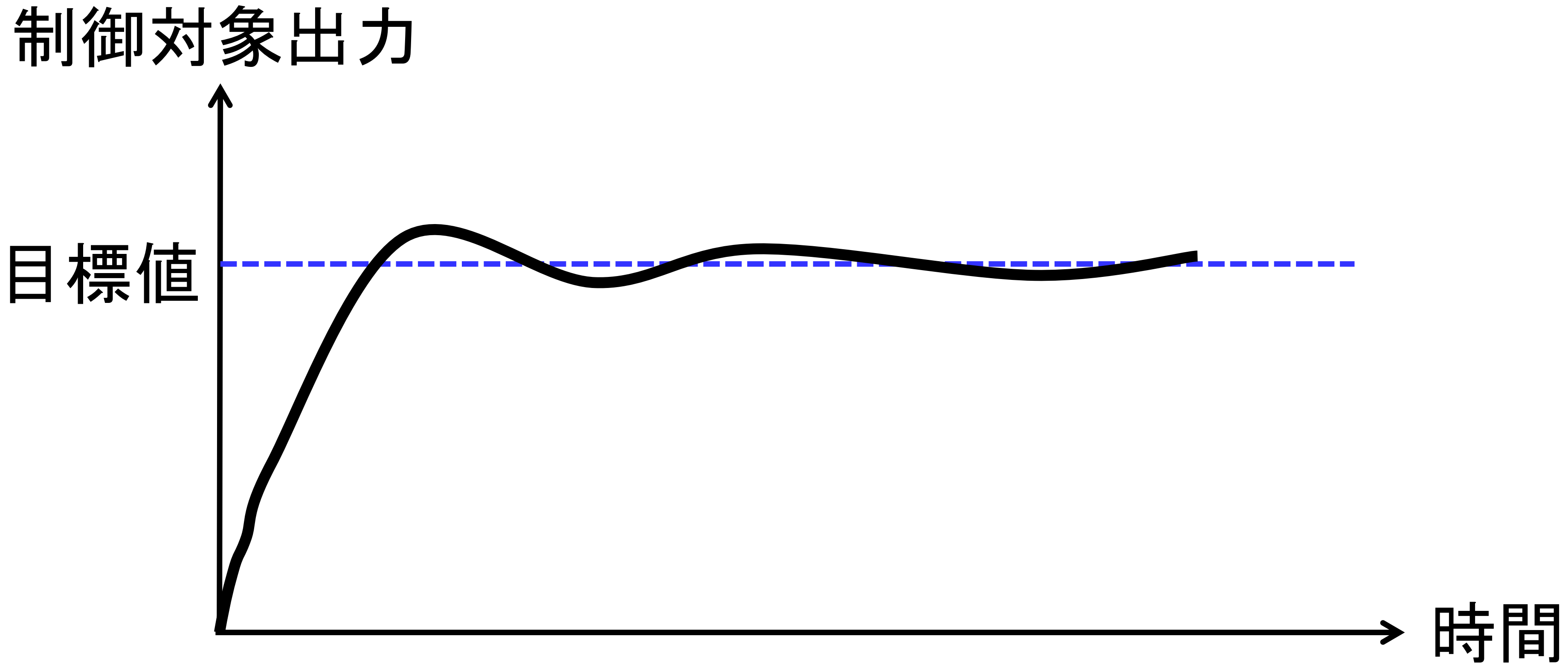
ボールの位置計測
→　軌道計画
→　位置目標値にハンド位置を「合わせる」

フィードバック制御系の構成要素



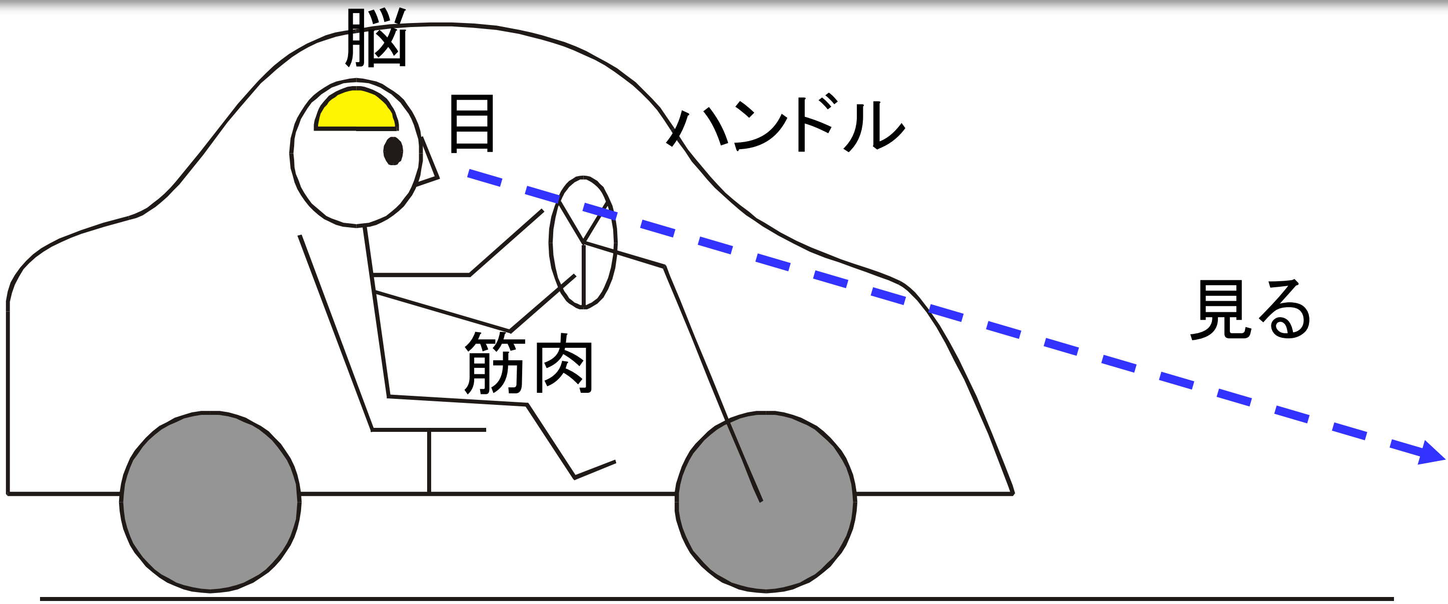
- 制御量: 制御したい量(モータの回転角度など)
- 操作量: 制御対象へ加える量(モータの電圧など)
- 目標値: 制御量の目標とする値
- 偏差: 目標値と制御量の差 (偏差=目標値 — 制御量)

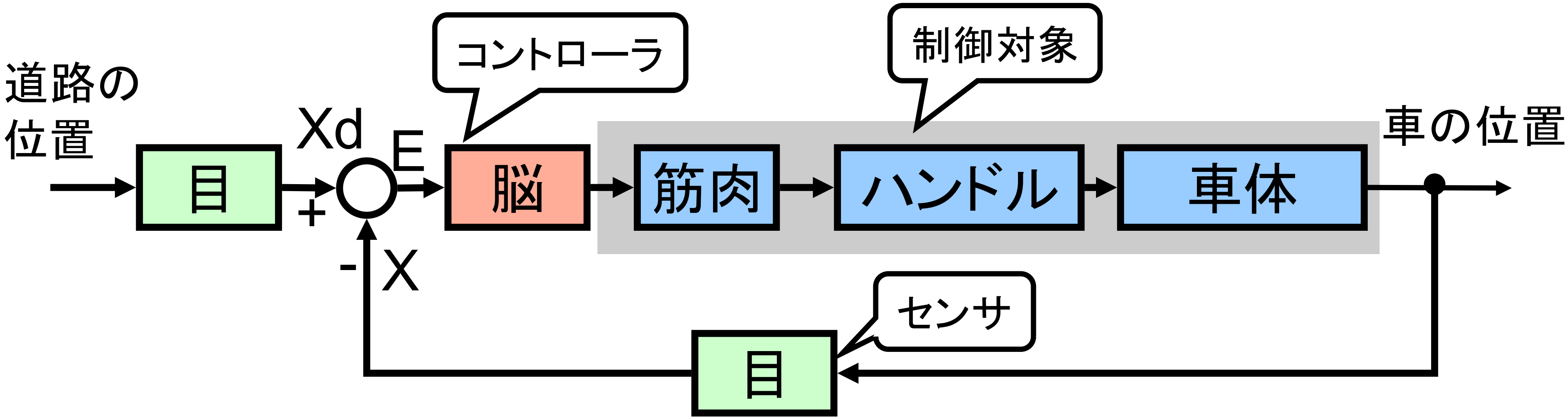
フィードバック制御系の動作イメージ



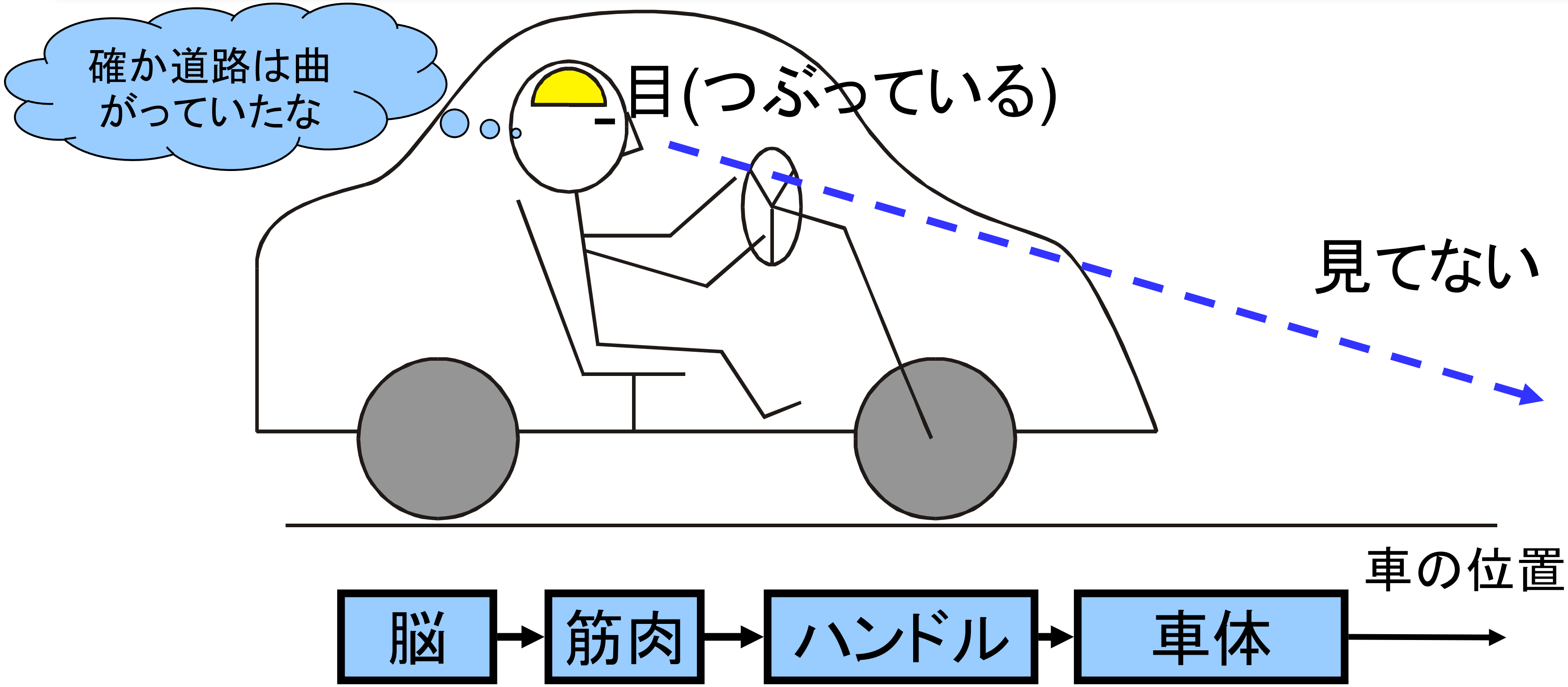
目標値と制御対象の出力を比較
→ 偏差に基づき，制御対象出力を目標値に近づける制御量を
コントローラが発生
→最終的に目標値に近づく

フィードバック制御の例：車の運転





フィードフォワード制御(授業では扱わない)

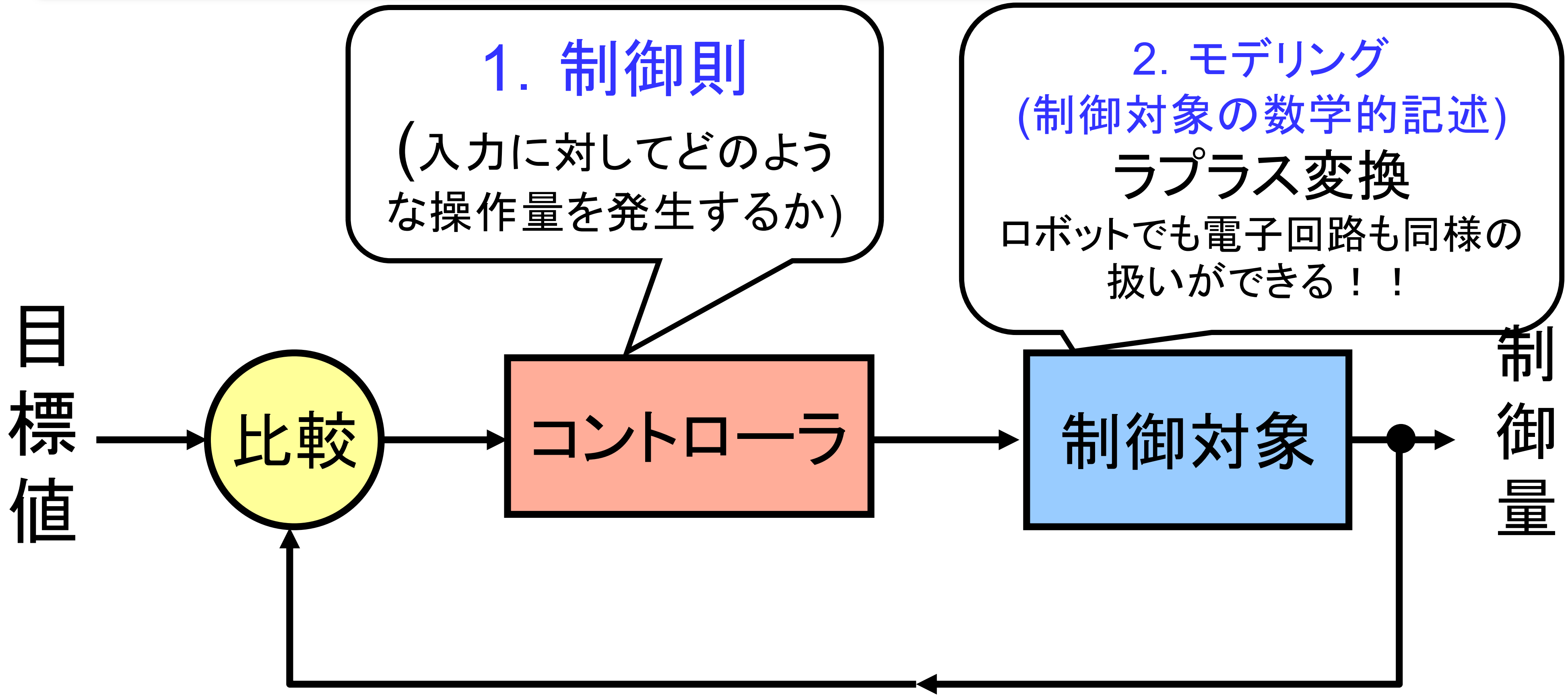


目からの信号のフィードバックがない!!
記憶している道路のモデルに基づき制御

信号を戻す必要がない⇒高速レスポンス

モデルにない情報には対応できない(人間が歩いているなど)

制御工学の目的:「制御系の設計」



望ましい状況に制御対象を保つ
(安定性，速応性，定常偏差)

2. 基礎数学

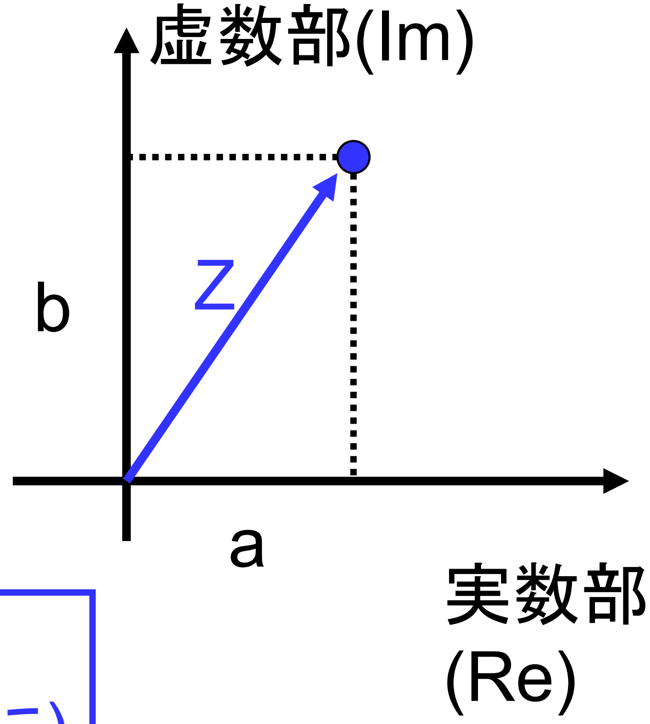
ユーザーの立場で勉強します

複素数(直交形式)

実数部と虚数部からなる数

$Z = a + \boldsymbol{j}\,b$

計算を簡単にするための表現方法
(要するにベクトル)



数学では虚数単位として *i* を使うが,
工学で**j**を使う (電流 i と混同しないように)

複素数(極座標形式)

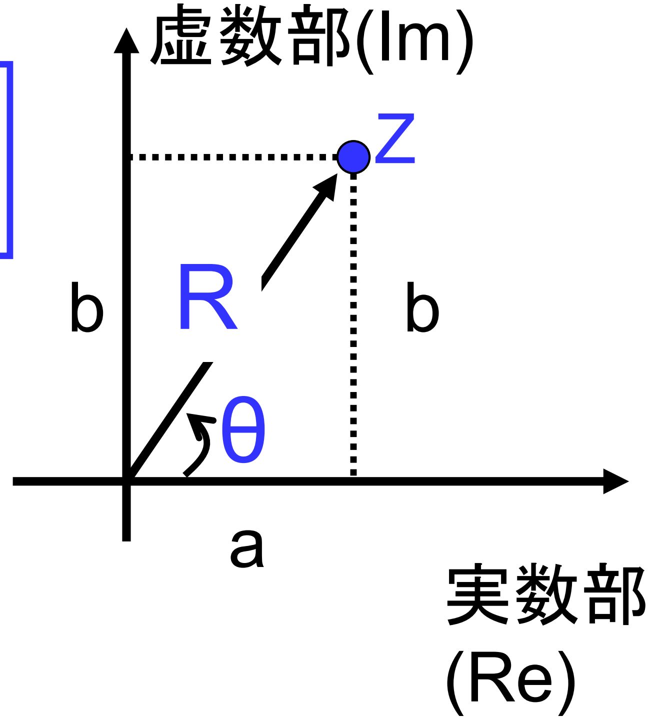
大きさ(振幅)と,
実軸と複素ベクトルの角度(位相)で表現

$$Z = R\, e^{j\theta}$$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2}$$

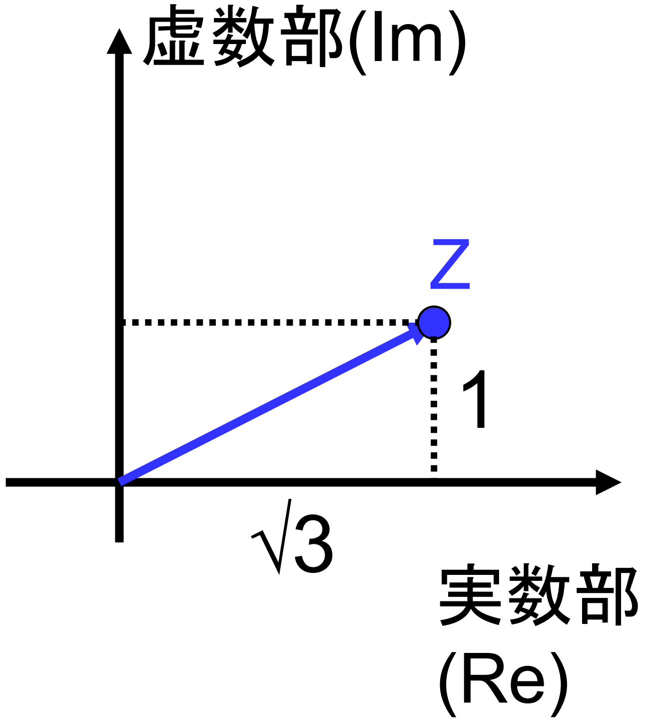
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

※後で補足



オイラーの公式: $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$

問題



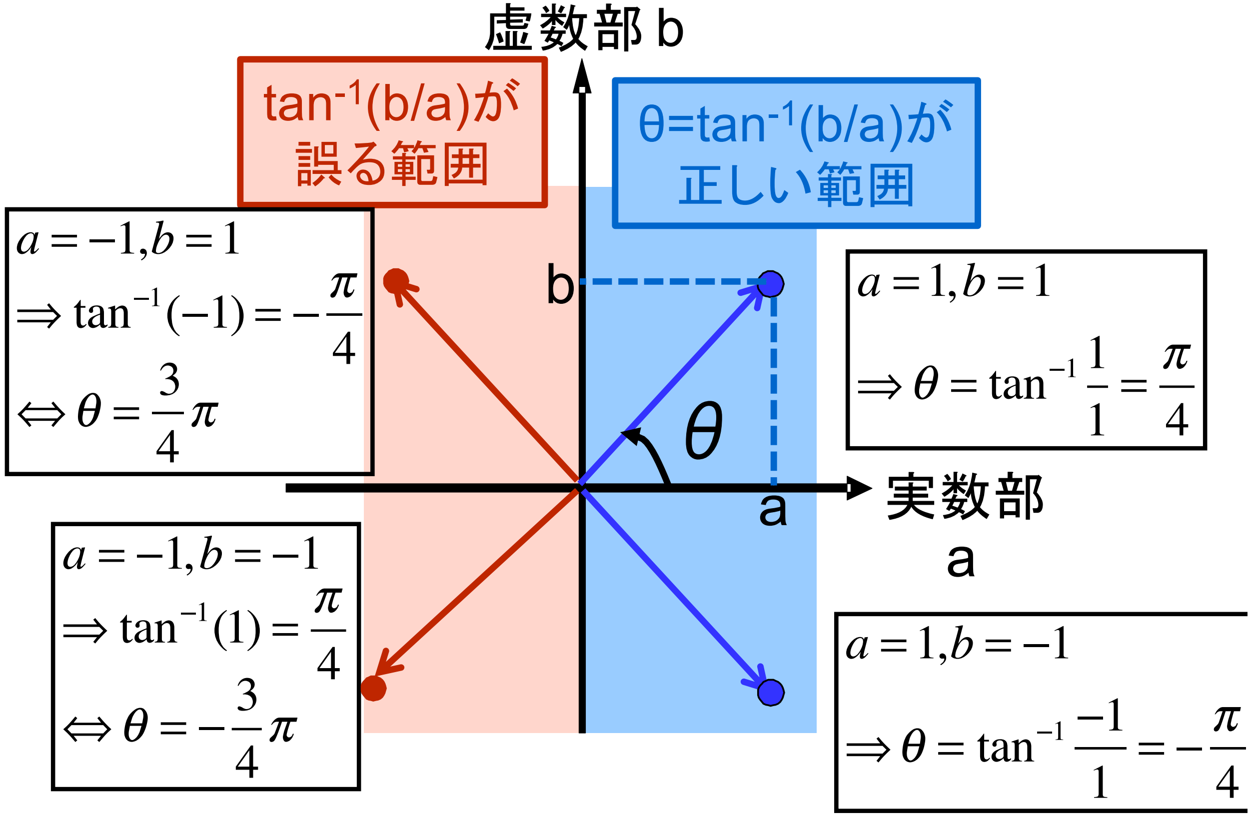
右図の複素数zを直交表現
および極座標表現で表しなさい

補足：位相を求める際には, a,bの値に注意

arctangentの範囲は

$$-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

0≦a のときに
正しく機能する



0≧a のときにどうする?

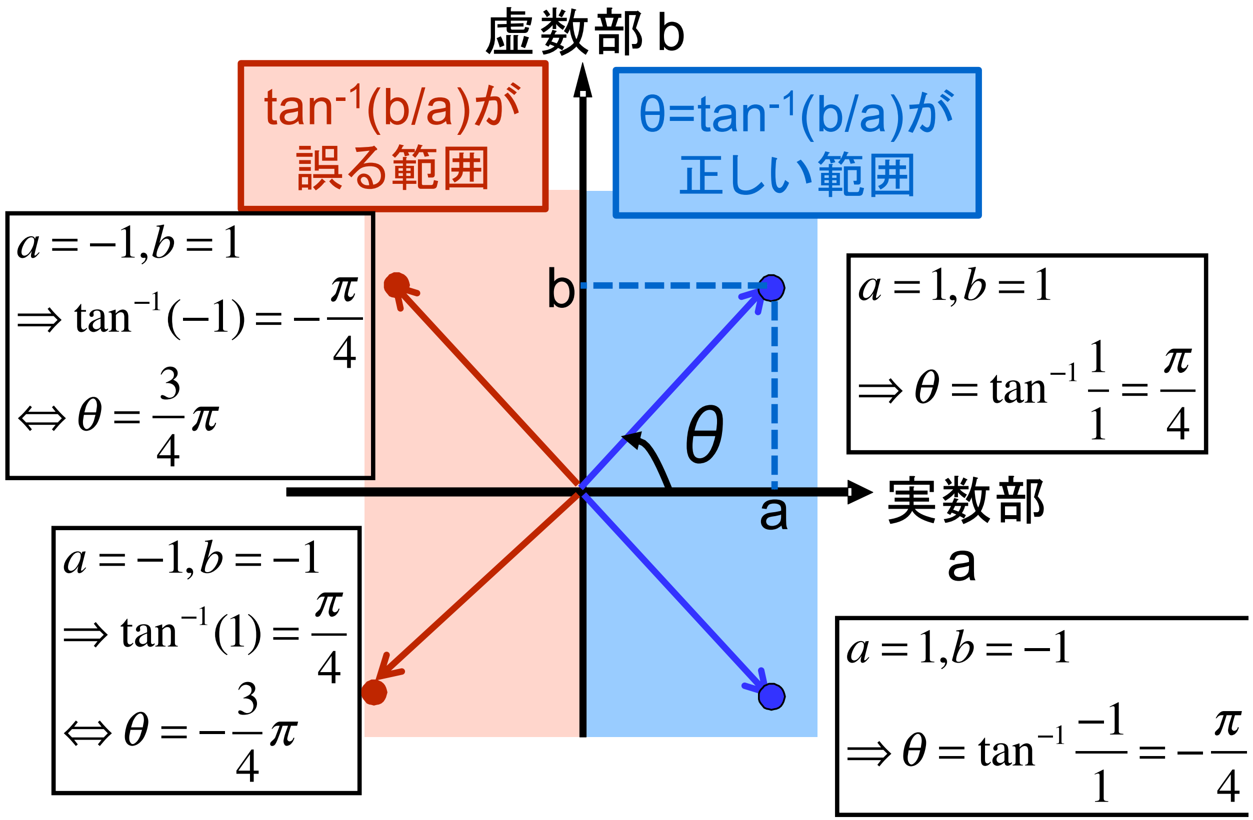
(補足)位相を求める際の0≧aの場合

■ 0≧a, 0≦bの場合

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} + \pi$$

■ 0≧a, 0 ≧ bの場合

$$\theta = \tan^{-1}\frac{b}{a} - \pi$$



ラプラス変換

- 微分方程式を簡単に解くための手法
- 制御では，システムの入力・出力の関係を表す伝達関数を表現するために用いられる

入力 u(t) → システム → 出力 y(t)

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 u(t)$$

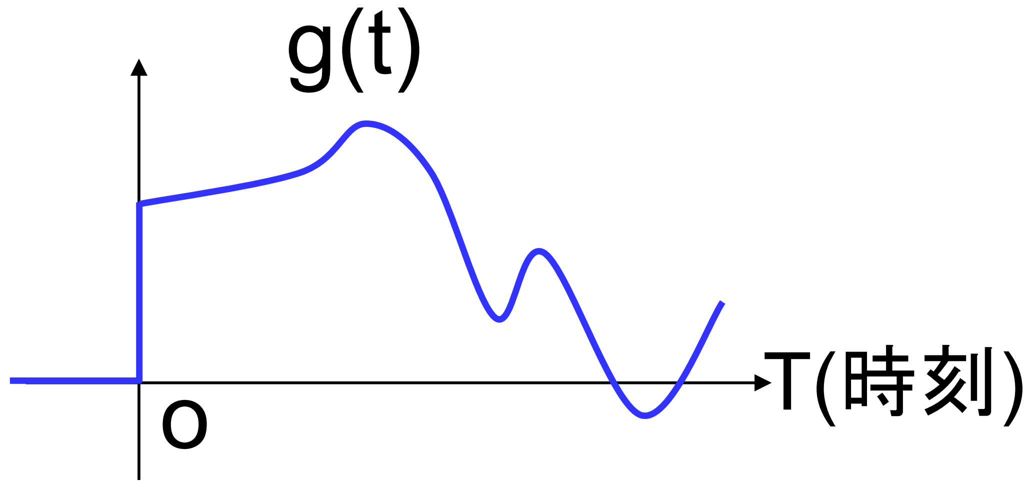
通常n≧m

物理的なシステムの入出力関係は通常微分方程式で表現できる

⇨ ラプラス変換で簡単に扱える

ラプラス変換の対象となる信号

時間領域での信号 g(t)



ただし，g(t)=0 (t<0),

ラプラス変換（変換式は覚えなくていい）

時間関数f(t)のラプラス変換は

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

ここで，s=σ+ *j* ω　(ω:角周波数)

ちなみに，ω=2πf.
f[Hz]は周波数.1秒間に1回振動すると1[Hz]

定義は複雑だが，変換表(51ページ)を使うので，使うのは難しくない！！(積分する必要はない)

ラプラス逆変換(変換式は覚えなくていい)

ラプラス関数F(s)の逆ラプラス変換は

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{r-j\omega}^{r+j\omega} F(s)e^{st}ds$$

ここで，r は積分が収束するように適当に定めた定数

ラプラス変換よりさらに難しそうだが，
実用上は変換表を使うので，難しくない！！
(積分する必要はない)

時間領域とS領域の関係

時間領域 　　　　　　　　　　s領域

ラプラス変換

$f(t) \rightleftarrows F(s)$

逆ラプラス変換

微分方程式を解くのがとても大変 (@_@;)

S領域では，微分方程式がとても簡単に解ける d(^_^o)

変換表の見方(51ページ)

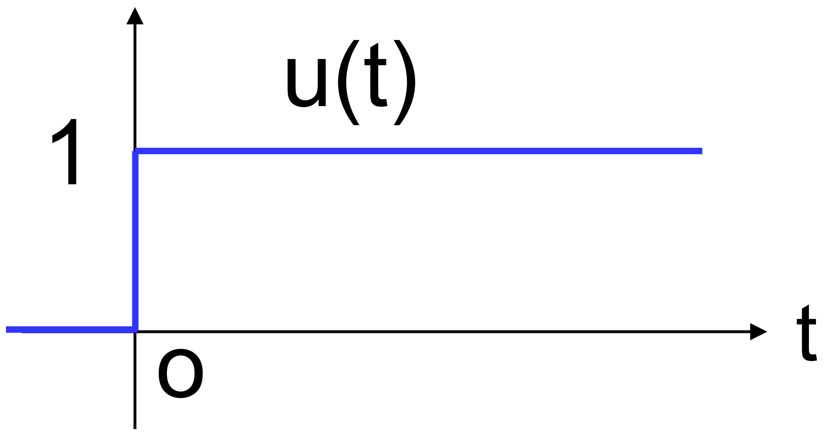
	f(t)	F(s)
	ラプラス変換 → / ← 逆ラプラス変換	
(1)	δ(t) （デルタ関数，インパルス関数）	1
(2)	1またはu(t) （単位ステップ関数）	$\frac{1}{s}$
(3)	tまたは(tu(t))	$\frac{1}{s^2}$

x<0⇒f(t)=0を意味する．ようするに t

(1),(2),(3),(5),(6),(8)は覚えてね!

単位ステップ波形とは？

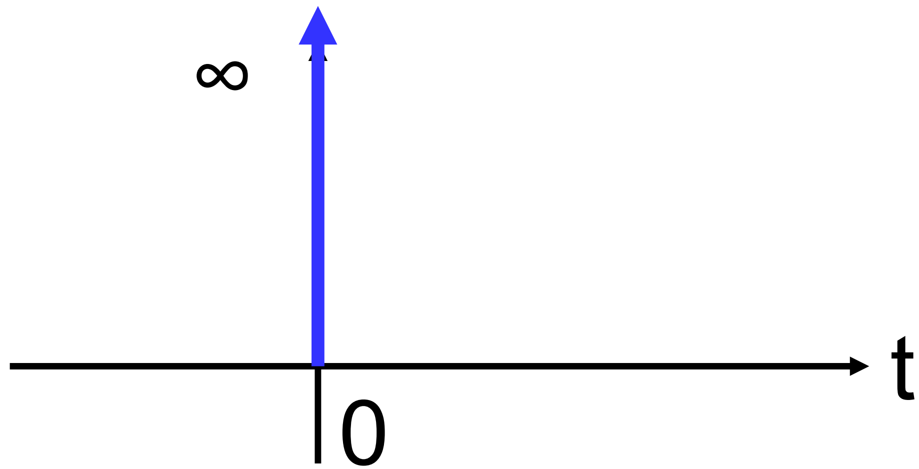
$$u(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$



t=0でステップ(階段状に波形が立ち上がっている)

デルタ関数δ(t)

$$\sigma(t) = \begin{cases} \infty \ (t = 0) \\ 0 \ \ (t \neq 0) \end{cases}$$



時刻tにおいて一瞬だけ∞になるインパルス波形

伝達関数を調べるために使われる

1. 変換表（1）の演習

(ア) $f(t)=5\delta(t)$ をラプラス変換せよ.

(イ) $F(s)=3$ を逆ラプラス変換せよ.

2. 変換表（2）の演習

(ア) $f(t)=5$ をラプラス変換せよ.

(イ) $F(s)=\frac{3}{s}$ を逆ラプラス変換せよ.

3. 変換表（3）の演習

(ア) $f(t)=5t$ をラプラス変換せよ.

(イ) $F(s)=\frac{5}{s^2}$ を逆ラプラス変換せよ.

4. 変換表（5）の演習

(ア) f(t)=e^{-5t}をラプラス変換せよ.

(イ) F(s)=$\frac{10}{2s+4}$ を逆ラプラス変換せよ.

5. 変換表（6）の演習

(ア) f(t)=$3te^{-5t}$をラプラス変換せよ.

(イ) F(s)=$\frac{4}{(s+3)^2}$ を逆ラプラス変換せよ.

6. 変換表（8）の演習

(ア) F(s)=$\frac{3}{(s+1)(s+2)}$を逆ラプラス変換せよ.

7. 時間遅れの定理

(ア) f(t)=5(t-3)をラプラス変換せよ.

ラプラス変換の定理1，2

1．加法定理

$$L[\, f_1(t) + f_2(t) \,] = L[f_1(t)]+L[f_2(t)]$$

2．定数倍

$$L[\, K\, f(t) \,] = K\, L[\, f(t) \,]$$

ここら辺は，積分の性質から直感的にわかる

定理3：微分関数のラプラス変換

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sL[f(t)] - f(0) = sF(s) - f(0)$$

f(t)の微分のラプラス変換
⇒ ラプラス変換してsをかける
(初期値f(0)=0のとき)

これは直感的にはわからない．暗記する．

定理3の補足:n回微分のラプラス変換

$$L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = ?$$ (52ページ公式3.48(b))

$g(t)=\dfrac{df(t)}{dt}$ と置く ⇒ $L\left[\dfrac{d^2 f(t)}{dt^2}\right]=L\left[\dfrac{dg(t)}{dt}\right]$

$$=sL[g(t)] - g(0)$$ (1回微分の定理より)

$$=sL\left[\frac{df(t)}{dt}\right] - g(0)$$

$$=s^2 F(s) - sf(0) - \frac{df(0)}{dt}$$

(1回微分の定理より)

定理3の補足：n回微分のラプラス変換

初期値が0の時

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$$

f(t)のn回微分のラプラス変換
⇒ sのn乗にF(s)をかける

定理4:積分関数のラプラス変換

$$L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$$

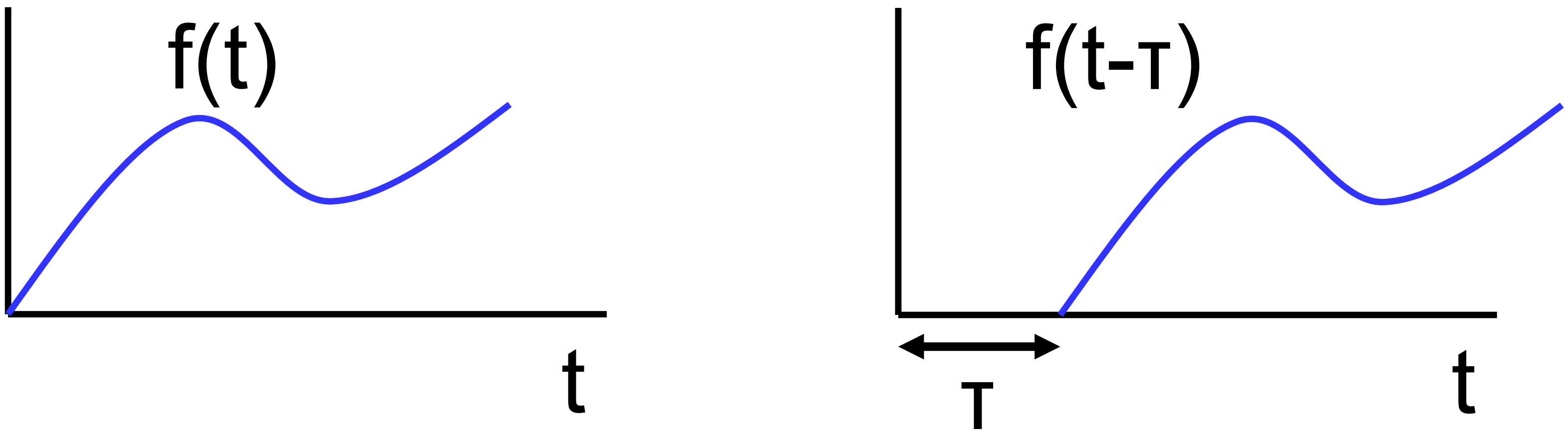
1重積分⇒sで割る

$$L\left[\int_0^t\int_0^t\cdots\int_0^t f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

n重積分⇒s^nで割る

定理5：時間遅れ

$$L[\,f(t-\tau)\,] = e^{-\tau s}F(s)$$



時間領域でτ遅れ ⇒ $e^{-\tau s}$をかける

ここまでの定理はぜひ覚えておいた方がよいです

定理6：たたみ込み

$$\boxed{L\left[\int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]=G(s)X(s)}$$

ここで，G(s)=L[g(t)]，X(s)=L[x(t)]

複雑なたたみ込み積分⇒ラプラス関数の積！！

定理6は必要に応じて覚える
(こんな関係があったなあ，程度でOK)

定理7:最終値の定理

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

f(t)の定常状態の値をs領域で求めることができる

この定理はぜひ覚えておいた方がよいです

部分分数展開:1位の極

公式の詳細は教科書の57ページを見てください

$$\boxed{F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}}$$

変換表を用いて逆変換をできない⇒部分分数展開

F(s)の分母が0になるsの値を“極”という

例:s= -1,-2

aがF(s)の極である⇒分母は(s-a)を含む

分母が$(s-a)^n$の項を有する⇒aはn位の極である

変数を用いて部分分数に分ける

$$F(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

Aを求める⇒両辺にs+1 (Aの分母)をかける⇒Aだけ残す

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)}(s+1)=\frac{A}{s+1}(s+1)+\frac{B}{s+2}(s+1)$$

$$\frac{s}{(s+2)}=A+\boxed{\frac{B}{s+2}(s+1)}$$ 0になる

s=-1 (Aの分母を0とする局)を代入 ⇒ A=-1

Bを求める⇒s+2(Bの分母)をかけて,s=-2とする

(続き)変数を用いて部分分数に分ける

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Bを求めてみよう

両辺にs+2(Bの分母)をかける

両辺にs=-2(Bの分母を0にするsの値)を代入

B=

演習1：変換表を使ってみよう！

次の微分方程式をラプラス変換を使って解け

$$\frac{df(t)}{dt} + 3f(t) = 3 \quad (\text{ただし，} \; t \geq 0, f(0) = 0)$$

1. 微分方程式をラプラス変換をしてみよう(変換表および定理を使う)

(つづき)例題：変換表を使ってみよう！

2. $F(s)$を求めてみよう. 部分分数展開まで行う

(つづき2)例題：変換表を使ってみよう！

3. 逆ラプラス変換をしてみよう(変換表を使う)

（時間があればやる）
部分分数展開：2位以上の局

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

第一関門：変数を用いて
部分分数に分ける

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

n位の極⇒1位～n位の極の項を用意

部分分数展開:2位以上の極

$$\frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

A⇒両辺にsをかけて，s=0とする

C⇒両辺に$(s+1)^2$をかけて，s=-1とする

B⇒両辺に(s+1)をかけて，s=-1とする？⇒無理

$$\frac{1}{s(s+1)^2}(s+1) = \frac{A}{s}(s+1) + B + \frac{C}{\boxed{(s+1)}}$$

s=-1⇒分母が0⇒∞

Bだけ取り出すには？微分

両辺に$(s+1)^2$ ⇒分母から$(s+1)$を消す

$$\frac{1}{s}=\frac{A}{s}(s+1)^2+B(s+1)+C$$

Cが消えた！！

微分

$$-\frac{1}{s^2}=\frac{d}{ds}\left[\frac{A}{s}(s+1)^2\right]+B$$

s+1の2乗⇒1回微分では(s+1)の項が残る⇒s=-1のとき0

s=-1

-1=B