資料6
システムの安定性(6章)

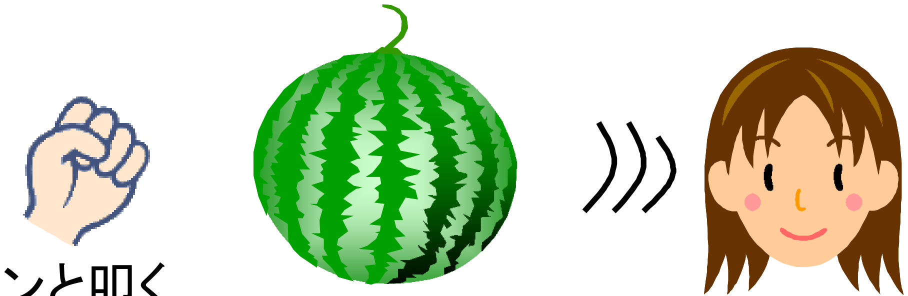
授業の資料のダウンロード:

http://www.ecei.tohoku.ac.jp/hariyama/

パソコン，ipadなどで持ち込んでいただいてもよいです.

最初の問題は解決したか？

よいスイカかどうかを調べるには？



コツンと叩く

耳で音を聞く

インパルス波形

インパルス応答 g(t)
(伝達関数の時間領域表現)

システムを数学的に表現できた(伝達関数G(s)を求めた)

「よい」システムかどうかを調べる

システムの安定性(6章)

よいシステム = (最低限)安定である

システムが安定である

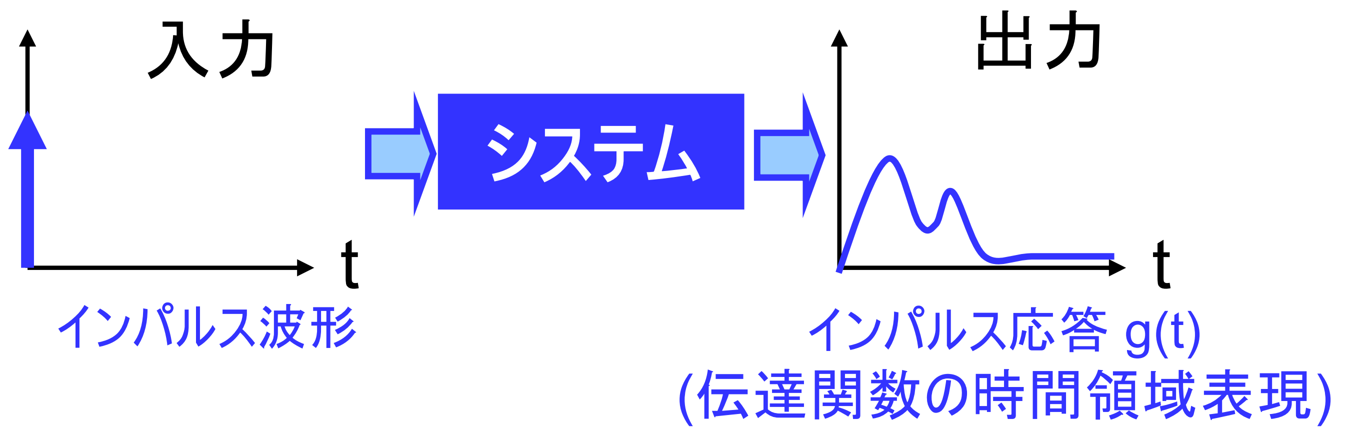
有界の入力⇒有界の出力

有界:値の範囲が有限

⇓

有界入力-有界出力(BIBO)安定

BIBO安定であるための必要十分条件



$$\int_0^{\infty} |g(t)|\,dt < \infty$$

インパルス応答が無限時間まで続かない

(無限時間までインパルス応答が続くと,
一般的な入力に対しては，出力が累積されて∞となる)

⇩

t→∞のとき，g(t)→0

(おはなし)安定と伝達関数の関係

伝達関数

$$G(s)=\frac{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}{(s-b_1)(s-b_2)\cdots(s-b_m)} \qquad \text{(n<m)}$$

$$=\frac{B_1}{s-b_1}+\frac{B_2}{s-b_2}+\cdots+\frac{B_m}{s-b_m}$$

インパルス応答は

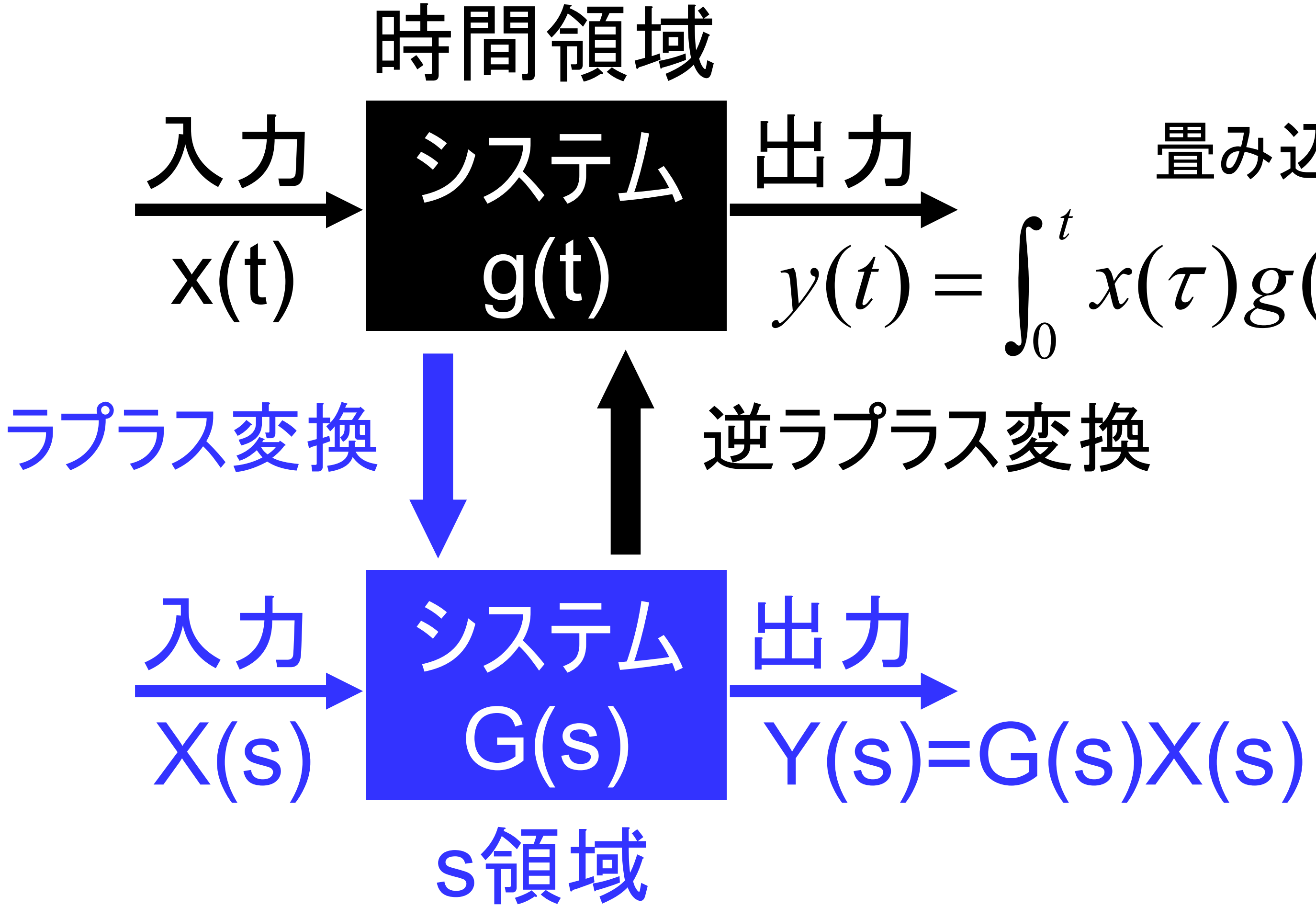
$$g(t)=L^{-1}[G(s)]=\underbrace{L^{-1}[\frac{B_1}{s-b_1}]+L^{-1}[\frac{B_2}{s-b_2}]+\cdots+L^{-1}[\frac{B_m}{s-b_m}]}$$

安定であるためには,

各時間関数が，t→∞のときに0になればよい

(復習)ラプラス変換のシステム的な解釈

システムのインパルス応答:g(t)



畳み込み

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

システムの伝達関数:G(s)

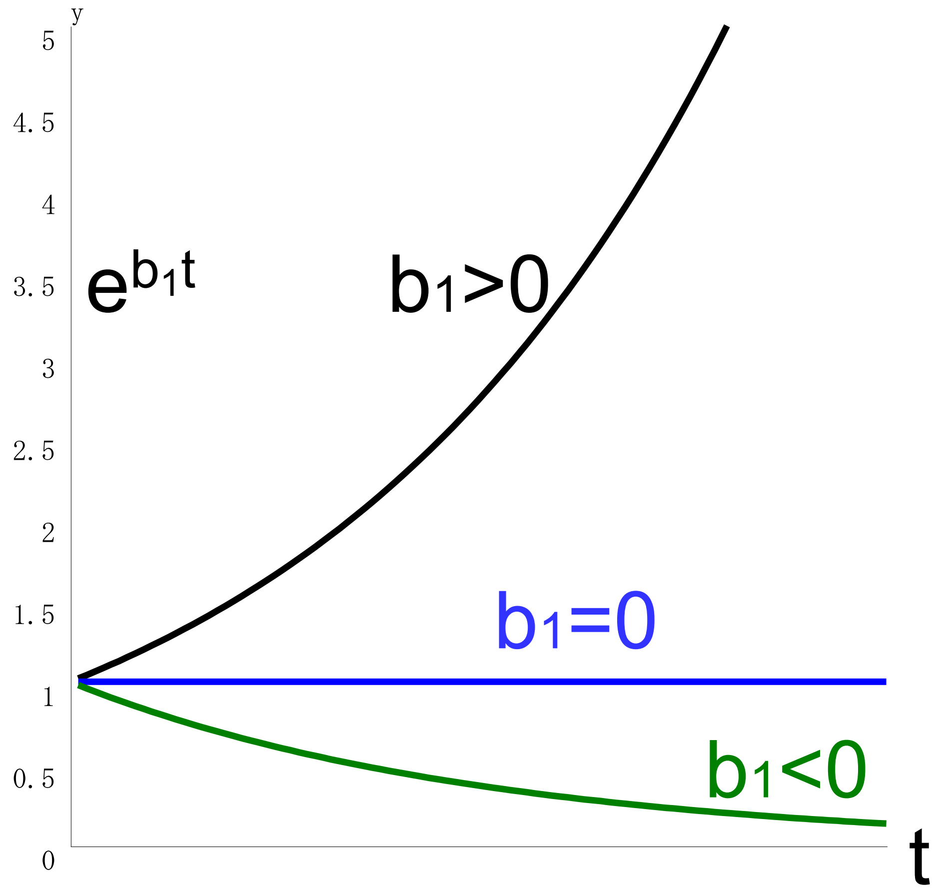
(おはなし)1個の時間関数を見てみよう

b_1が実数の場合

$$L^{-1}\left[\frac{B_1}{s-b_1}\right] = B_1 e^{b_1 t}$$

(P.51の変換表(5)より)

$b_1<0 \Rightarrow$ 安定



(おはなし)1個の時間関数を見てみよう

b_1が複素数の場合($b_1=\alpha+j\beta$)

b_1と共役対となる $b_2=\alpha-j\beta$を考える

b_1, b_2の係数B_1,B_2も複素共役となる

$B_1=a+jb$, $B_2=a-jb$

$$\mathrm{L}^{-1}\left[\frac{B_1}{s-b_1}+\frac{B_2}{s-b_2}\right]=B_1e^{b_1t}+B_2e^{b_2t}$$

$$=\ (a+jb)e^{(\alpha+j\beta)t}+(a-jb)e^{(\alpha-j\beta)t}$$

$$=2e^{\alpha t}(a\cos(\beta t)-b\sin(\beta t))$$ (オイラーの公式より)

$$<2e^{\alpha t}(|a|+|b|)$$

$\alpha<0$すなわち(b_1の実部)<0 ⇒安定

安定性判別の結論

伝達関数

$$G(s)=\frac{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}{(s-b_1)(s-b_2)\cdots(s-b_m)}$$

$$=\frac{B_1}{s-b_1}+\frac{B_2}{s-b_2}+\cdots+\frac{B_m}{s-b_m}$$

G(s)のすべての極 (biの実部)<0 ⇒ 安定

G(s)の極(分母を0とするsの値)
→複素平面で左側にあれば安定

部分分数展開が面倒 ⇒ お手軽な方法を勉強する

演習

以下の伝達関数を持つシステムの安定性を判別せよ

$$(1)\ \frac{1}{s+5}$$

$$(2)\ \frac{1}{s-1}$$

$$(3)\ \frac{1}{(s-5)(s+1)}$$

$$(4)\ \frac{2}{(s+1+i)(s+1-i)}$$

安定性判別の実際的な方法

安定性判別(6章)

伝達関数の分母

- 特性方程式が多項式の場合
  - ➢ラウスまたはフルビッツの方法
    (※どちらかはできるようにする!!)
- それ以外の場合(指数関数がある場合など)，また安定度もみたい場合
  - ➢ナイキスト法や，ボード線図を用いた方法
    (※どちらもできるようにする!!)

フィードバックシステム限定の方法

ラウスの安定判別法(P.128)

伝達関数の分母

特性方程式：$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} \cdots a_{n-1} s + a_n = 0$

特性方程式の係数から“ラウス配列”を作成

2x2の行列式を使うのでおさらい：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ラウスの安定判別法(P.128)

特性方程式：$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} \cdots a_{n-1} s + a_n = 0$

特性方程式の係数から“ラウス配列”を作成

2x2の行列式を使うのでおさらい：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ラウス配列(教科書よりも分かりやすいはず)

特性方程式n次⇒ラウス配列:n+1行の配列

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_2\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_3\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

ラウス配列の規則性：1，2行目

1行目は1, 3, 5, . . . 番目の係数

$$
\boxed{\begin{array}{cccc} a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \end{array}} \;\cdots
$$

$$
\boxed{\begin{array}{cccc} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \end{array}} \;\cdots
$$

2行目は2, 4, 6. . . 番目の係数

$$
\begin{array}{ccccc}
b_1\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_2\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_3\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

ラウス配列の規則性：3行目以降

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
\boxed{a_1} & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{\boxed{a_1}}\right) & b_2 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{\boxed{a_1}}\right) & b_3 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{\boxed{a_1}}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

3行目の分母は，2行目の1列目

ラウス配列の規則性：3行目以降

$$a_0 \quad a_2 \quad a_4 \quad a_6 \quad \cdots$$

$$a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad a_7 \quad \cdots$$

$$b_1\left(= \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{\ \ }\right) \quad b_2\left(= \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{\ \ }\right) \quad b_3\left(= \frac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{\ \ }\right) \quad b \quad \cdots$$

3行目の行列式の1列目は，1，2行目の1列目

3行目の行列式の2列目は，1，2行目の2列目以降を順次適用

$$c_1(= \quad a_1 \quad a_1 \quad a_1 \quad \cdots$$

$$d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots$$

ラウス配列の規則性：3行目以降

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_2\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_3\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
 & & & & \ddots
\end{array}
$$

行列式の前のマイナスを忘れないように！！

ラウス配列を用いた安定判別の結論

- ラウス配列の1列目の要素

  $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1 \cdots$

  の符号変化の回数

  ⇒ 実部が正の特性根

  (特性方程式=0となるs)の数

不安定な極
の数

- 安定であるためには，特性根(特性方程式=0となるs)の実部は負

⇒ラウス配列の1列目の要素の符号変化なしならば，安定

演習

次のフィードバック制御系の安定判別を行え

$$G(s) = \frac{1}{2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 9}$$

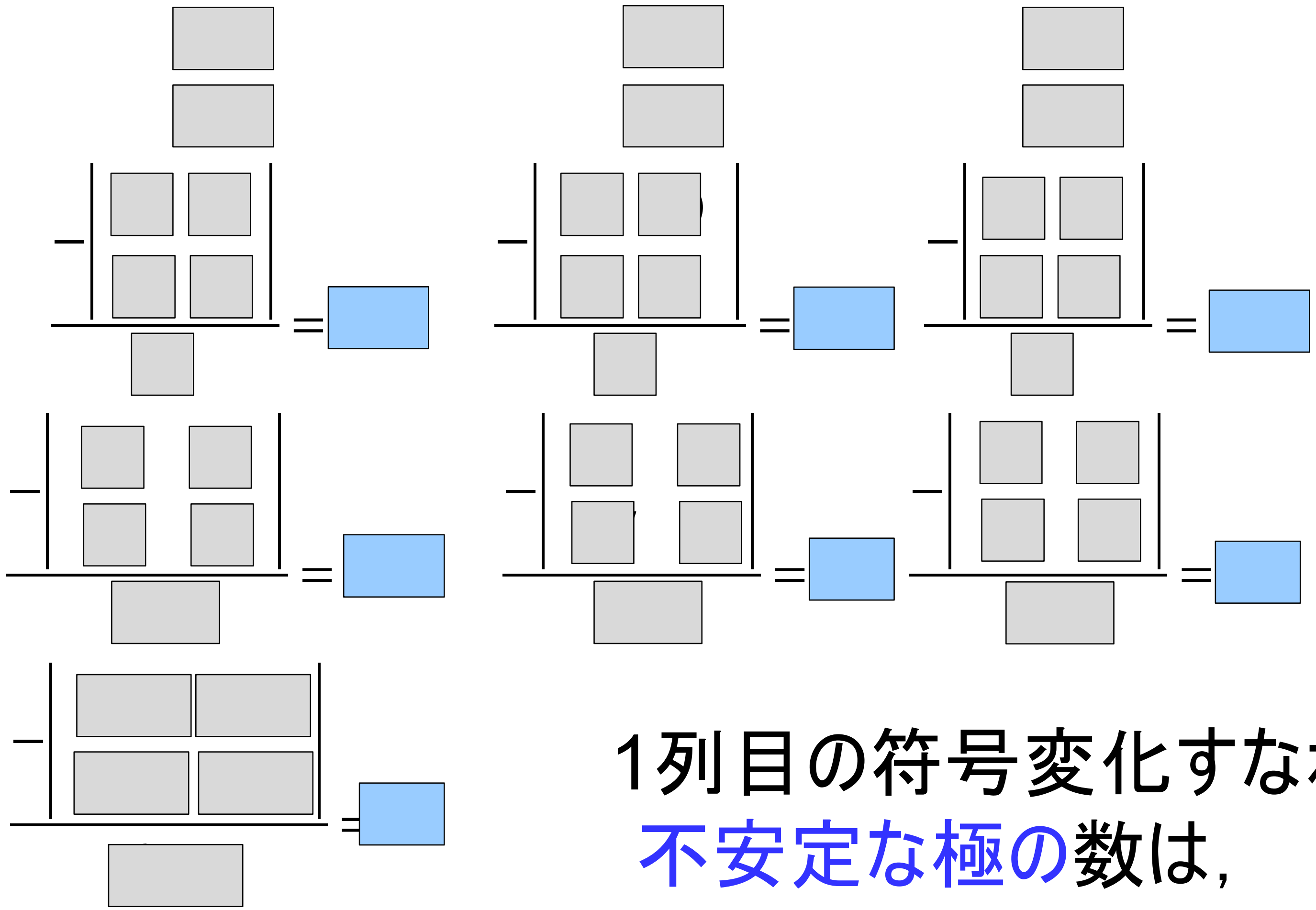
ヒント：ラウス配列において要素がない部分は0とする

解答

フィードバック要素H(s)=1より，特性方程式は，

解答

特性方程式が4次なので，5行のラウス配列は



1列目の符号変化すなわち、
不安定な極の数は，　個.
よって，[安定/不安定]

安定性判別の方法の概略

- 特性方程式が多項式
  - ラウスまたはフルビッツの方法
  - 一般には多項式だけで表現できるとは限らない
- それ以外の場合，安定度もみたい
  - ナイキスト法や，ボード線図を用いた方法
  - グラフを書くのが大変．でも計算機を使えばよい！！

フルビッツの安定判別法(P.128)

特性方程式：$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} \cdots a_{n-1} s + a_n = 0$

ただし，$a_0 > 0$

nxn行列 H

$$
H = \begin{array}{c}\left[\begin{array}{cccccc}
\boxed{a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & a_{2n-1}} \\
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & a_{2n-2} \\
0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-3} \\
0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-4} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n
\end{array}\right]\end{array}
\begin{array}{l}
\text{偶数番目の係数} \\
\text{奇数番目の係数} \\
\text{偶数番目の係数} \\
\text{奇数番目の係数} \\
\\
\\
\end{array}
$$

- a_i (i=1,2…n)がすべて存在し，同符号
- 行列式 $\Delta_i > 0$ (i=1,2,…n) ⇒ 安定

数学的には，ラウスの安定判別法と等価
(次数が少ない時は計算が楽)

フルビッツの行列式

$\Delta_1 = a_1$

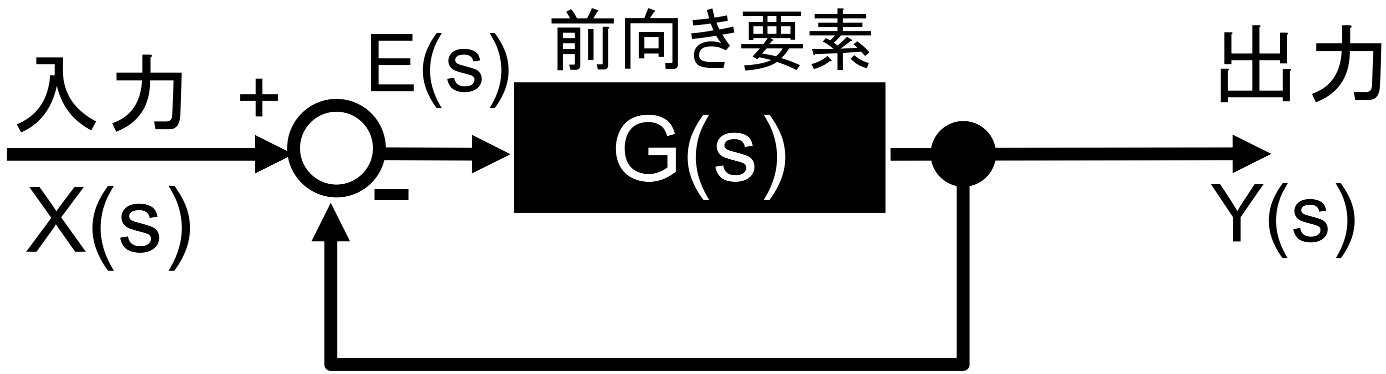
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

演習

次のフィードバック制御系の安定判別を行え



$$G(s)=\frac{1}{2s^4+s^3+3s^2+5s+9}$$

解答

フィードバック要素H(s)=1より，特性方程式は，

$$1+G(s)H(s)=1+G(s)=1+\frac{1}{2s^4+s^3+3s^2+5s+9}=0$$

整理して

$$2s^4+s^3+3s^2+5s+10=0$$

$\Delta_1 = a_1 = 1 > 0$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3-2\cdot 5=-7 < 0$$

従って不安定