システム制御

資料4　基本伝達関数の特性（5章）

張山昌論

PDFダウンロードは張山の授業のページから:
http://www.ecei.tohoku.ac.jp/hariyama/id-2/

資料について

■張山のホームページ

http:／／www.ecei.tohoku.ac.jp／hariyama／

の授業のページからプレゼンテーションの資料(PDF形式)をダウンロードできます．できるだけ前日までにアップロード予定．授業に持ち込んで下さい．パソコン，ipadなどで持ち込んでいただいてもよいです．

※教科書のエッセンスを抽出しているので，教科書よりは内容が少ないです．テスト前は教科書を見直すこと．

基本伝達関数の特性(5章)

- 全体のシステム
  ⇒ サブシステムの組み合わせ
- システムの伝達関数
  ⇒サブシステムの伝達関数の組み合わせ

簡単な伝達関数の特性⇒全体のシステムの特性の概要

特に1次系, 2次系が重要 (分母/分子に, sの1次/2次の項)

基本伝達関数

- 比例要素
- 微分，積分要素(1次系の最も簡単な形)
- 1次遅れ，1次進み要素
- 2次遅れ
- 時間遅れ要素

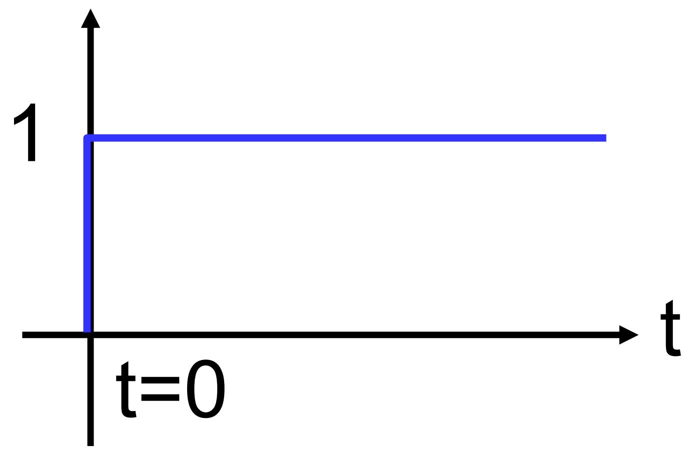
どんな特性を調べるの？

■周波数特性

- ナイキスト線図
- ボード線図

■ステップ応答

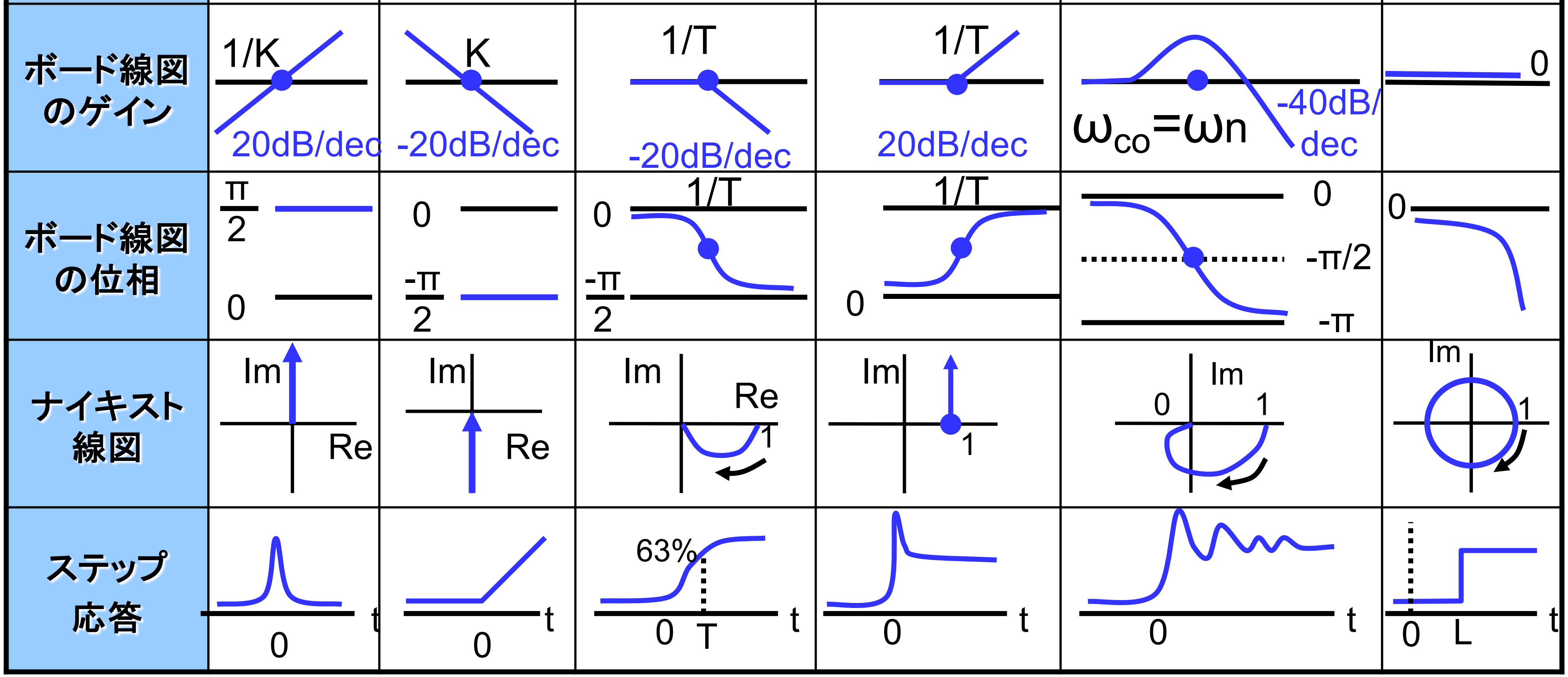
- 時間領域上でのステップ入力に対する出力



•速応性
t=0での入力の立ち上がりにどれだけ素早く反応するか
•定常偏差
t>>0の定常状態で，目標値にどれだけ近づいているか

基本伝達関数のまとめ

	微分	積分	1次遅れ	1次進み	2次遅れ	時間遅れ（ムダ時間）
伝達関数	Ks	$\frac{K}{s}$	$\frac{1}{(1+sT)}$	$1+sT$	$\frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	e^{-Ls}

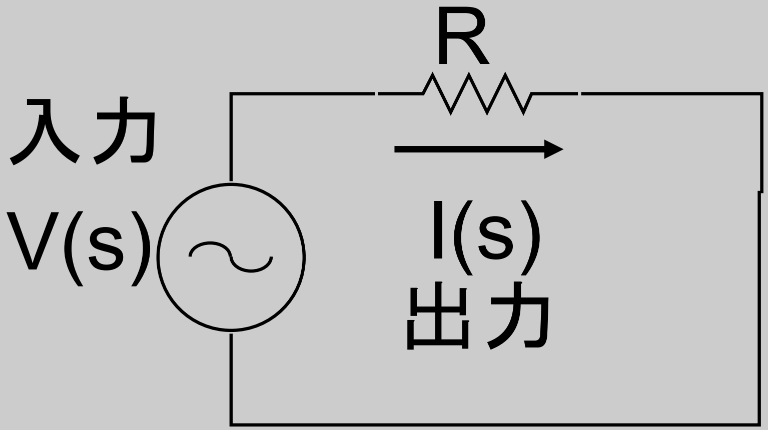


比例要素

K: 正の実数

※sを含まない！！

電子回路の例:　抵抗



伝達関数は,

G(s) =I/V=1/R

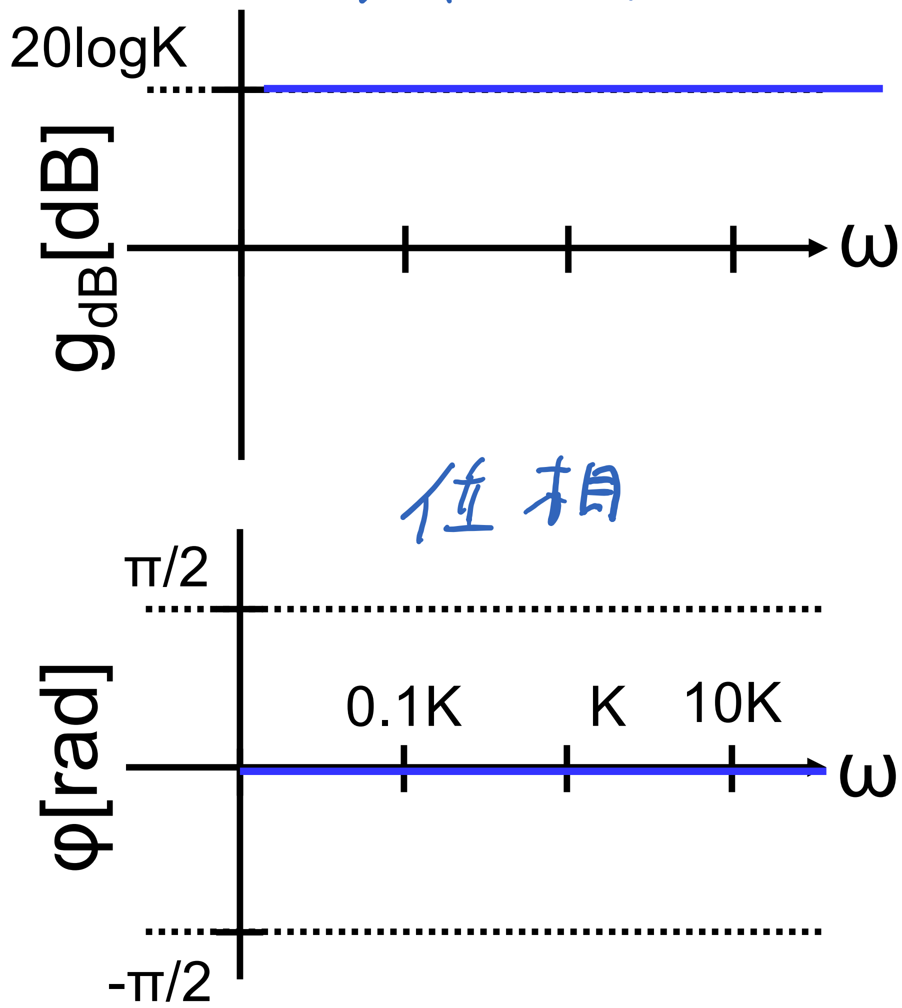
比例要素のボード線図

周波数伝達関数は
$G(j\omega)= K$

dBゲインは
$20\log|G(j\omega)|$
$= 20\log K$

位相は虚数成分
がないので0

ゲイン特性



位相

微分要素

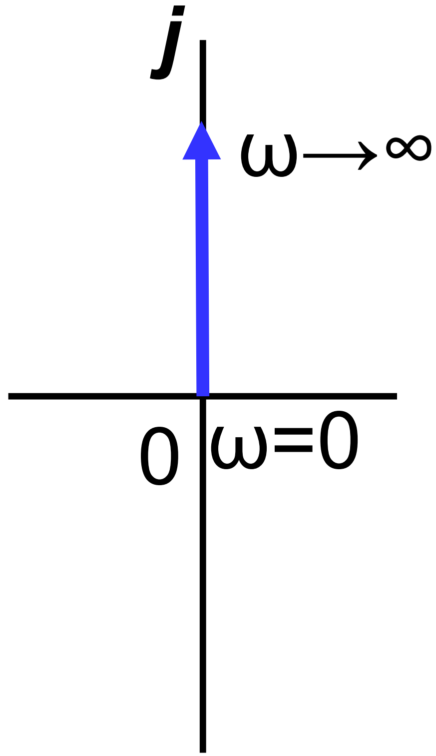
入力 X(s) $\Rightarrow$ **s** $\Rightarrow$ 出力 Y(s)

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad Y(s)=sX(s)$$

(P.51のラプラス変換表より)

微分要素の周波数応答:ナイキスト線図

周波数伝達関数は, $G(j\omega)=j\omega$



微分要素の周波数応答:ボード線図

周波数伝達関数は, $G(j\omega)=j\omega$

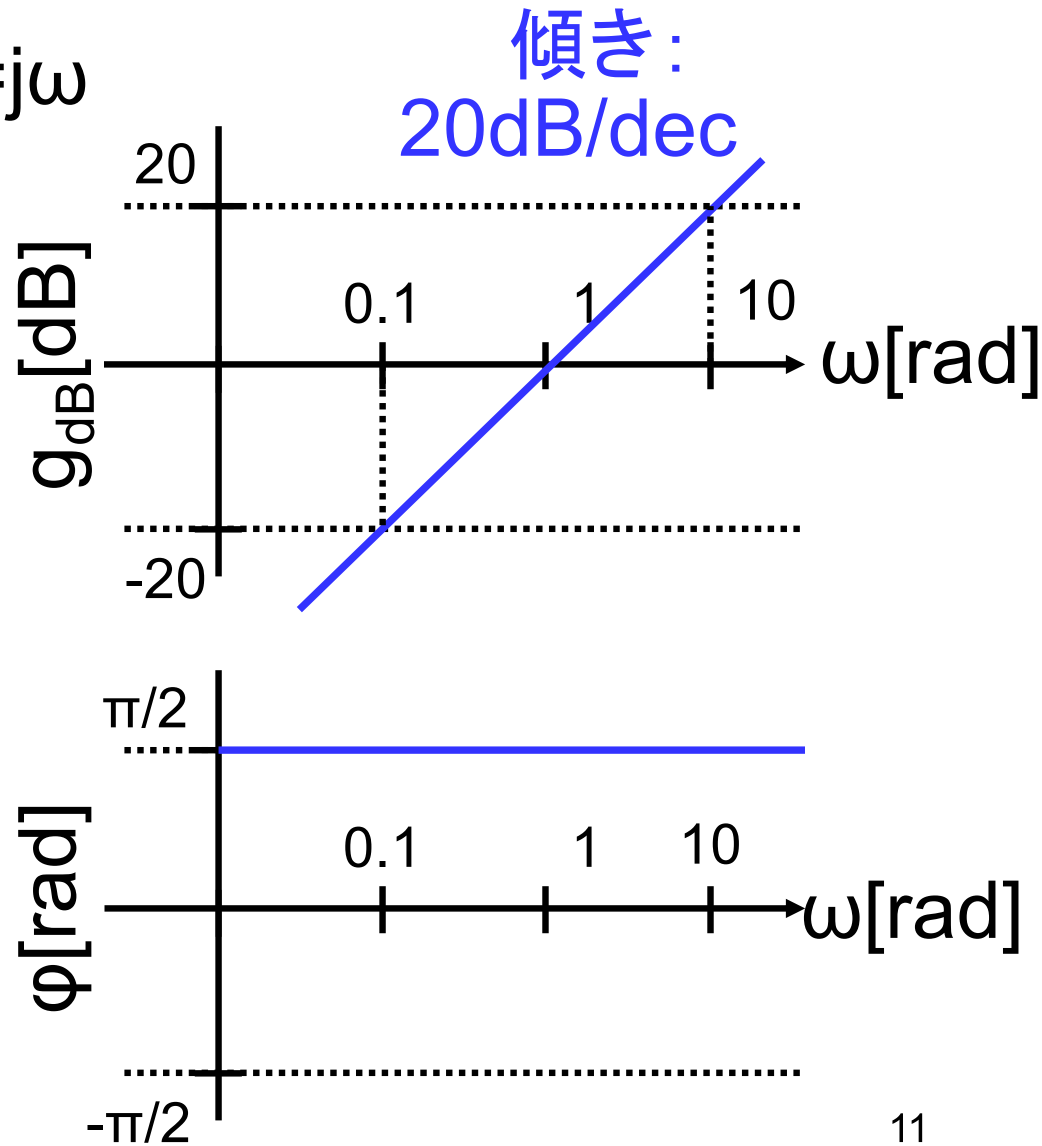
ゲインは

$$|G(j\omega)|=|j\omega|=\omega$$

ゲインg_{dB}は

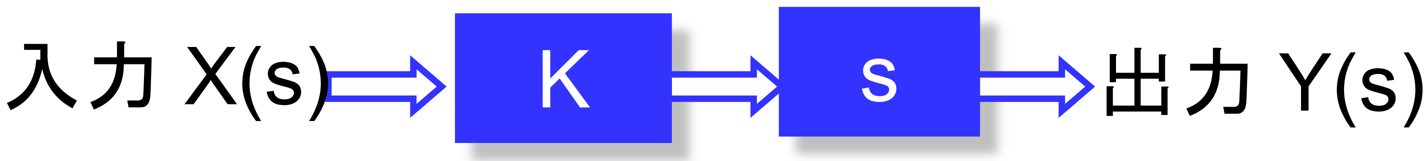
$$g_{dB}=20\log(\omega)$$

位相φは$\varphi=\pi/2$[rad]



微分要素の拡張(教科書にない)

微分要素に比例要素が組み合わされた場合



伝達関数は

$$G(s)=Ks$$

(微分+比例)要素の周波数応答：ボード線図

周波数伝達関数は，$G(j\omega)=jK\omega$

ゲインは

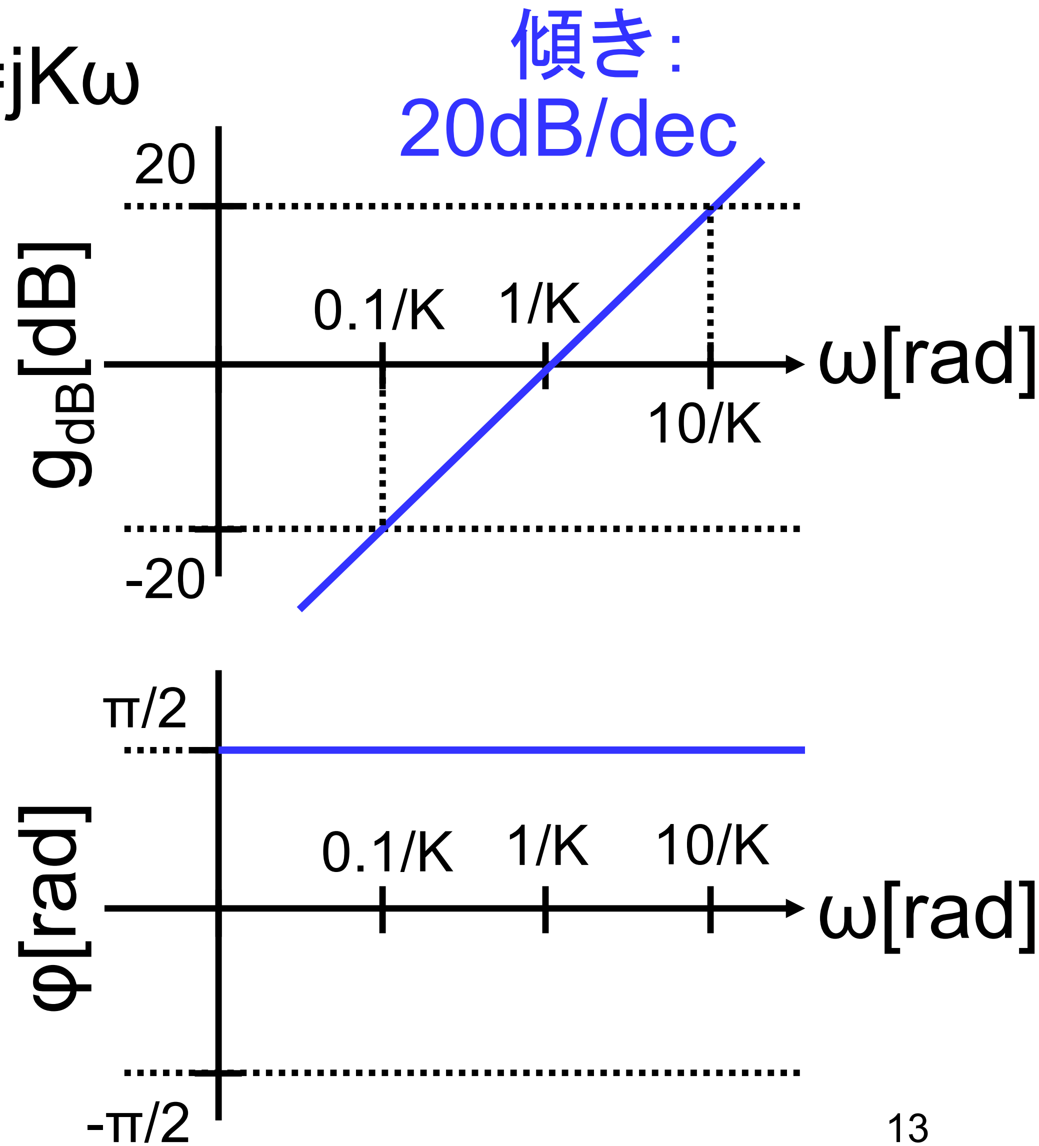
$$|G(jK\omega)|=|jK\omega|=K\omega$$

dBゲインg_{dB}は

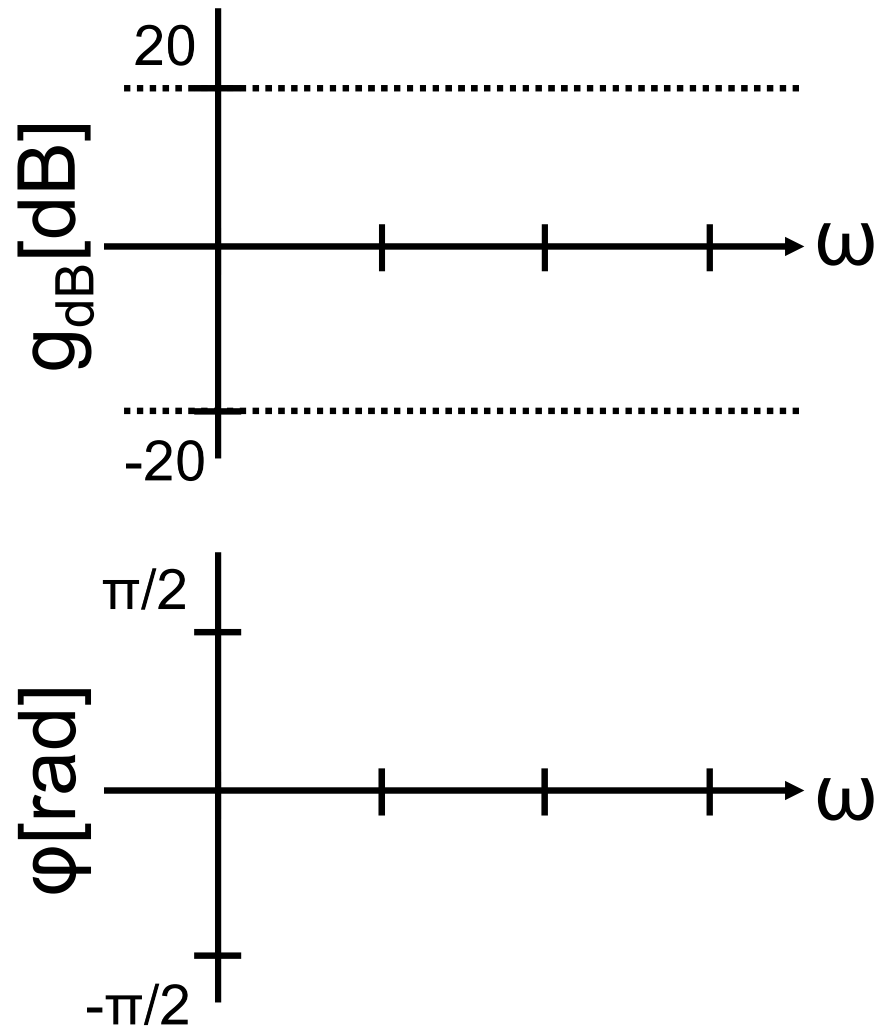
$$g_{dB}=20\log(K\omega)$$
$$=20\log\omega+20\log K$$

※$K\omega=1$のとき$g_{dB}=0$

位相φは$\varphi=\pi/2$[rad]



演習：G(s)=10sのボード線図の概形を描け



積分要素

入力 X(s) $\Rightarrow$ $\boxed{1/s}$ $\Rightarrow$ 出力 Y(s)

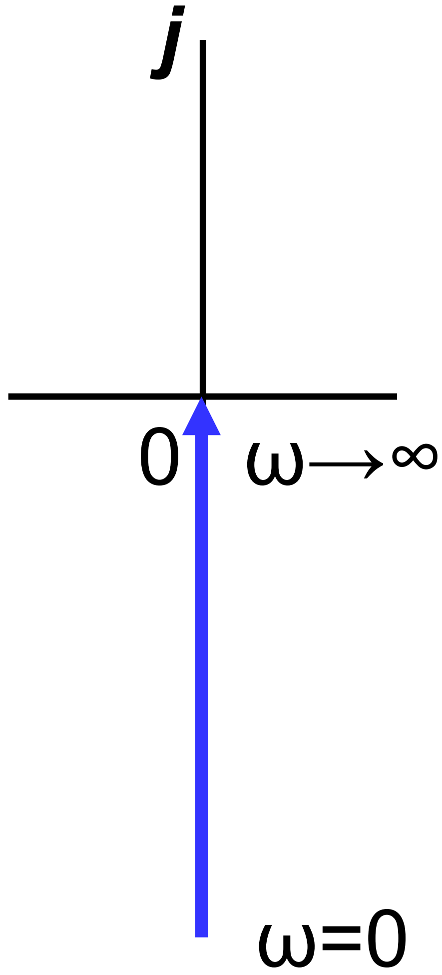
$$y(t) = \int_0^t x(t)dt \quad \Rightarrow \quad Y(s)=(1/s)X(s)$$

(ラプラス変換表より)

積分要素の周波数応答:ナイキスト線図

周波数伝達関数は,

$G(j\omega)=(1/(j\omega))=(1/\omega)(-\boldsymbol{j})$



積分要素の周波数応答:ボード線図

周波数伝達関数は $G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega}=-\dfrac{j}{\omega}$

ゲインは

|G(jω)|=1/ω

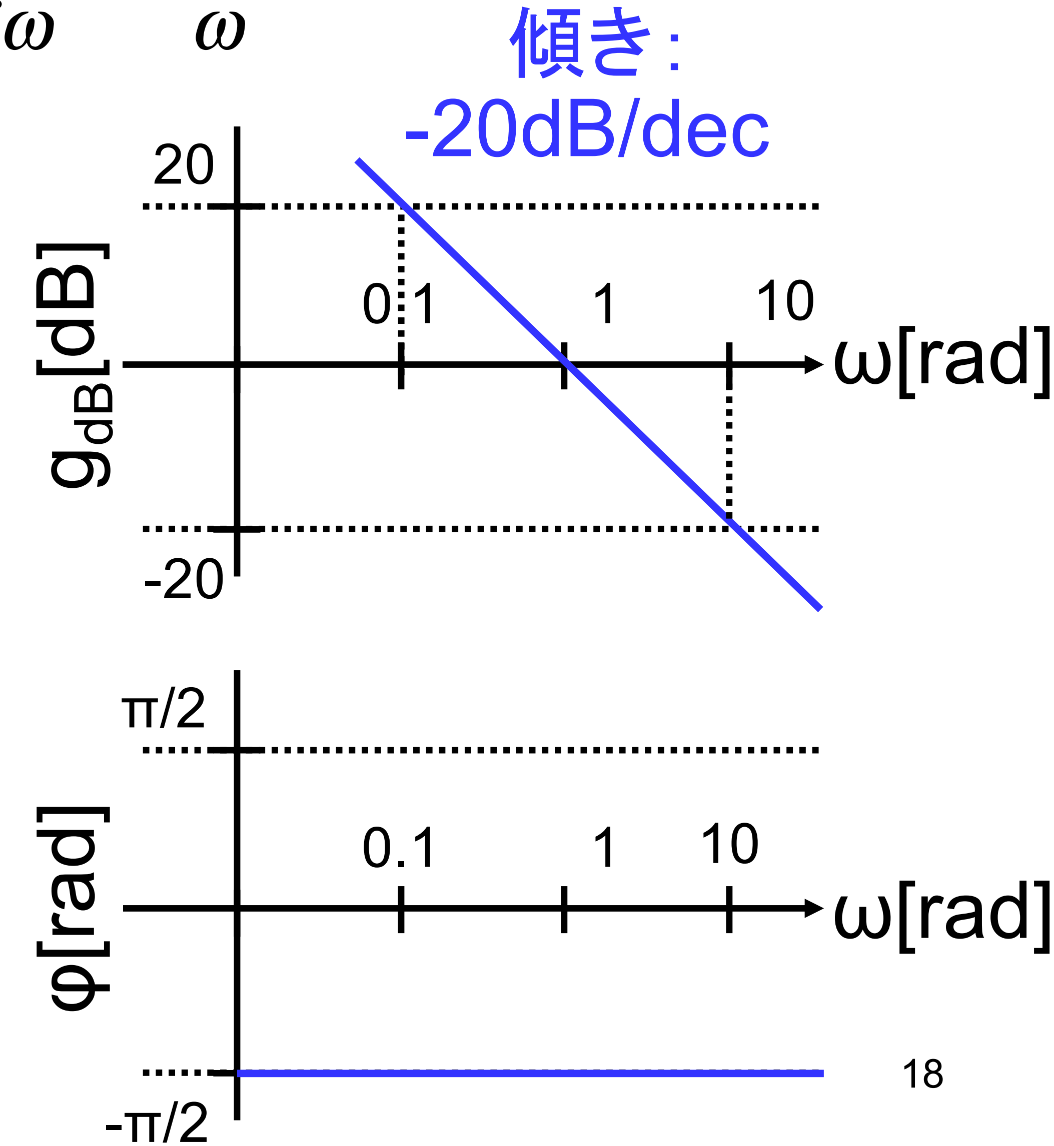
ゲインg_{dB}は

g_{dB}=20 log(1/ω)

=20(log1-logω)

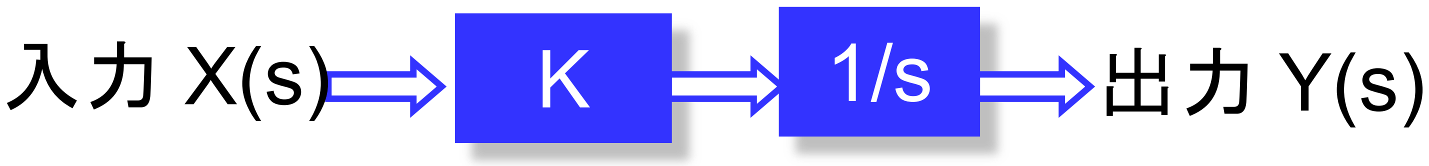
= -20log(ω)

位相φは $\phi=-\pi/2$[rad]



積分要素の拡張(教科書にない)

積分要素に比例要素が組み合わされた場合



伝達関数は

$$G(s)=\frac{K}{s}$$

(比例+積分)要素の周波数応答:ボード線図

周波数伝達関数は $G(j\omega)=\dfrac{K}{j\omega}=-j\dfrac{K}{\omega}$

ゲインは

$|G(j\omega)|=K/\omega$

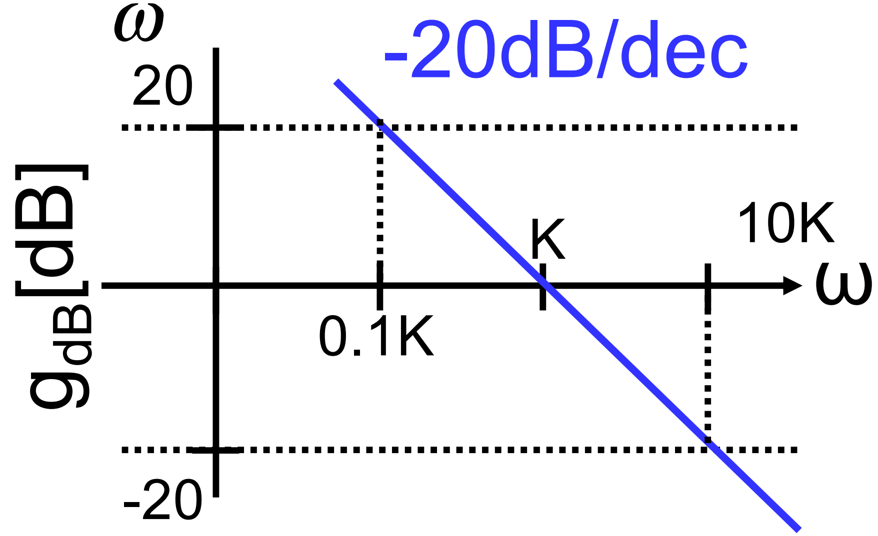
dBゲインg_{dB}は

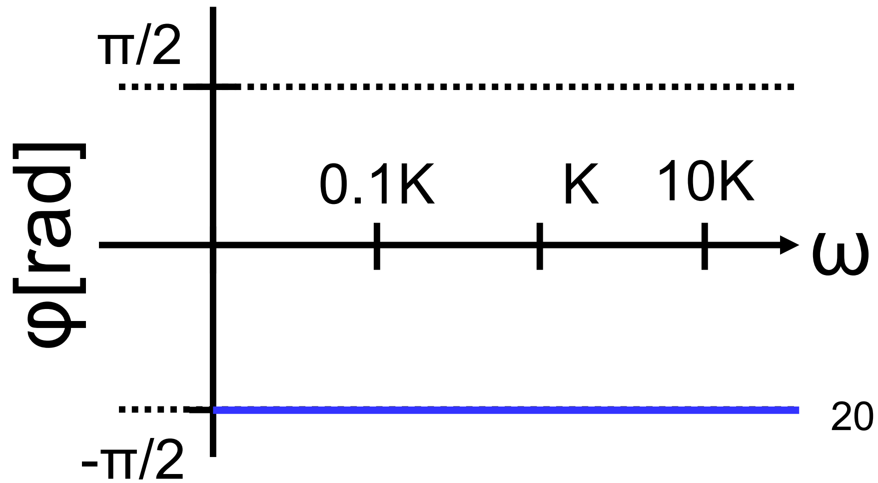
$g_{dB}=20\log(K/\omega)$

$=20\log K - 20\log\omega$

($K/\omega=1$のとき$g_{dB}=0$)

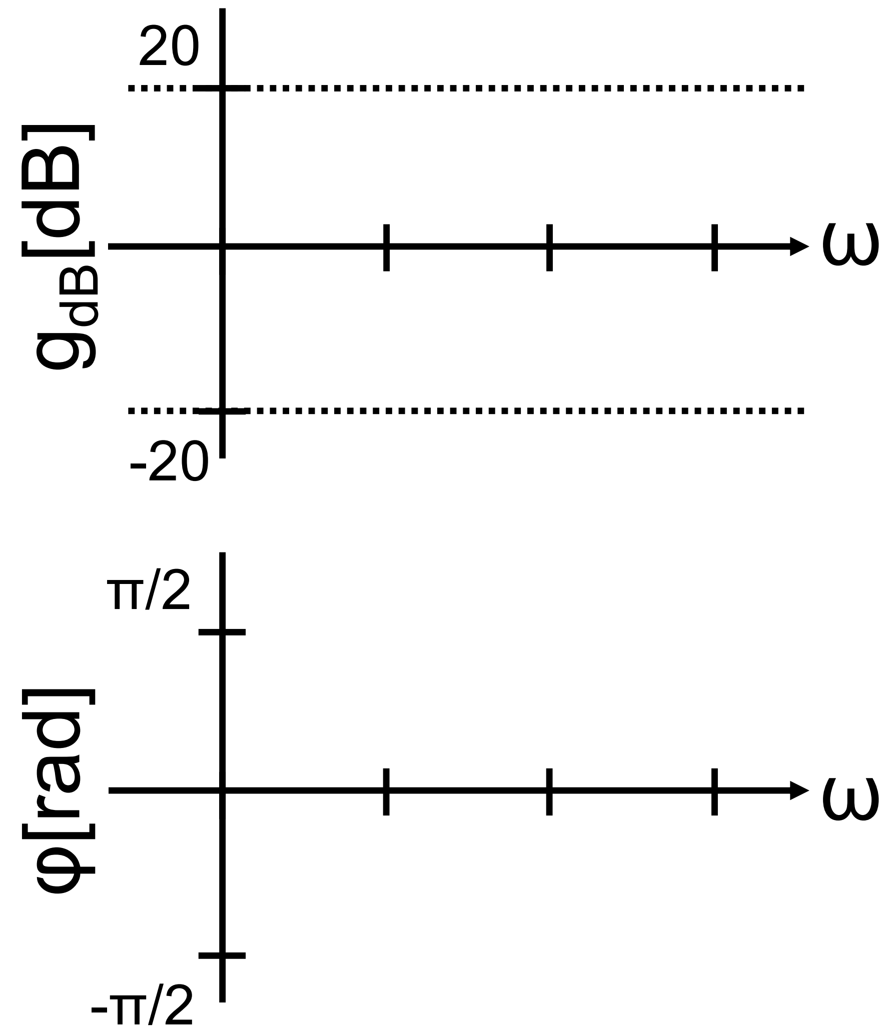
位相φは$\varphi=-\pi/2$[rad]



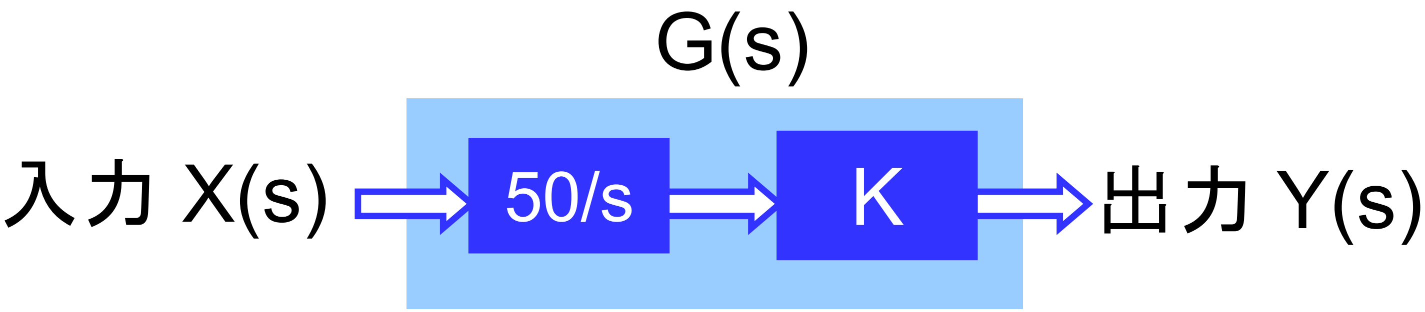


20

G(s)=10/sのボード線図の概形を描け



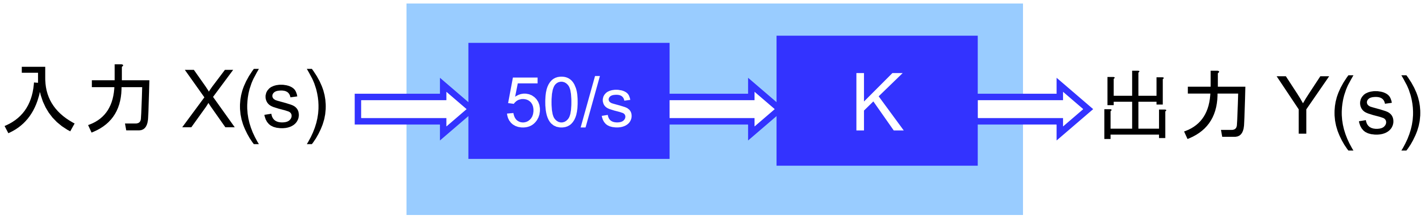
演習(P.91)



比例要素と，積分要素からなるシステム

ω=500[rad/sec]において，システム全体のゲインを1にするための，Kの値を求めよ

解答



システム全体の伝達関数は

$$G(s) = \frac{50}{s} \times K = \frac{50K}{s}$$

ω=500のときのゲインが1より

$$|G(j\varpi)|_{\varpi=500} = \left|\frac{50K}{\varpi}\right|_{\varpi=500} = \frac{50K}{500} = 1$$

よって，K=10

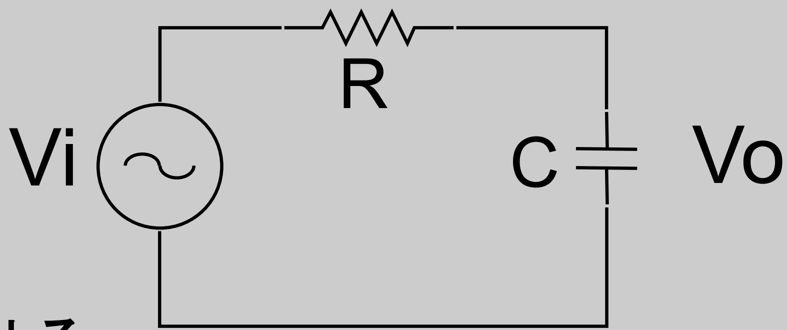
1次遅れ要素

入力 X(s) ⇒ $\frac{1}{1+sT}$ ⇒ 出力 Y(s)

分母にsの1次式

※ T:時定数

1次遅れ要素の例) RC回路



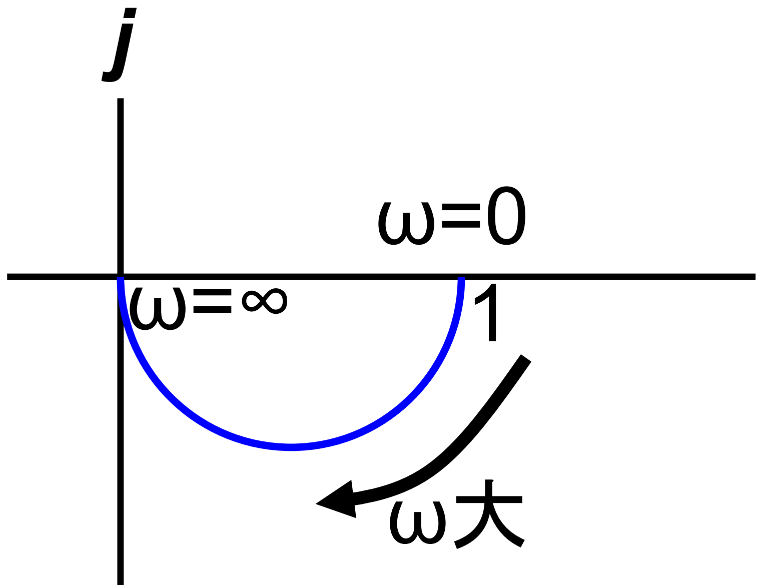
RC回路における,
入力(電源電圧Vi)と出力(コンデンサの電圧Vo)の伝達関数

T=RC

1次遅れ要素の周波数応答:ナイキスト線図

周波数伝達関数は

$$G(j\varpi) = \frac{1}{1 + j\varpi T} = \frac{1 - j\varpi T}{1 + (\varpi T)^2}$$



実部x, 虚部yはそれぞれ

$$x = \frac{1}{1 + (\varpi T)^2} \qquad y = \frac{-\varpi T}{1 + (\varpi T)^2}$$

よって

$$\varpi^2 T^2 = \frac{1}{x} - 1 \qquad y^2 = \frac{\varpi^2 T^2}{1 + (\varpi T)^2}$$

$$\boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

1次遅れ要素のゲインg_{dB}

ゲインは

$$|G(\varpi)| = \left|\frac{1}{1+j\varpi T}\right| = \frac{1}{|1+j\varpi T|} = \frac{1}{\sqrt{1+\varpi^2 T^2}}$$

ちなみにゲインが最大値の(1/√2)になるω: 遮断角周波数ω_{co}

ゲインg_{dB}は

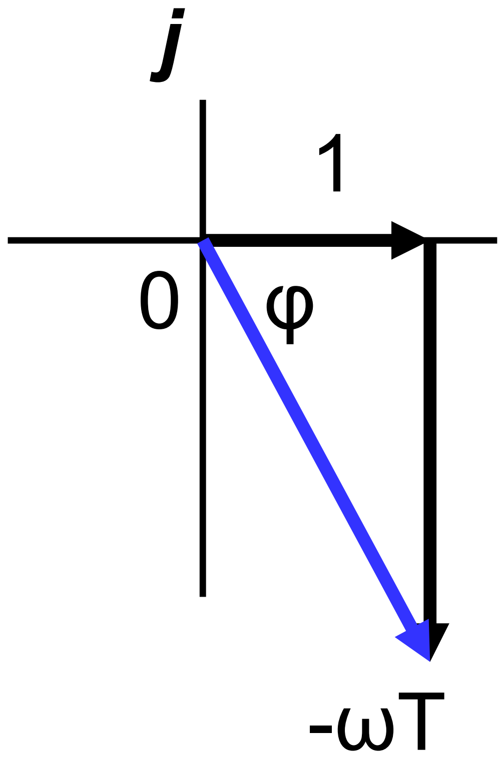
$$20\log|G(\varpi)| = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\varpi^2 T^2}}$$

$$= 20(\log(1) - \frac{1}{2}\log(1+\varpi^2 T^2)) = -10\log(1+\varpi^2 T^2)$$

1次遅れ要素の位相ϕ

位相φは

$$\angle G(\varpi) = \tan^{-1}\left(\frac{-\varpi T}{1}\right) = \tan^{-1}(-\varpi T)$$



1次遅れ要素のボード線図:ゲインg_{dB}

周波数伝達関数は $G(j\varpi)=\dfrac{1}{1+j\varpi T}=\dfrac{1-j\varpi T}{1+(\varpi T)^2}$

ゲインg_{dB}は

$$20\log|G(\varpi)|=-10\log(1+\varpi^2T^2)$$

少し難しいですが
概形を描ける
ようにしておく

■$\omega T<<1$： $1+\omega^2T^2=1$より

$$g_{dB}=-10\log 1=0$$

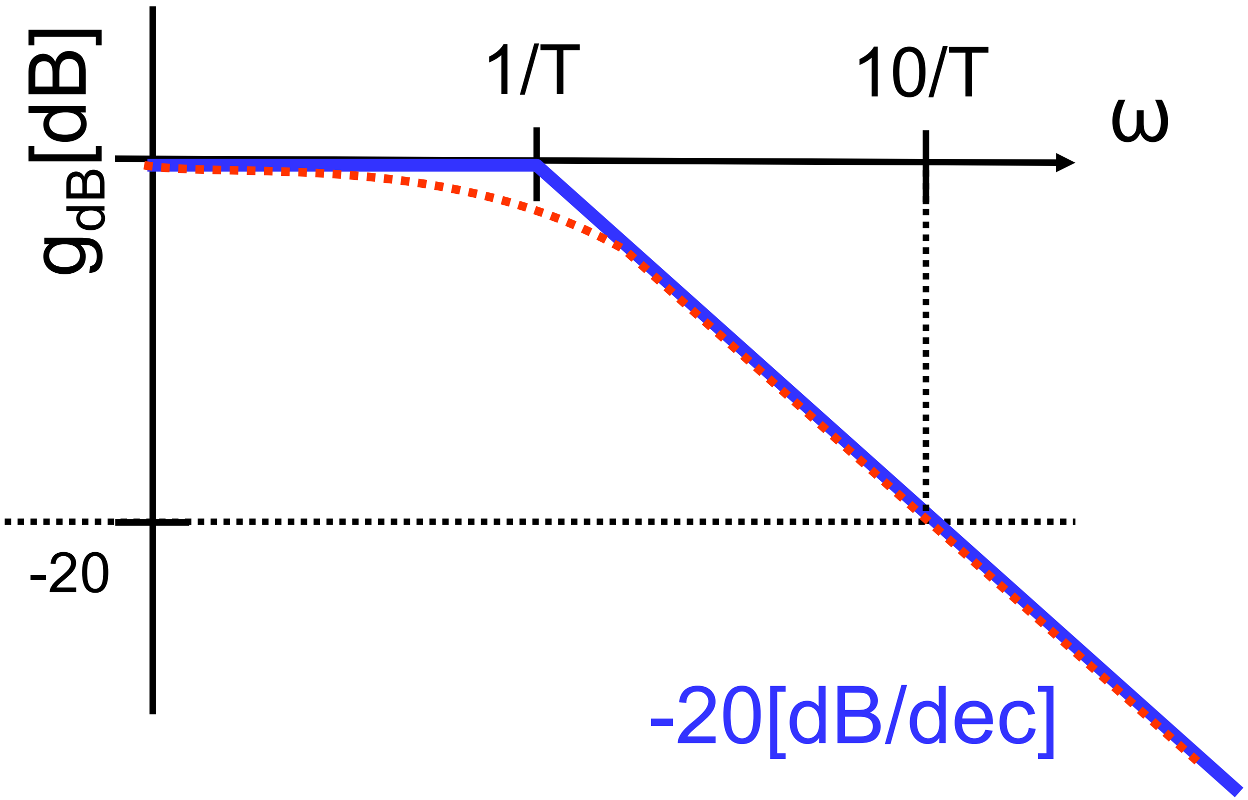
■$\omega T=1$

$$g_{dB}=-10\log(1+1)=-10\log 2$$

■$\omega T>>1$： $1+\omega^2T^2=\omega^2T^2$より

$$g_{dB}=-10\log(\varpi^2T^2)=-20\log(\varpi T)$$

1次遅れ要素のボード線図:ゲインg_{dB}



1次遅れ要素のボード線図:位相ϕ

$$\angle G(\varpi) = \tan^{-1}(-\varpi T)$$

■ωT<<1: ωT→0より

$$\phi = 0$$

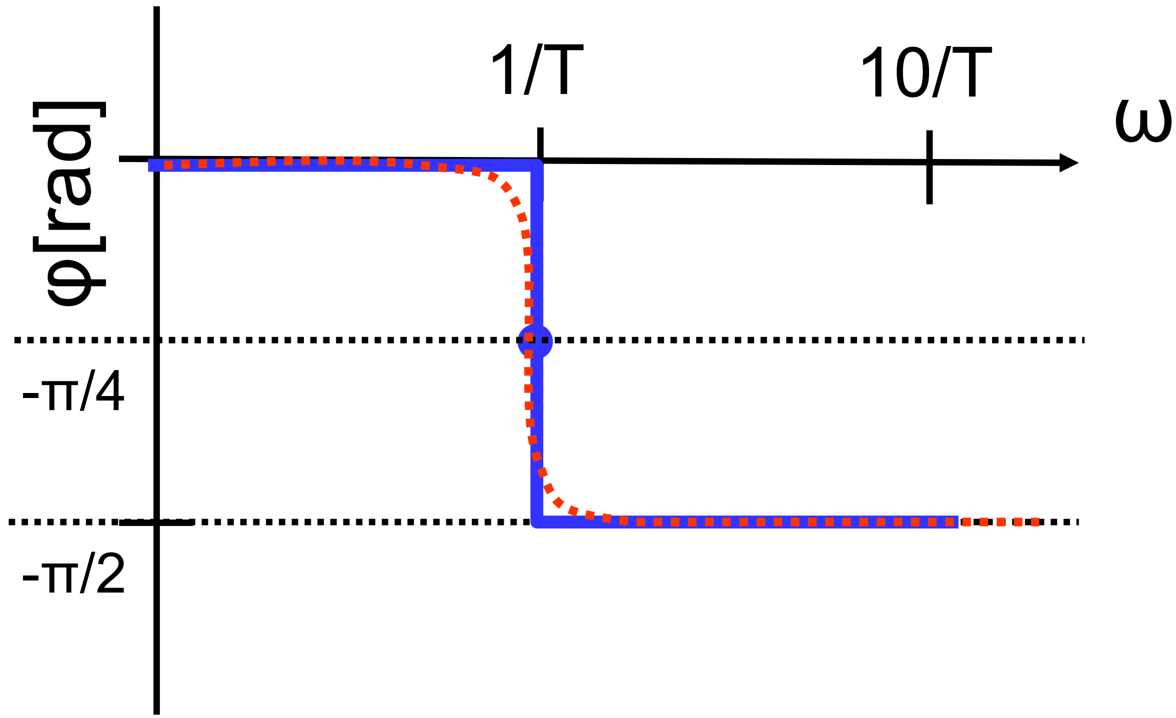
■ωT=1

$$\phi = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

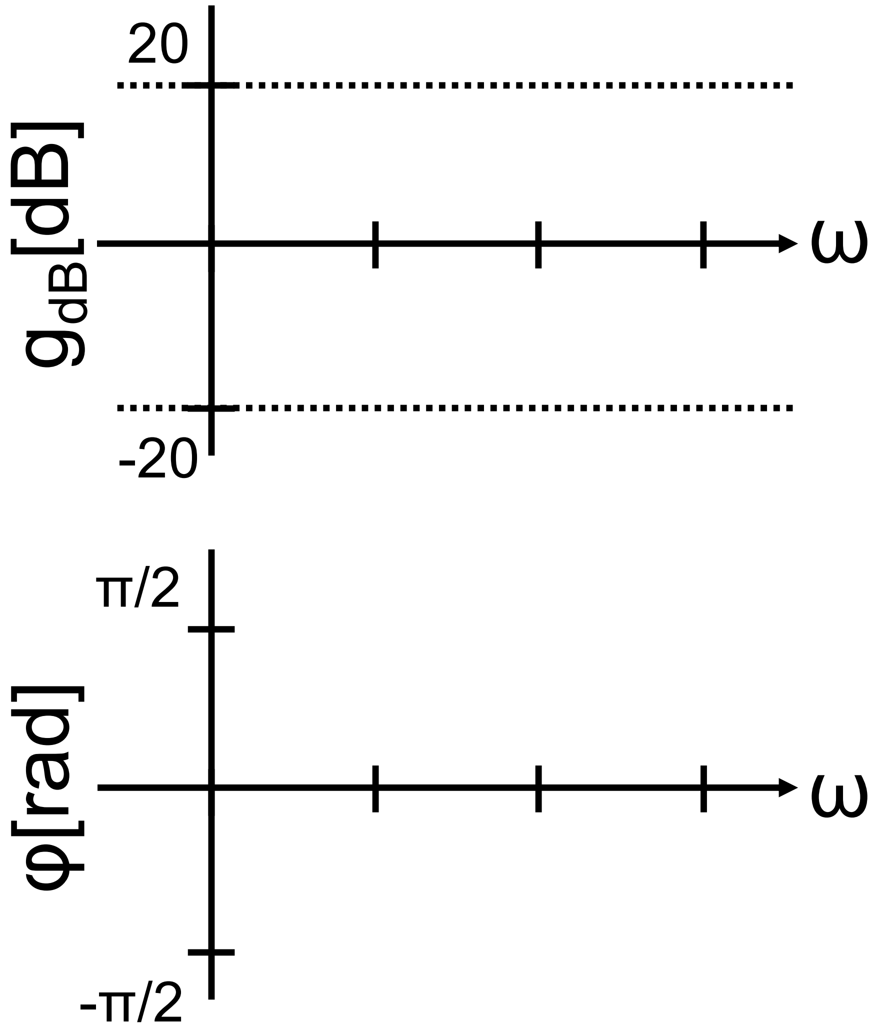
■ωT>> 1: ωT→∞より

$$\phi = -\frac{\pi}{2}$$

1次遅れ要素のボード線図:位相ϕ



G(s)=1/(1+10s)のボード線図の概形を描け



1次遅れ要素のステップ応答

ラプラス領域でのステップ応答は,

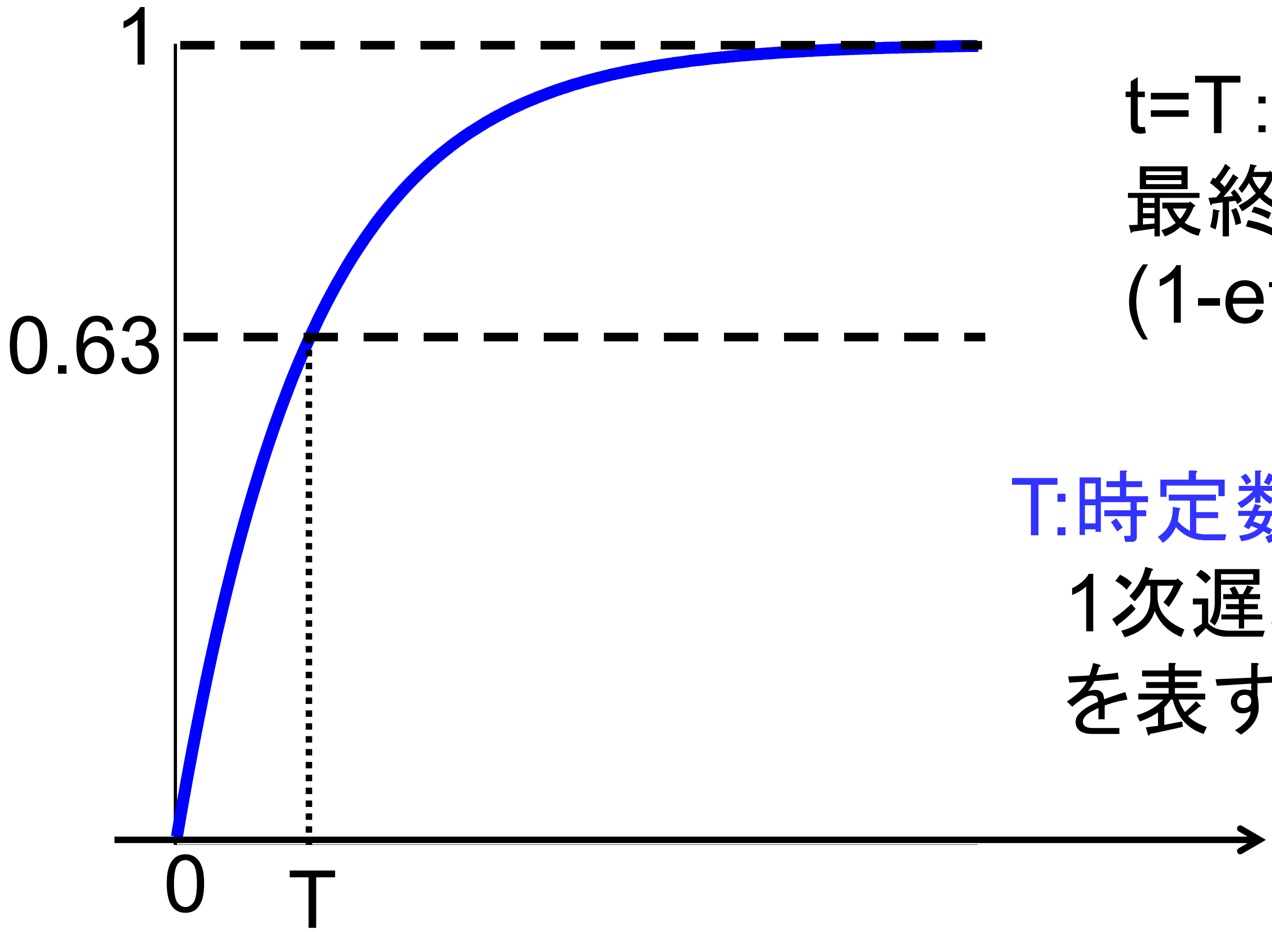
P.51(2)(単位ステップのラプラス変換)を用いることにより

$$Y(s) = \frac{1}{1+sT}X(s) = \frac{1}{1+sT}\frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+\frac{1}{T})}\frac{1}{T}$$

逆ラプラス変換P.51(8)よりα=0,β=1/Tとして

$$y(t) = \frac{1}{T}\frac{1}{\frac{1}{T}-0}(e^{-0t} - e^{-\frac{t}{T}}) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}$$

ステップ応答



t=T : 時間応答が最終値の63%
(1-e^{-1}≒0.63)

T:時定数
1次遅れ系の時間特性を表すパラメータ

一般的な時間応答y(t)の求め方(補足)

入力 X(s) ⟹ G(s) ⟹ 出力 Y(s)

システムの伝達関数 G(s)

入力X(s)に対して，s領域における出力Y(s)を求める

$$\boxed{Y(s) = G(s)X(s)}$$

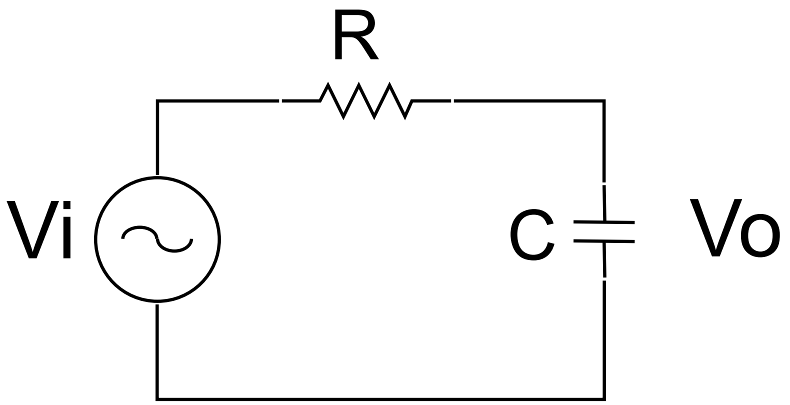
X(s)=1/s (ステップ応答)

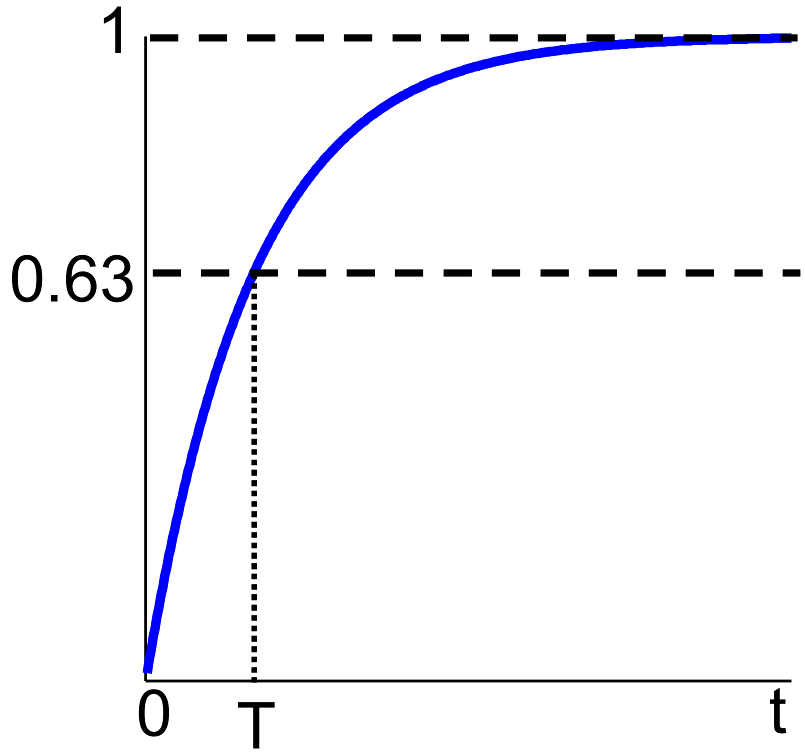
X(s)=1 (インパルス応答)

Y(s)を逆ラプラス変換する

$$\boxed{y(t) = L^{-1}[Y(s)]}$$

1次遅れ要素





RC回路における,
入力(電源電圧Vi)と
出力(コンデンサ電圧Vo)
の伝達関数

T=RC

コンデンサの動作と一致

例題5．2(P.97)

$$G(s) = \frac{120}{s+120}$$

この1次遅れ系について以下の問いに答えよ

(a)遮断角周波数ω_{co}を求めよ
(b)ω_{co}における位相φ_{co}を求めよ
(c)ステップ入力を加えた場合，出力が最終値の63%になる時刻を求めよ

ただし，遮断角周波数とは，出力が，最大値の1/√2になる角周波数である

解答(a)

周波数伝達関数は

$$G(j\varpi)=\frac{120}{j\omega+120} \qquad |G(j\varpi)|=\left|\frac{120}{j\varpi+120}\right|=\left|\frac{120}{\sqrt{\varpi^2+120^2}}\right|$$

最大値はω=0のとき1である.

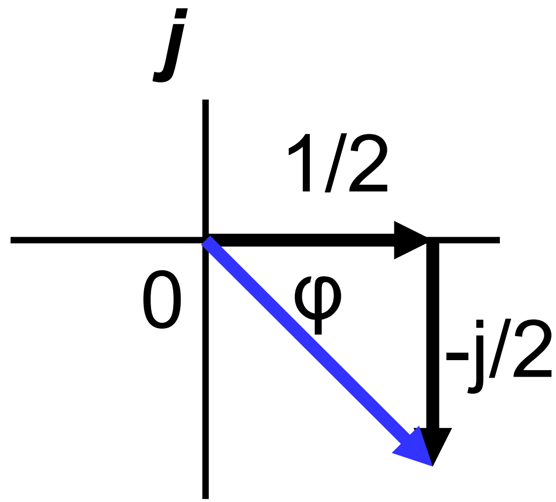
遮断角周波数では，ゲインが最大値の1/√2となるので

$$\left|\frac{120}{\sqrt{\varpi^2+120^2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ より，ω_{co}=120[rad/sec]

解答(b)

遮断角周波数では

$$G(j\varpi_{co}) = \frac{120}{j120+120} = \frac{1-j}{2}$$



よって，Φ= -π/4

解答(c)

1次遅れ要素の標準形より

$$G(s) = \frac{120}{s+120} = \frac{1}{1+s\dfrac{1}{120}}$$

よって，時定数T=1/120

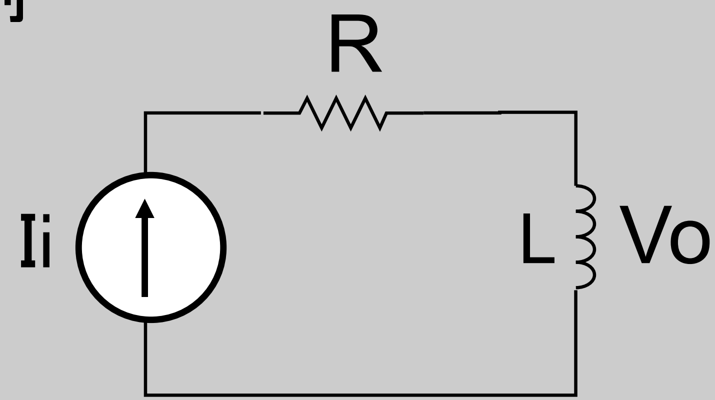
出力が63%になるのは，t=T=1/120[sec]のとき

1次進み要素

入力 X(s) ⇨ 1+sT ⇨ 出力 Y(s)

1次遅れ要素の分母と分子を逆

1次進み要素の例



RL回路における,
入力(電流Ii)と出力(コイルの電圧Vo)の伝達関数

T=L/R

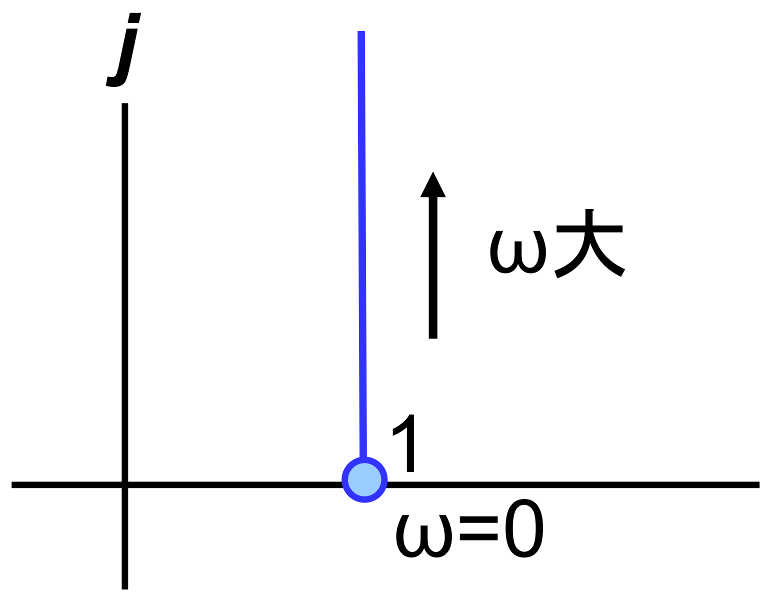
1次進み要素の周波数応答:ナイキスト線図

周波数伝達関数は

$$G(j\varpi) = 1 + j\varpi T$$

実部x, 虚部yはそれぞれ

$$x = 1 \qquad y = \varpi T$$



1次進み要素のゲインg_{dB}

周波数伝達関数は　$G(j\varpi)=1+j\varpi T$

ゲインは

$$|G(\varpi)|=|1+j\varpi T|=\sqrt{1+(\varpi T)^2}$$

少し難しいですが
概形を描ける
ようにしておく

ゲインg_{dB}は

$$20\log|G(\varpi)|=20\log\sqrt{1+\varpi^2T^2}=10\log(1+\varpi^2T^2)$$

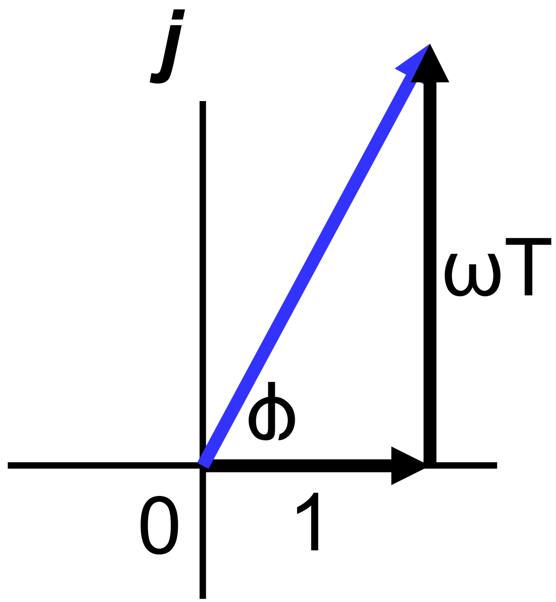
1次遅れ要素
と符号が逆

1次進み要素の位相ϕ

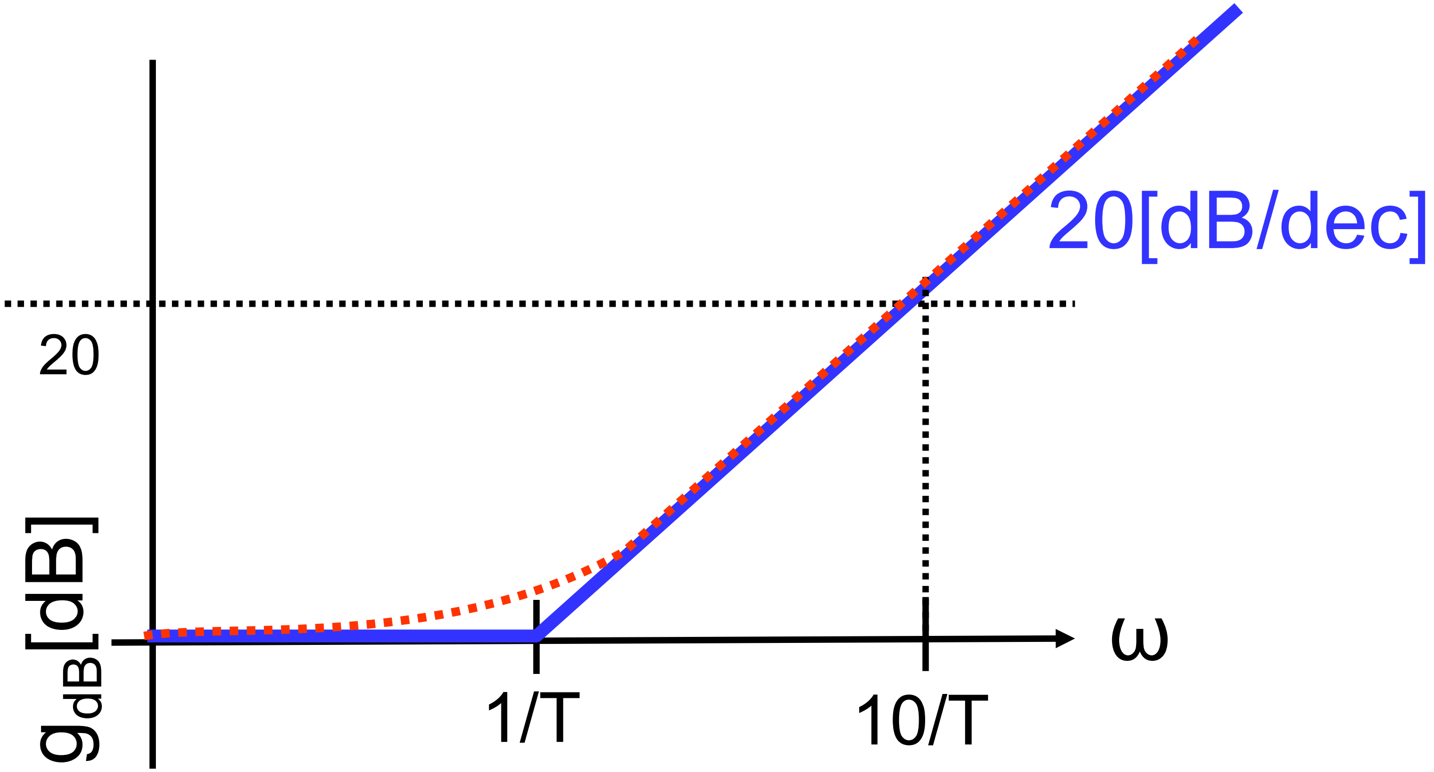
位相φは

$$\angle G(\varpi) = \tan^{-1}\left(\frac{\varpi T}{1}\right) = \tan^{-1}(\varpi T)$$

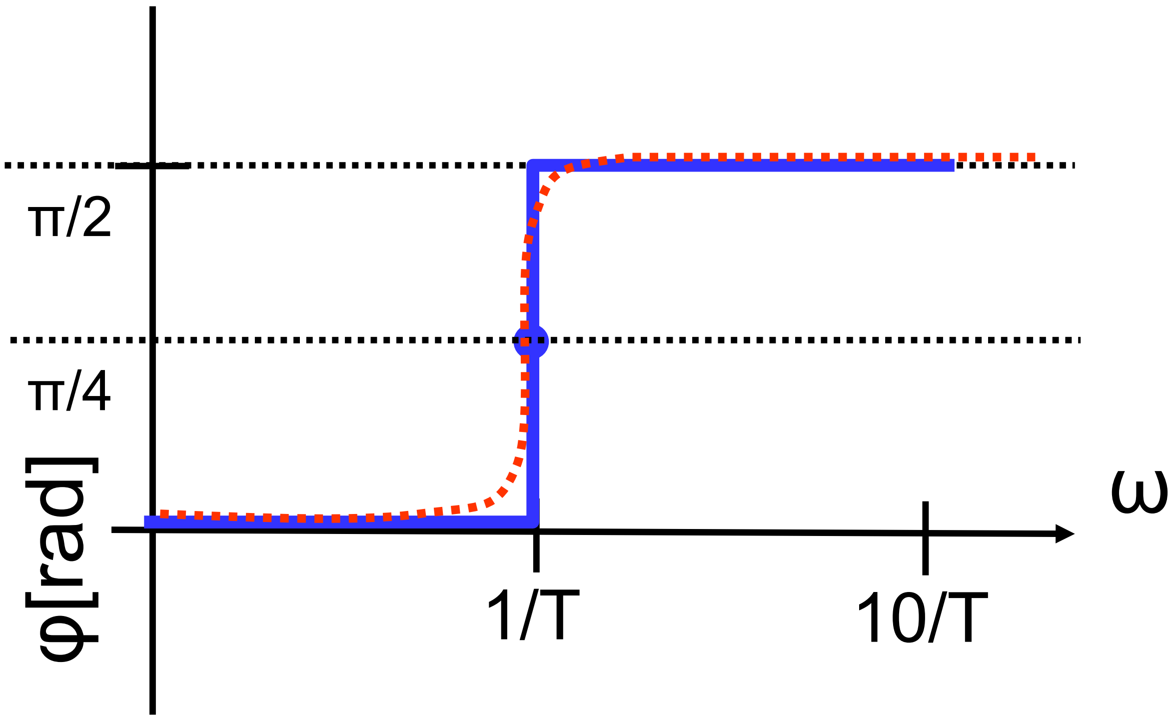
1次遅れ要素と符号が逆



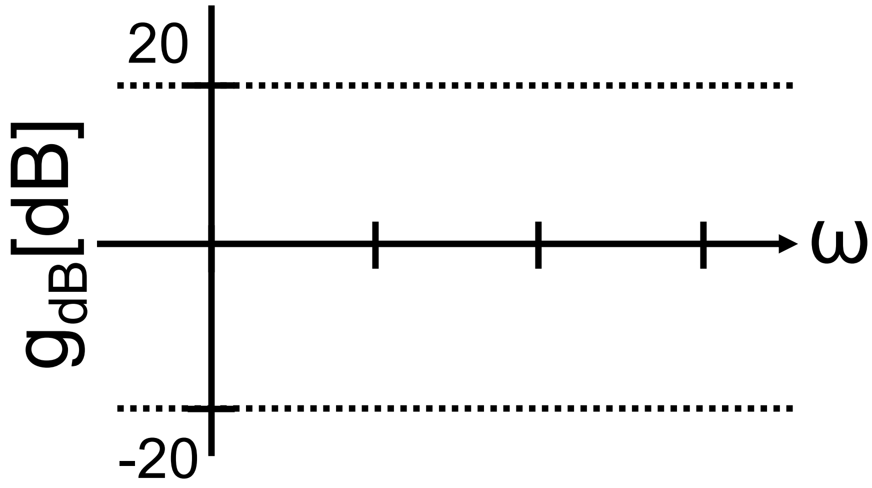
1次進み要素のボード線図:ゲインg_{dB}

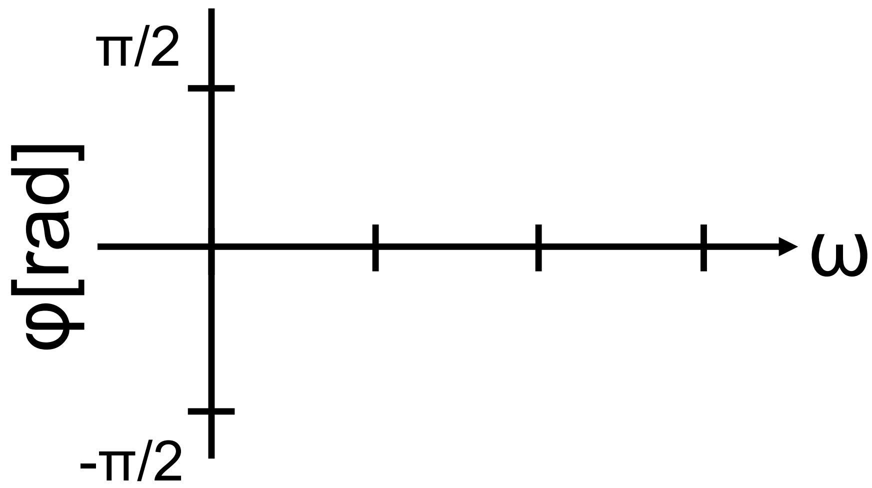


1次進み要素のボード線図:位相 ϕ



G(s)=1+10sのボード線図の概形を描け





ステップ応答

ラプラス領域でのステップ応答は，P.51(2)より

$$Y(s) = (1 + sT)X(s) = (1 + sT)\frac{1}{s} = T + \frac{1}{s}$$

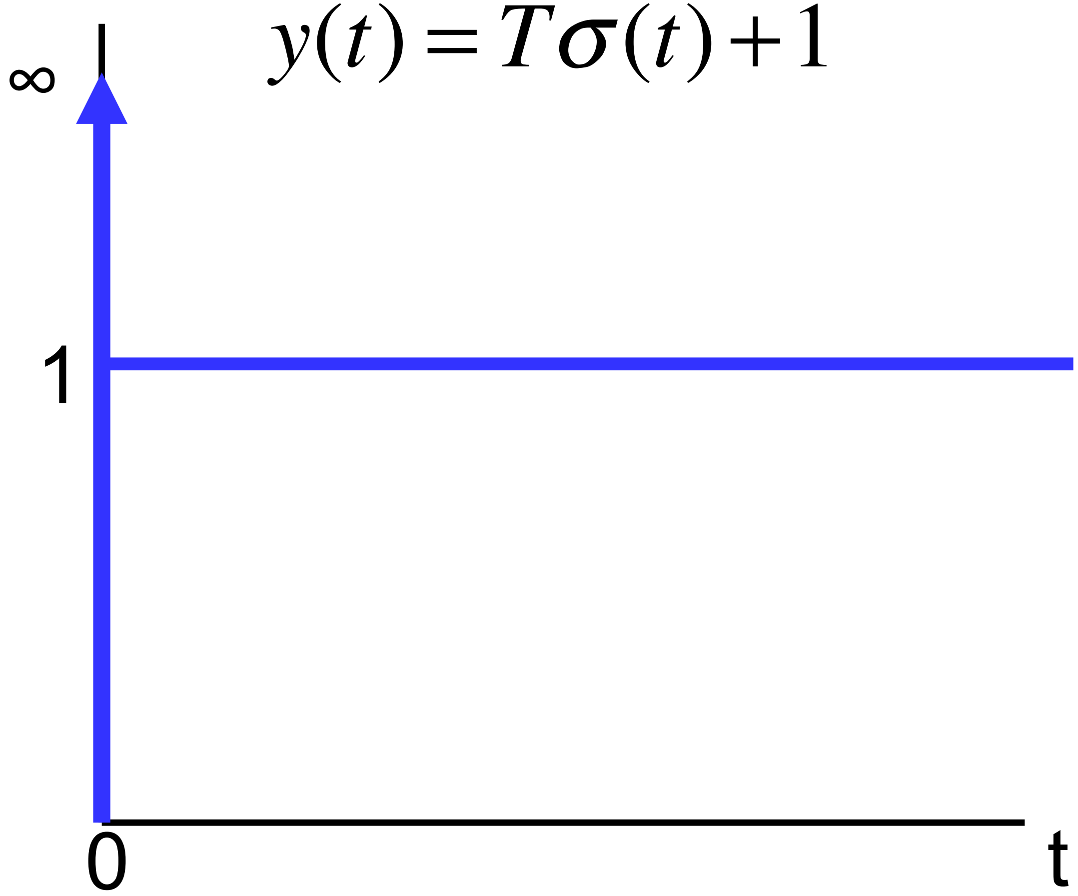
逆ラプラス変換P.51(1), (2)より

$$y(t) = T\sigma(t) + 1$$

ここで， $\sigma(t) = \begin{cases} \infty(t = 0) \\ 0(t \neq 0) \end{cases}$

ステップ応答

$$y(t) = T\sigma(t) + 1$$

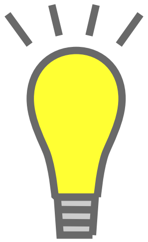


演習

次の伝達関数のボード線図(ゲイン特性)の概形をかけ

$$G(s)=\frac{K}{s}\frac{(1+sT_1)}{(1+sT_2)}$$

ただし，$T_1 >> T_2 >> (1/K)$



ヒント：基本伝達関数に分解＆足し合わせ

解答

基本伝達関数に分解＆足し合わせ

$$G(s) = \frac{K}{s}\frac{(1+sT_1)}{(1+sT_2)} = \boxed{\frac{K}{s}}\boxed{\frac{1}{1+sT_2}}\boxed{(1+sT_1)}$$

$$\quad g_1 \qquad g_2 \qquad g_3$$

g1: 積分+比例
g2: 一時遅れ要素
g3: 一次進み要素

g1,g2,g3のゲイン特性の概形の加算→G(s)のゲイン特性の概形
(計算をする必要はない!!)

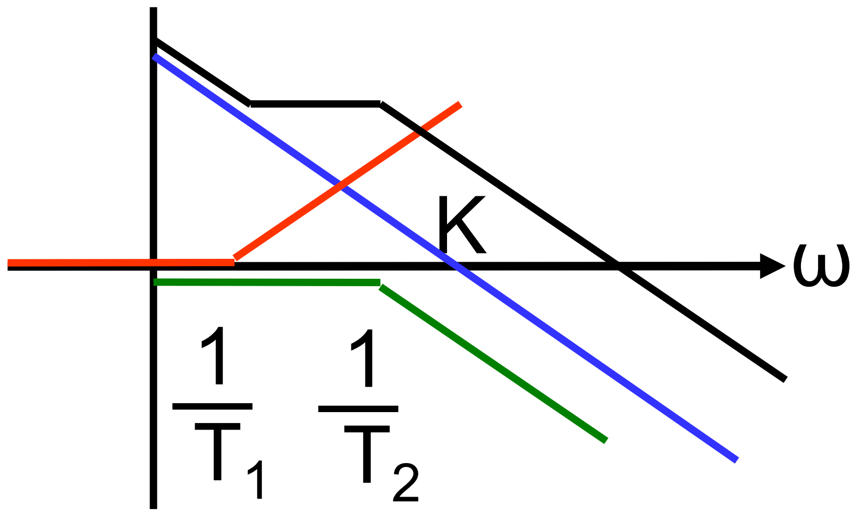
解答

$$g_{dB} = 20\log G(s)$$

$$= 20\log\left(\frac{K}{s}\right) + 20\log\left(\frac{1}{1+sT_2}\right) + 20\log(1+sT_1)$$

$T_1 >> T_2 >> (1/K)$より，$(1/T_1) < (1/T_2) < K$

解答



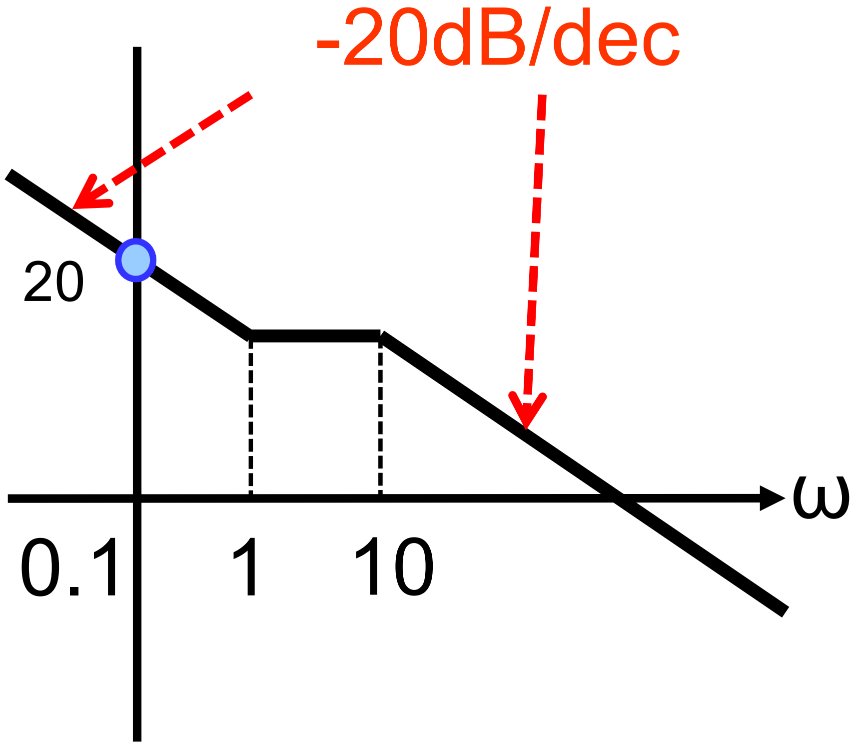
$\omega < 1/T_1 \Rightarrow g_1$のみ$(g_2, g_3 = 0)$. 下降

$1/T_1 \omega < 1/T_2 \Rightarrow g_1$と$g_3$で打ち消しあう $(g_2 = 0)$. 変化無し

$1/T_2 \omega \Rightarrow g_2$により下降

演習：ゲイン特性から伝達関数を推定する

最小位相要素を仮定（次のスライドで説明）



ヒント：左から特定していきましょう

最小位相要素

２つのシステムの
ゲイン特性が同じ　≠　これらのシステムの
位相特性が同じ

最小位相系: ゲイン特性が同じ様々な伝達関数のなかで位相遅れが最も小さいもの

最小位相系⇒ ゲイン特性から位相特性が一意に定まる

システムを解析する際には最小位相系を仮定することが多い