システム制御

資料3

張山昌論

資料について

■張山のホームページ

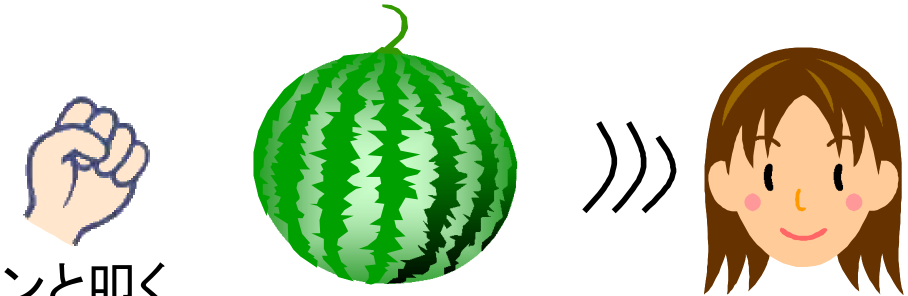
http://www.ecei.tohoku.ac.jp/hariyama/

の授業のページからプレゼンテーションの資料(PDF形式)をダウンロードできます．できるだけ前日までにアップロード予定．授業に持ち込んで下さい．パソコン，ipadなどで持ち込んでいただいてもよいです．

※教科書のエッセンスを抽出しているので，教科書よりは内容が少ないです．テスト前は教科書を見直すこと．

最初の問題は解決したか？

よいスイカかどうかを調べるには？



コツンと叩く

耳で音を聞く

インパルス波形

インパルス応答 g(t)
(伝達関数の時間領域表現)

システムを数学的に表現できた(伝達関数G(s)を求めた)

でも，よいシステムかどうか(“よいスイカかどうか”)はわかってない

周波数伝達関数

教科書では，4章で周波数伝達関数⇒伝達関数の順で説明してます．授業では，より理解が簡単になるように伝達関数⇒周波数伝達関数の順で説明してます．

周波数特性とは

入力

$x = \sin(\omega t)$ ⇒ “線形”システム ⇒ 出力 $y = A \sin(\omega t + \theta)$

いろいろな角速度ω[rad/sec]の正弦波信号を入力
⇒出力の振幅比A(ゲイン)は？，位相θは？を調べる

対象：線形システム(P.7～)

■因果性

- 入力より以前に出力が生じない

■時不変性

- 入力$x(t)$に対して出力$y(t)$
  $\Rightarrow$ 入力$x(t-\tau)$に対して出力$y(t-\tau)$

■線形性

入力$x_1 \Rightarrow$出力y_1　　　入力$x_2 \Rightarrow$出力y_2

$A^* x_1 + B^* x_2$ ⇨ システム ⇨ $A^* y_1 + B^* y_2$

なぜ正弦波(余弦波)を用いて調べるの？

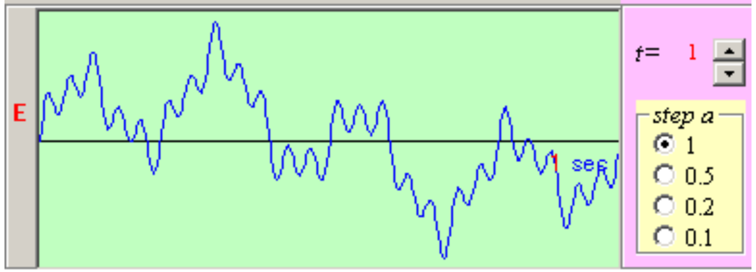
(要注意：わかりやすくするために大まかな説明してます)

■フーリエ変換の基本概念

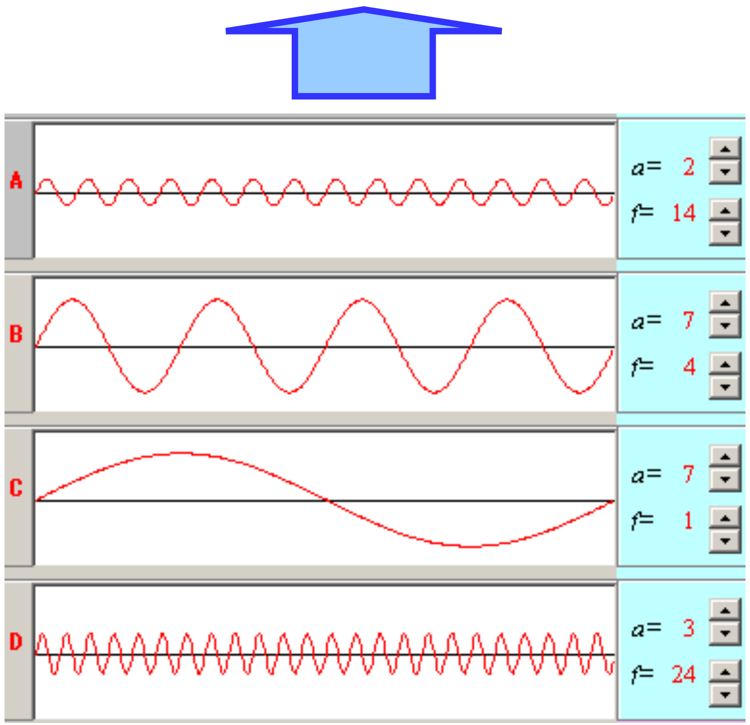
どんなに複雑な波形でもでも正弦波の合成で表現できる

各周波数の信号に対する出力を調べれば
任意の信号に対する性質を表現できる

波形の分解の例



こんな複雑な波形も

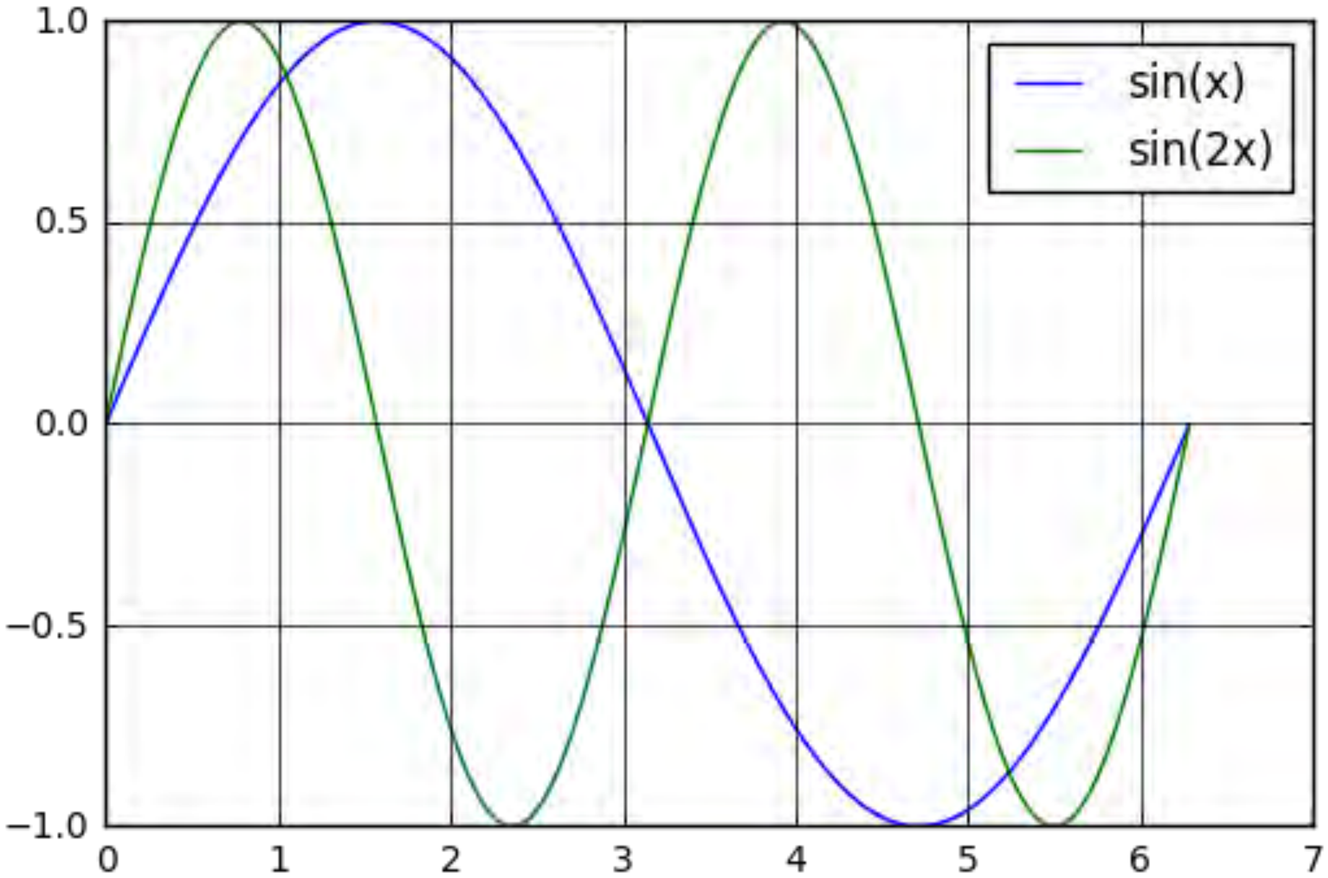


簡単な正弦波の
組み合わせ

各正弦波に対する出力⇒組み合わせにより
任意入力に対する出力わかる

(補足)正弦波sin(ωt+θ)の性質

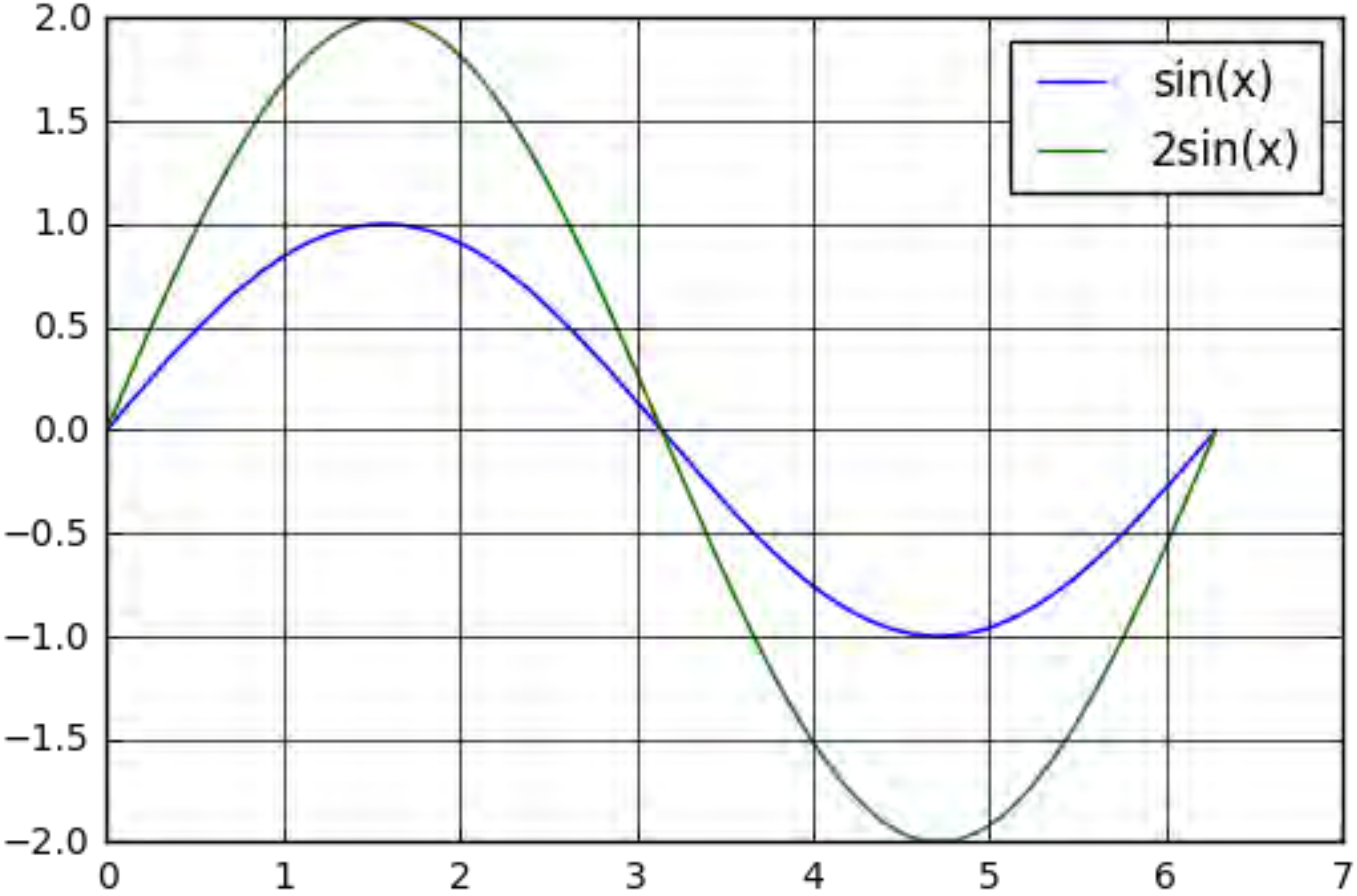
角周波数ωを変化させると



ωが大きい → 速く振動する

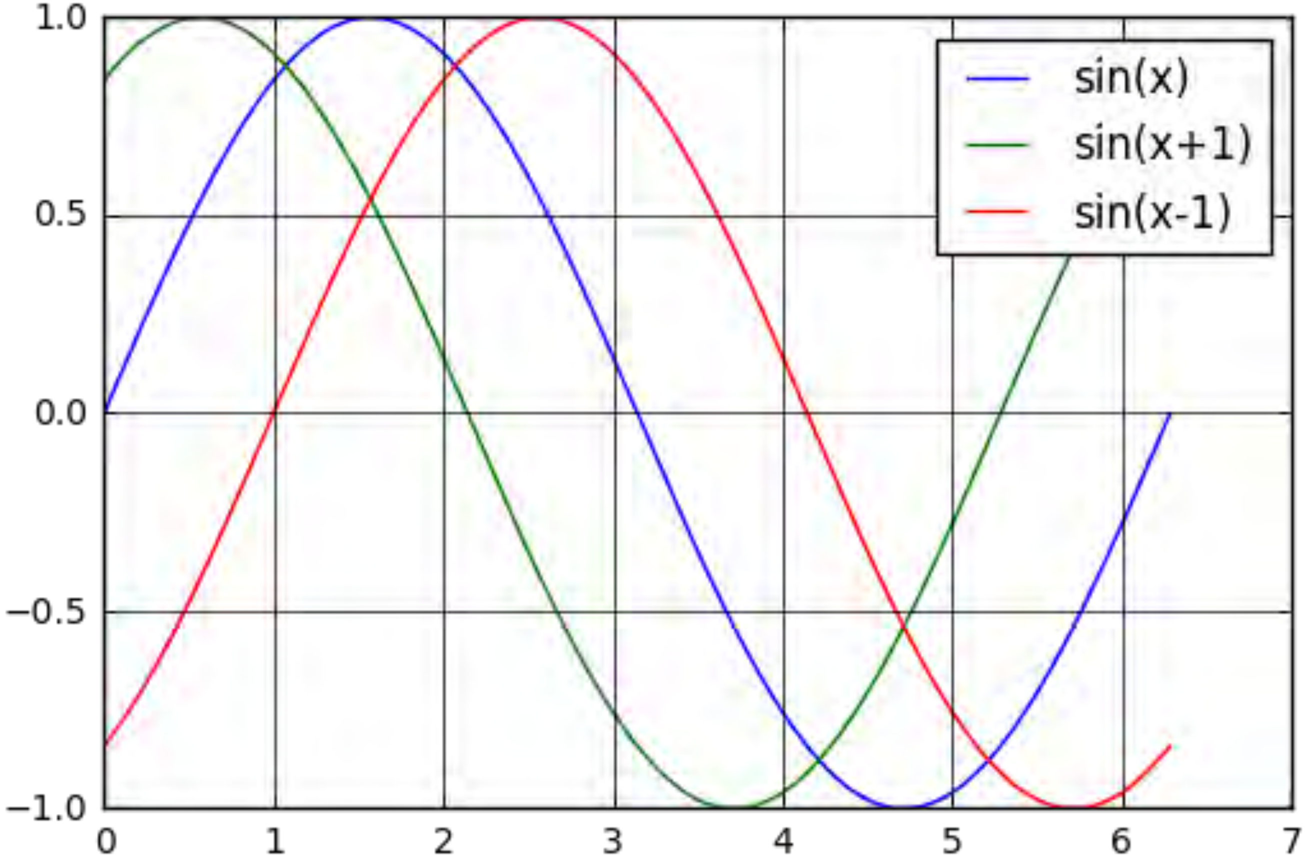
（補足）正弦波sin(ωt+θ)の性質

振幅を変化させると



（補足）正弦波sin(ωt+θ)の性質

位相θを変化させると



位相θ>0⇒位相が“進んでいる”

位相θ<0⇒位相が“遅れて”

時間の遅れ・進みに対応

周波数伝達関数とは？ その求め方

入力 $x=\sin(\omega t)$ ⇒ システム ⇒ 出力 $y=A\sin(\omega t+\theta)$

角速度w[rad/sec]の正弦波信号を入力
⇒出力の振幅比(ゲイン)は？，位相は？

⇒周波数伝達関数からA, θがわかる

どうやって求める？

システムのインパルス応答g(t)をフーリエ変換→面倒くさい

(教科書：4章P.63〜)

楽をするためには．．．

ラプラス変換を用いた周波数伝達関数の求め方

入力 → システム G(s) → 出力

X(s)　　　　$Y(s)=G(s)X(s)$

s領域

システムの伝達関数：G(s)

s=jω を代入

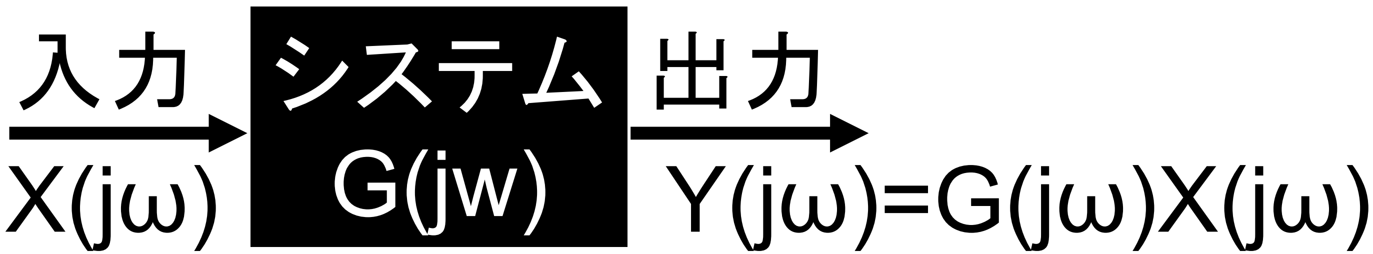
周波数伝達関数 G(jw)

入力　　　　　　　　　出力

x=sin (ωt) ⇒ システム ⇒ y=Asin (ωt+θ)

角速度ω[rad/sec]の正弦波信号を入力
⇒出力の振幅比A(ゲイン)は？，位相θは？

周波数伝達関数G(jw)の意味

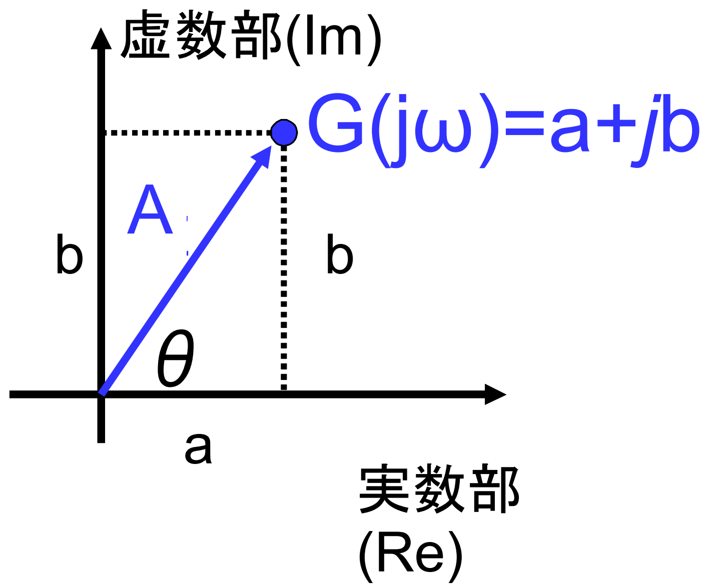


■ゲイン(入出力振幅比)

$$A = \left| \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right| = \left| G(j\omega) \right| = \sqrt{a^2+b^2}$$

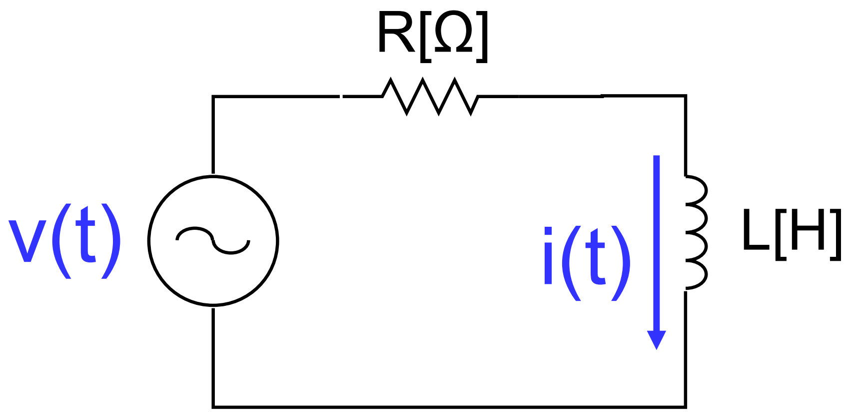
■位相

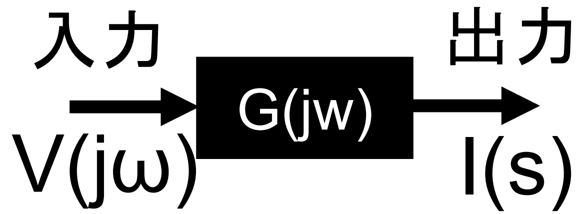
$$\theta = tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$



※ a, bの範囲に注意．資料1の補足を確認のこと．

演習：RL(抵抗・コイル)回路





$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t)$$

電源電圧v(t)を入力，
電流i(t)を出力とした
場合の周波数伝達関数
G(jw)を求めよ．また，ゲインと位相を求めよ．

ただし，伝達関数G(s)は

$$G(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{sL+R}$$

教科書67ページをみてよい

解答

伝達関数G(s)において，s=jωとすると周波数伝達関数は

$$G(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}$$

ゲイン特性は，

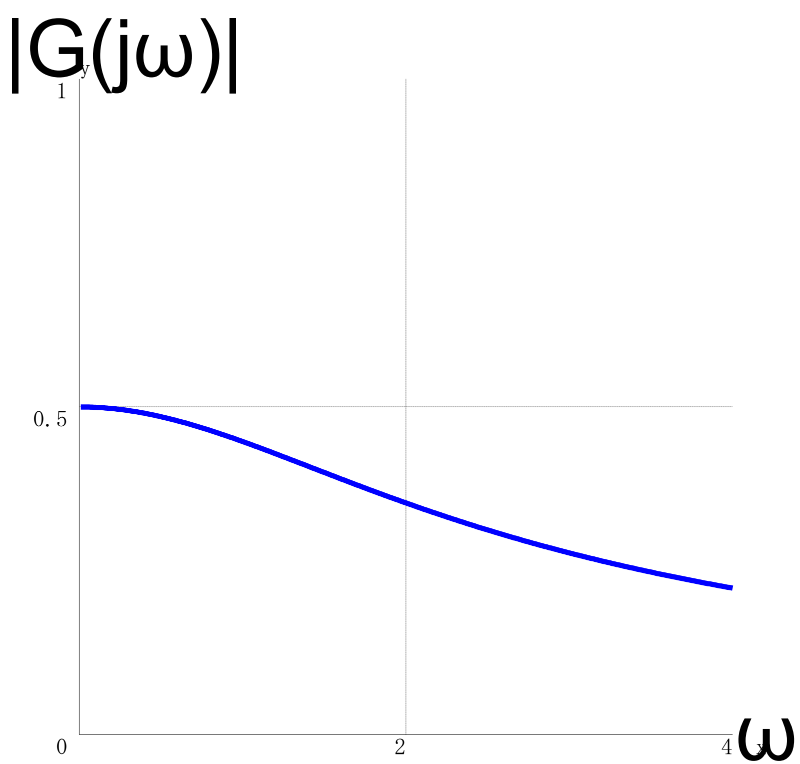
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{R^2 + (\omega L)^2}|R - j\omega L| = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

位相特性は，

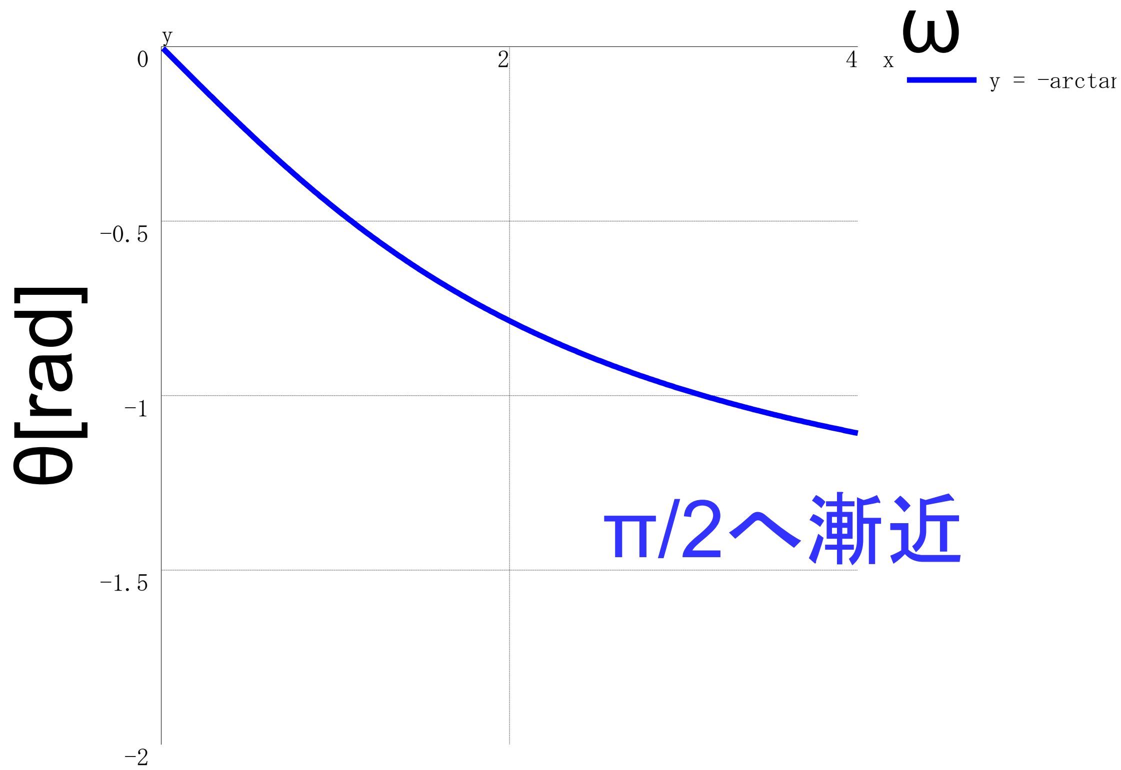
$$\theta(\omega) = \tan^{-1}\frac{(\mathrm{Im})}{(\mathrm{Re})} = \frac{b}{a} = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega L}{R}\right)$$

グラフで表示してみると

ゲイン(R=2,L=1)

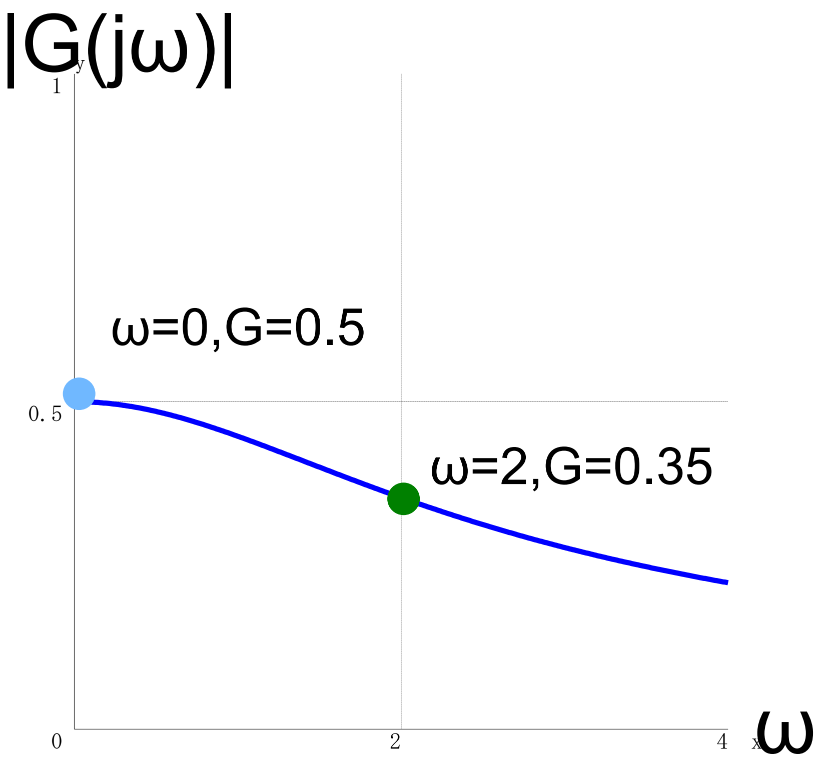


位相(R=2,L=1)

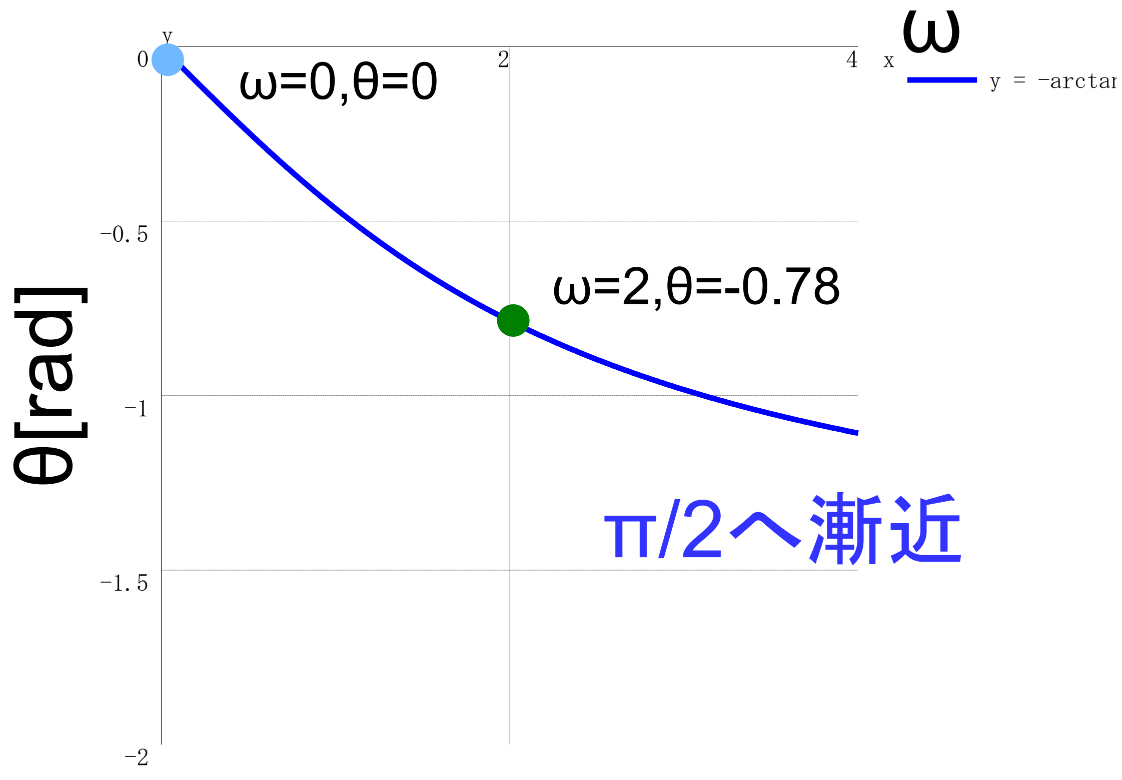


周波数応答から分かること

ゲイン(R=2,L=1)



位相(R=2,L=1)

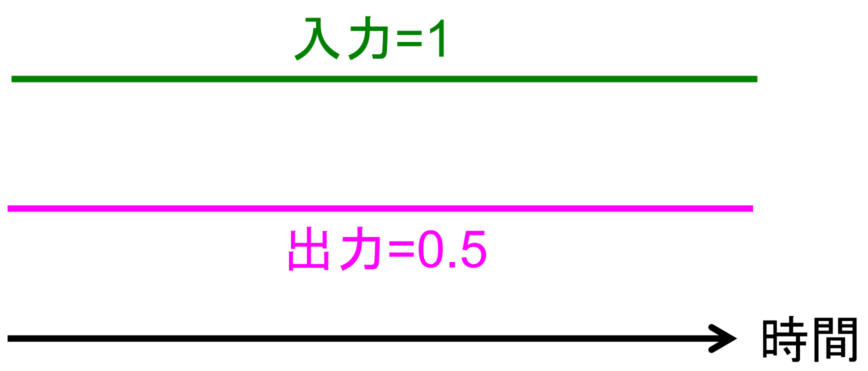


ω=0 ⇒ G=0.5,θ=0

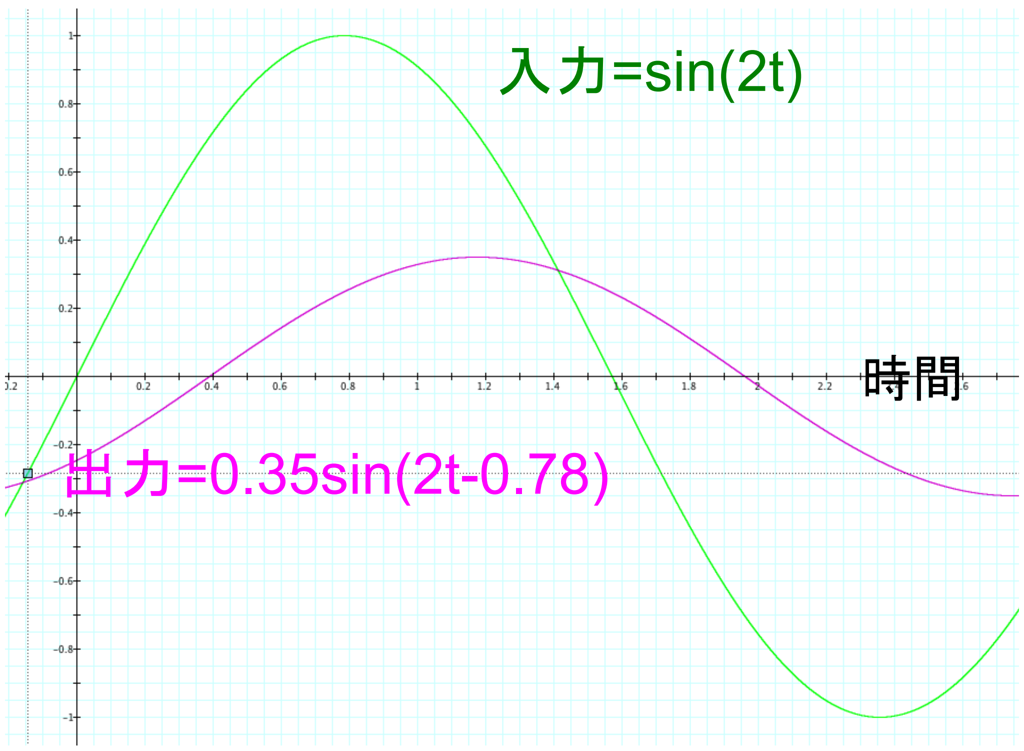
ω=2 ⇒ G=0.35,θ=-0.78

周波数応答から分かること(続き)

$\omega=0 \Rightarrow G=0.5, \theta=0$

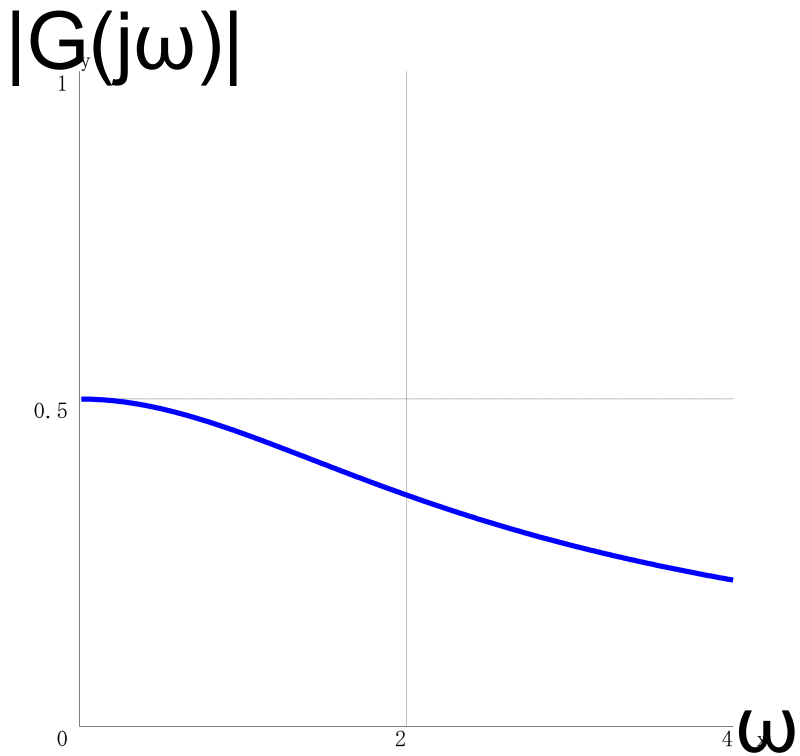


$\omega=2 \Rightarrow G=0.35, \theta=-0.78$



周波数応答からわかること(続き)

ゲイン(R=2,L=1)



θ[rad]

周波数が高いほどゲインが小さくなっている
⇒高い周波数の信号(変化の速い信号)には
反応にくいシステム

ボード線図による周波数特性の表現

周波数伝達関数 $G(j\omega)$ のゲイン，位相を別々にプロットしたグラフ

ゲインとωの範囲は広い(0～10^5)⇒対数表示

■ゲイン特性

- 縦軸 $g_{db} = 20\log|G(j\omega)|$ [dB]
  (ゲインと呼ぶことにする)
- 横軸 $\log \omega$

両対数グラフ

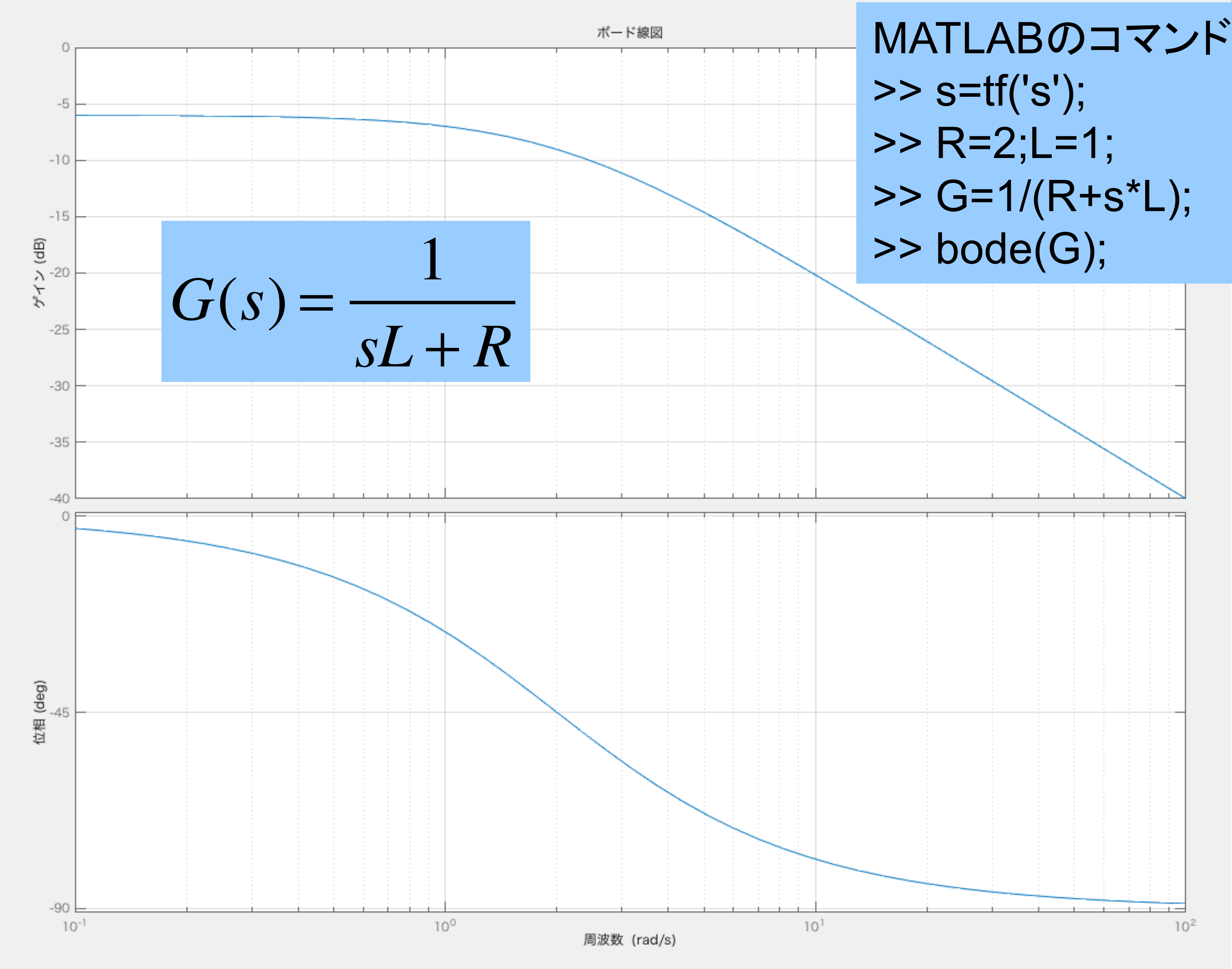
■位相特性

- 縦軸 $\theta(w)$
- 横軸 $\log w$

方対数グラフ

自分で「正確に」書くのは難しい．．．MATLABなどで描く.
ただし，基本的なものの概形は書けるようにする

MATLABでのボード線図の描き方

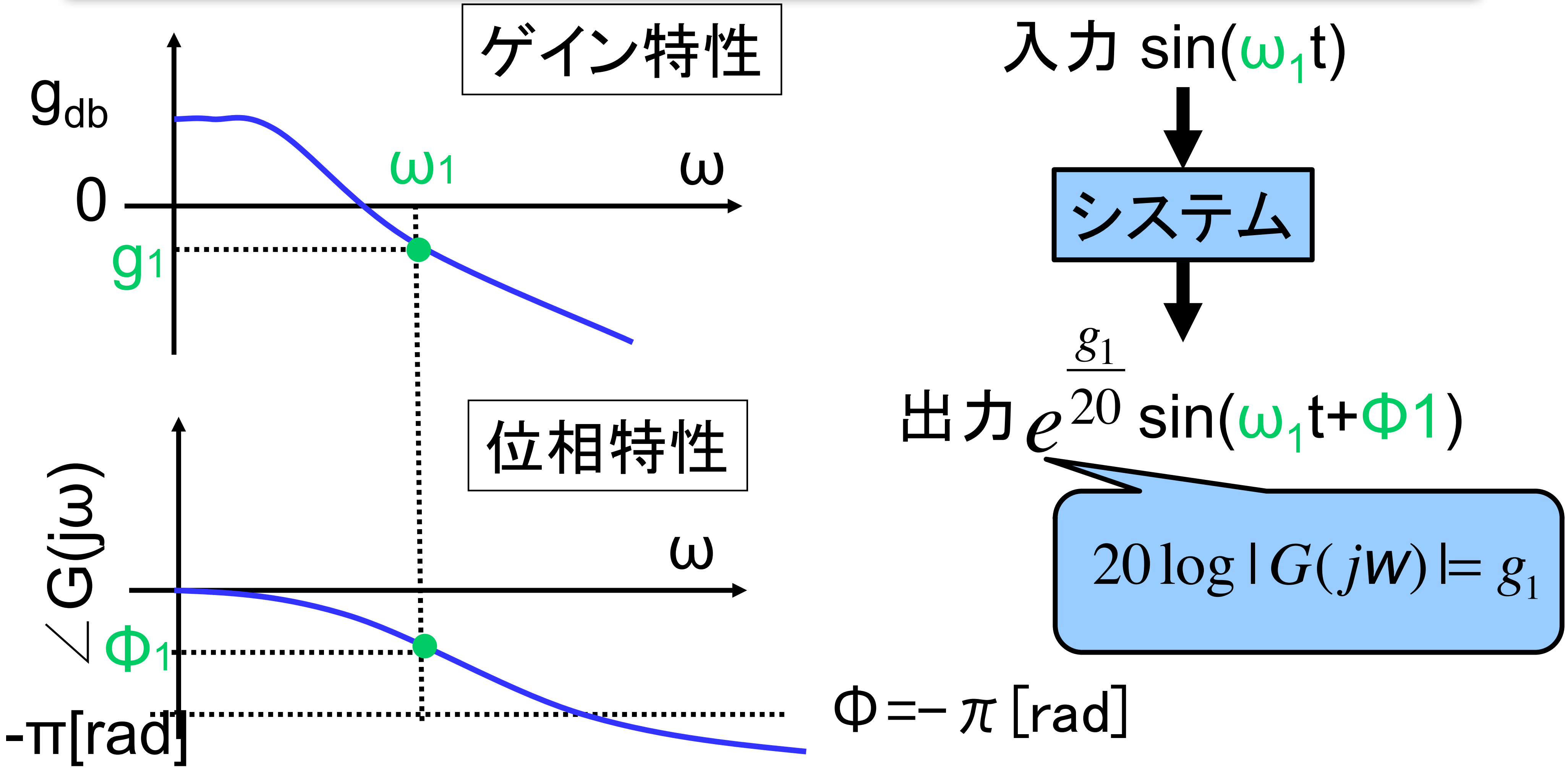


$$G(s) = \frac{1}{sL + R}$$

MATLABのコマンド

```
>> s=tf('s');
>> R=2;L=1;
>> G=1/(R+s*L);
>> bode(G);
```

ボード線図の意味


ゲイン特性
g_{db}
0
ω_1
ω
g_1
位相特性
$\angle G(j\omega)$
ω
Φ_1
$-\pi$[rad]
$\Phi=-\pi$ [rad]
入力 $\sin(\omega_1 t)$
システム
出力 $e^{\frac{g_1}{20}} \sin(\omega_1 t+\Phi 1)$
$20\log|G(jw)|=g_1$

ボード線図のメリット(P.78～79ページ)

$$G(j\omega)=G1(j\omega)G2(j\omega)$$

ゲイン特性

$$20\log|G(j\omega)| = 20\log|G1(j\omega)| + 20\log|G2(j\omega)|$$

位相特性

$$\theta = \theta1 + \theta2$$

高次の周波数伝達関数が，低次の伝達関数の
特性の和で表現⇒ボード線図上で足し合わせ

ナイキスト線図による周波数特性の表現

$G(j\omega)=R(\omega)+j\,I(\omega)$

実部　虚部

ωを0から∞まで変化させた時のG(*j*ω）の軌跡

安定性判別などを直感的に行える