資料7
ナイキストの安定判別法

安定性判別(6章)

- 特性方程式が多項式の場合
  - ラウスまたはフルビッツの方法
    (※どちらかはできるようにする!!)
- それ以外の場合(指数関数がある場合など), また安定度もみたい場合
  - ナイキスト法や, ボード線図を用いた方法
    (※どちらもできるようにする!!)

フィードバックシステム限定の方法

ナイキスト線図とは?

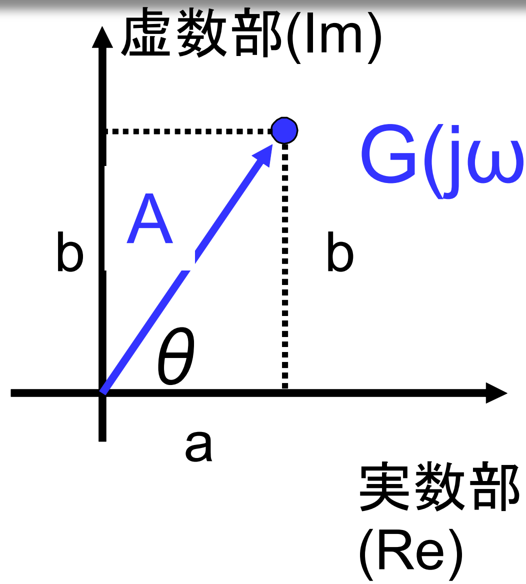
復習

伝達関数 $G(s)$

$s = j\omega$

周波数伝達関数

$G(j\omega)$



G(jω)=a(ω)+jb(ω)

ちなみに

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

ωを0(または-∞)→∞で変化

⇒ G(jω)の軌跡(ナイキスト線図)

ナイキスト線図の形状⇒安定性・速応性などに関する情報

例題1 (P.133) まずは描き方

なぜ開ループ伝達関数
を用いるのか? → 次ページチェック!!

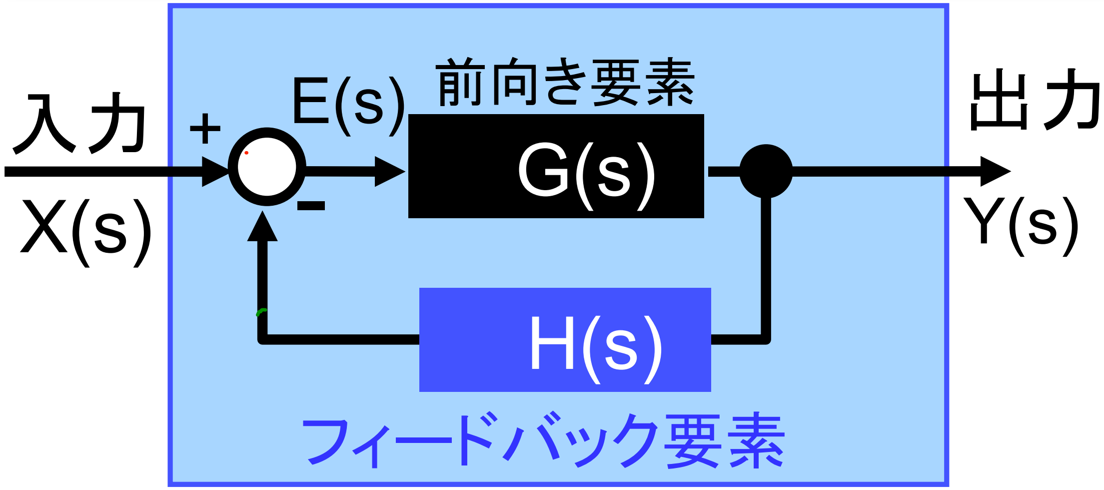
「開ループ伝達関数」が次式で与えられとする. ω=0〜∞で制御系のナイキスト線図の概形を描き, 安定性を調べよ

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)}$$

ヒント: ナイキスト線図を書くときは, s=jωと置く

教科書では, 極座標(ゲイン|G(jω)|と位相θ)を用いた描き方を説明してます.
私の授業では, 直交座標を用いた描き方を説明

(補足)ナイキスト線図を用いたフィードバック制御系の安定性判別: 開ループ伝達関数を用いる



$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} X(s)$$

閉ループ伝達関数

本当に解析したいのはこちら
(でも複雑)

より簡単な
開ループ伝達関数
$G(s)H(s)$
を用いて解析

周波数伝達関数をもとめよう

$$G_0(jw) = G(jw)H(jw) = \frac{10}{jw(jw+1)(jw+5)} = \frac{10}{jw[(5-w^2)+j6w]}$$

実部Rと虚部Iを求められるように変形する.

$$G_0(jw) = \frac{-10j}{w}\frac{1}{(5-w^2)+j6w}\frac{(5-w^2)-j6w}{(5-w^2)-j6w}$$

$$= -\frac{10}{w}\frac{6w+j(5-w^2)}{(5-w^2)^2+36w^2}$$

実部 $R = \dfrac{-60}{(5-w^2)^2+36w^2}$　虚部 $I = \dfrac{-10}{w}\dfrac{(5-w^2)}{(5-w^2)^2+36w^2}$

ω=0, ω$_{\pi}$, ∞のときの座標を計算

実部 $R = \dfrac{-60}{(5-w^2)^2 + 36w^2}$　虚部 $I = \dfrac{-10}{w} \dfrac{(5-w^2)}{(5-w^2)^2 + 36w^2}$

w=0 :　$R = \dfrac{-60}{(5)^2} = -2.4$　$I = -\infty$

w=∞ :　$R = 0$　$I = \dfrac{\infty^2}{\infty^5} = 0$ (分母にw^{5}が出てくる)

w=w$_{\pi}$:　$I = 0$ より　$w_{\pi} = \sqrt{5}$

ナイキスト線図
が実軸と交わるω

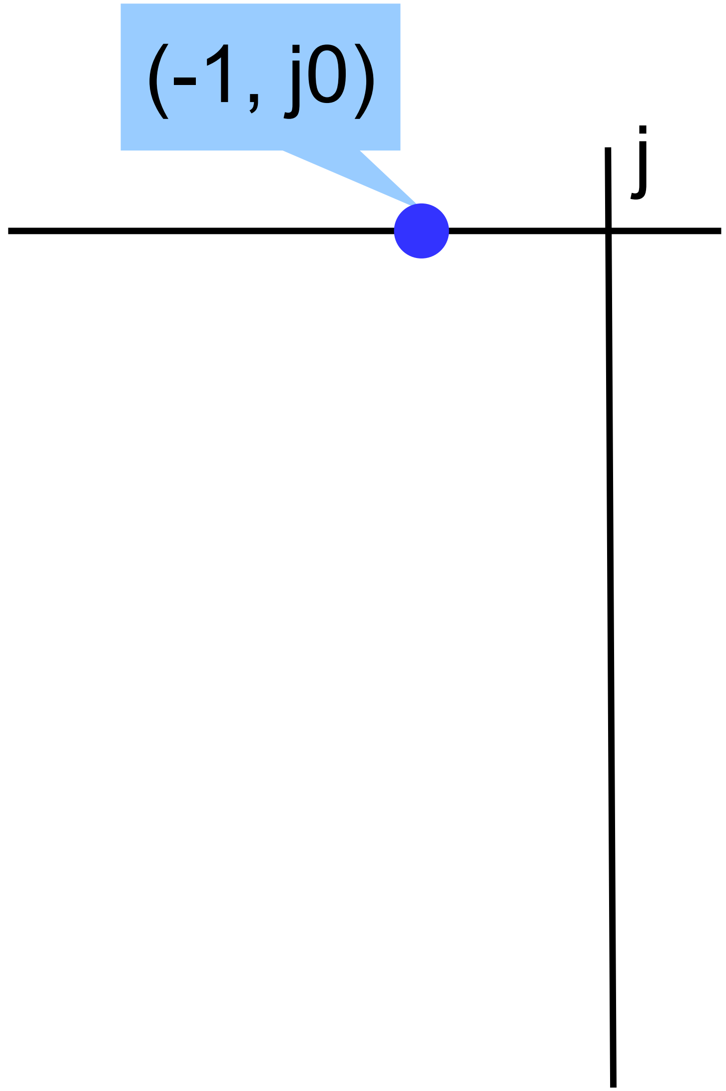
このとき，R=|G(jw$_{\pi}$)|= $\dfrac{-60}{36 \cdot 5}$ =-0.33

ナイキスト線図の概形を書いてみよう

w=0： $R = -2.4 \quad I = -\infty$

w=∞： $R = 0 \qquad I = 0$

w=w$_{\pi}$ = $\sqrt{5}$： $R = -0.33 \quad I = 0$



(簡略化された)ナイキストの安定条件(P.130)

極が右半面の場合には,後述の拡張ナイキスト法

適用条件:

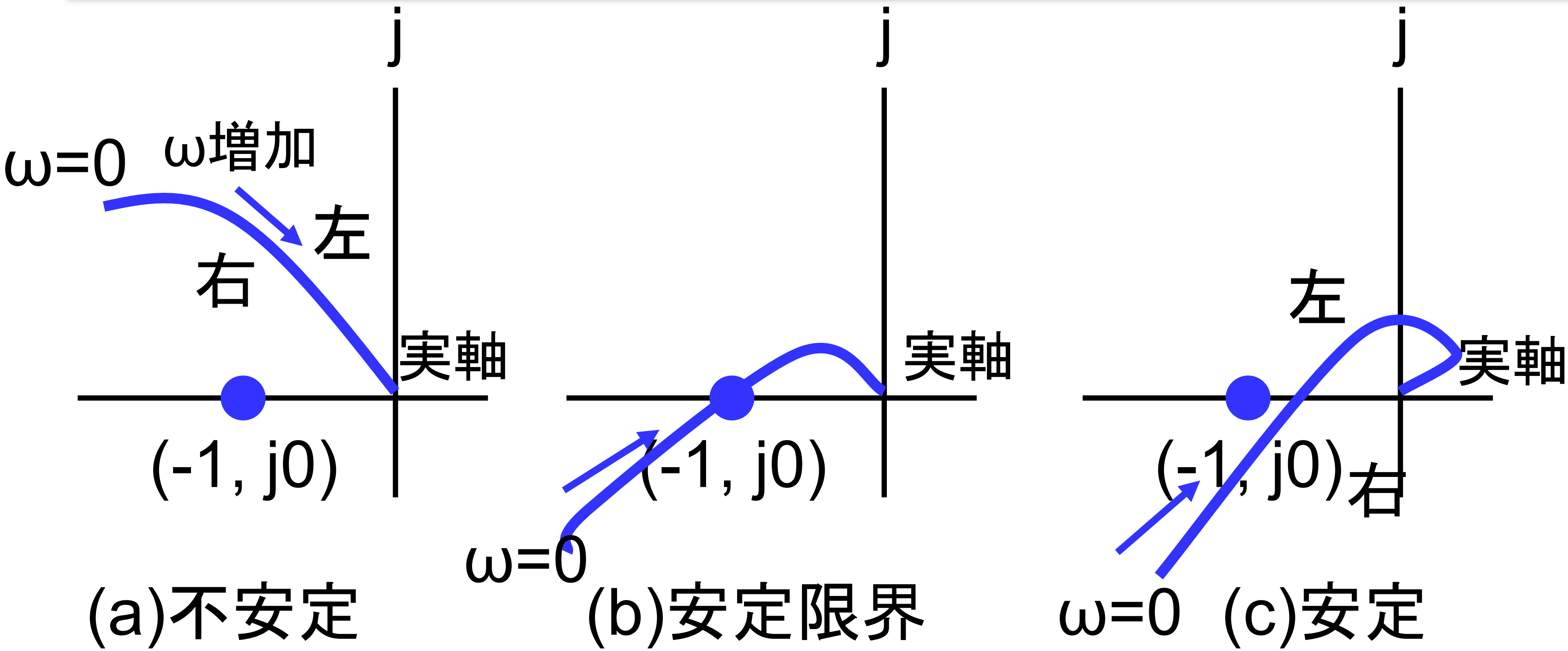
開ループ伝達関数G(s)H(s)の極がs平面の**「右半面」**にない場合

1. 複素平面において，ωが0～+∞に対する開ループ伝達関数G(jω)H(jω)のナイキスト線図を書く

1+G(jω)H(jω)ではなく，G(jω)H(jω)を対象としていることに注意

2. ωが0～+∞のときに，(−1, j0)点を左に見れば安定，右側にみれば不安定

安定判別法適用例



例題1 (P.133)の続き

開ループ伝達関数が次式で与えられる，制御系のナイキスト線図の概形を描き，安定性を調べよ

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)}$$

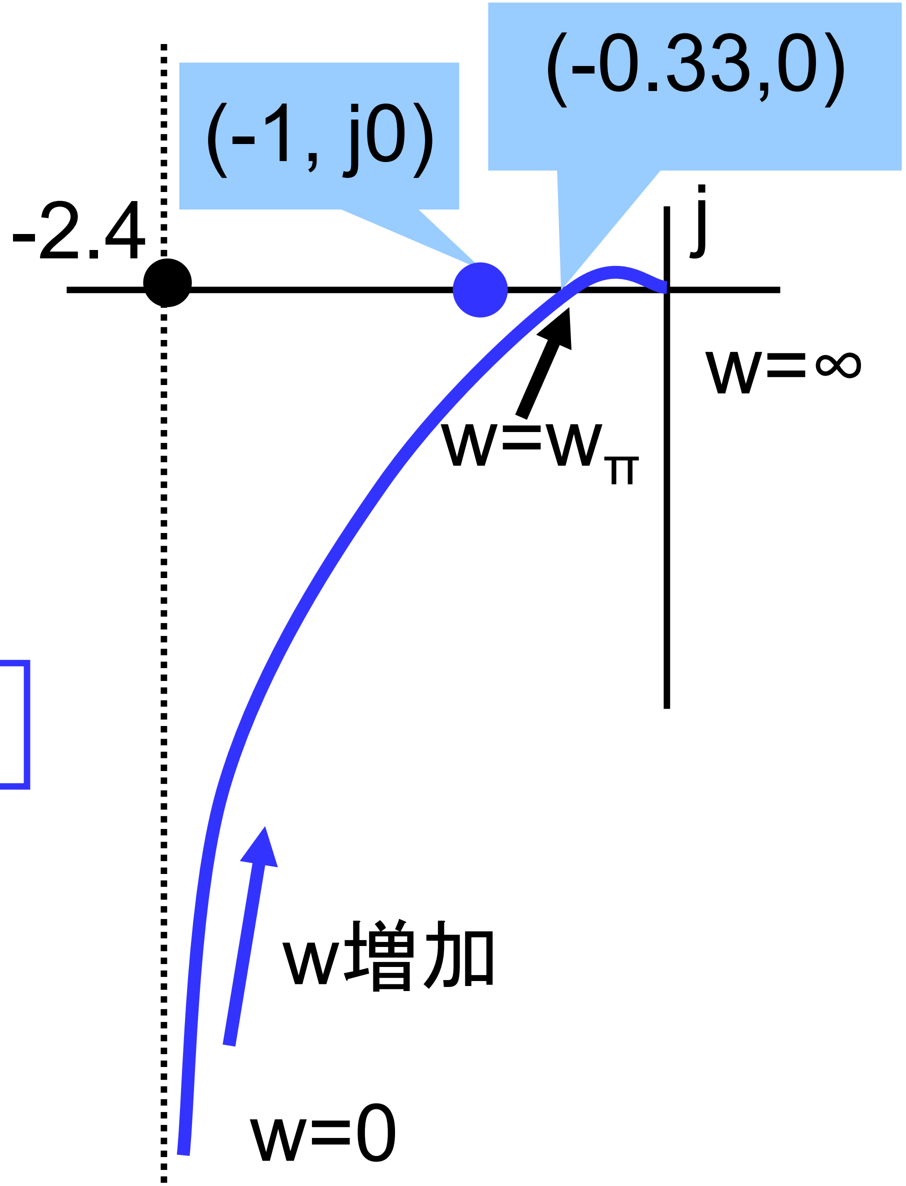
ヒント：ナイキスト線図を書くときは，s=jωと置く

ナイキスト線図を用いた安定性判別

w=0 : $R=-2.4 \quad I=-\infty$

w=∞ : $R=0 \qquad I=0$

$w=w_{\pi}=\sqrt{5}$: $R=-0.33 \quad I=0$



軌跡が(-1,j0)を左にみる⇒安定

拡張ナイキスト条件を用いた安定性判別

拡張ナイキストの条件(P.136)

適用条件:

開ループ伝達関数G(s)H(s)の極がs平面の***<u>右半面にある</u>***場合

開ループ伝達関数G(S)H(S)の極の総数をPとする.
ω: -∞ → +∞のときG(s)H(s)のナイキスト線図が
(-1, j0)を反時計方向にP回まわるならば，この制御系
は安定である

例題(P.137)

開ループ伝達関数が次式で与えられるシステムの安定判別を拡張ナイキスト条件を用いて行え

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s-1}$$

ただし，K>1とする(私がつけた条件)

周波数伝達関数を求める

$$\frac{K}{s-1} \Rightarrow \frac{K}{j\omega-1} = \frac{K}{j\omega-1}\frac{j\omega+1}{j\omega+1} = -\frac{K}{\omega^2+1} - j\frac{K\omega}{\omega^2+1}$$

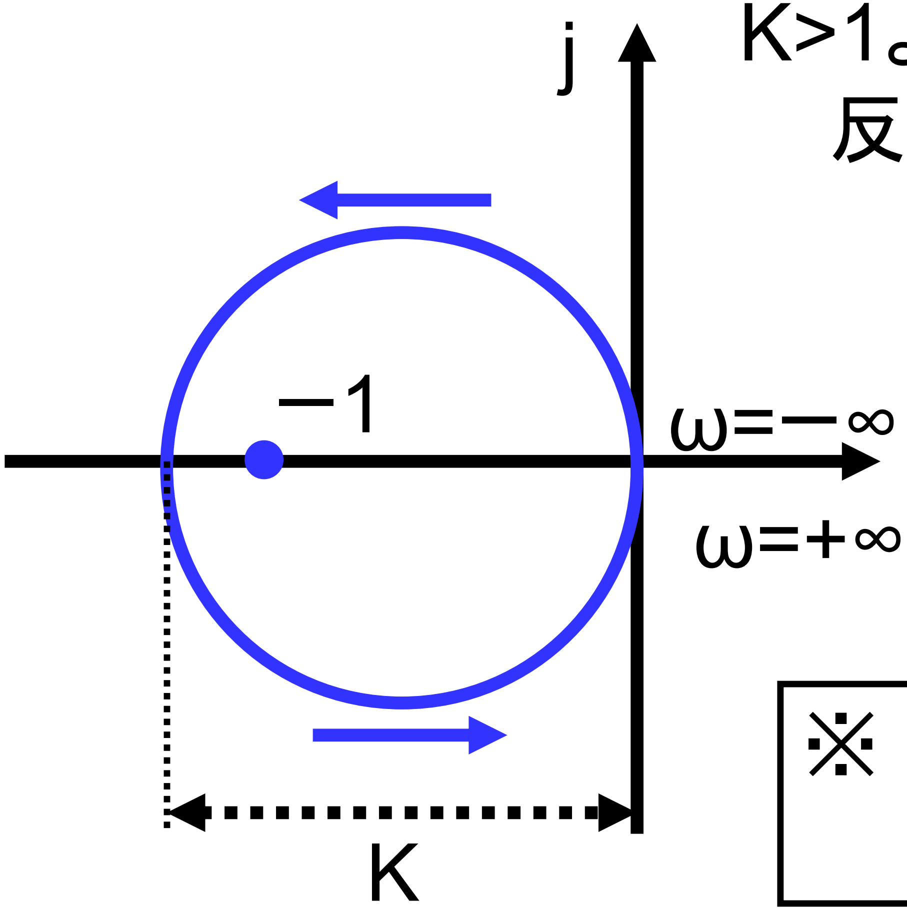
実部a,虚部bは $\boxed{a = -\frac{K}{\omega^2+1}, b = -\frac{K\omega}{\omega^2+1}}$

$$a^2+b^2 = \frac{K^2}{(\omega^2+1)^2} + \frac{K^2\omega^2}{(\omega^2+1)^2} = \frac{K^2}{(\omega^2+1)} = -Ka$$

$\boxed{\left(a+\frac{K}{2}\right)^2 + b^2 == \left(\frac{K}{2}\right)^2}$ 中心(-K/2,0),半径(K/2)の円

解説(P.137)

ナイキスト線図をかく



K>1より⇒
反時計方向に(-1, j0)を1回まわる

G(s)H(s)の極の数は1

⇓

安定

※ K<1の場合には，反時計方向に0回まわるので不安定

ナイキスト線図を用いた安定度の解析

安定度を調べる必要性

安定/不安定だけでなく
どの程度安定しているのか? (量の問題)

■ 安定度

- システムが不安定になるまでに“余裕”の大きさ
- 余裕が少ない安定なシステムは，何かの外乱(ノイズ)で不安定になるかもしれない.

安定度の定量的指標

- ゲイン余裕(GM: Gain Margin)
  - 入出力振幅比(伝達関数の大きさ)に関する指標
- 位相余裕(PM: Phase Margin)
  - 位相遅れに関する指標

前回の例題 (P.133)を用いて，GM, PMを理解しよう

開ループ伝達関数が次式で与えられる，制御系のナイキスト線図の概形を描き，安定性を調べよ

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)}$$

ヒント：ナイキスト線図を書くときは，s=jωと置く

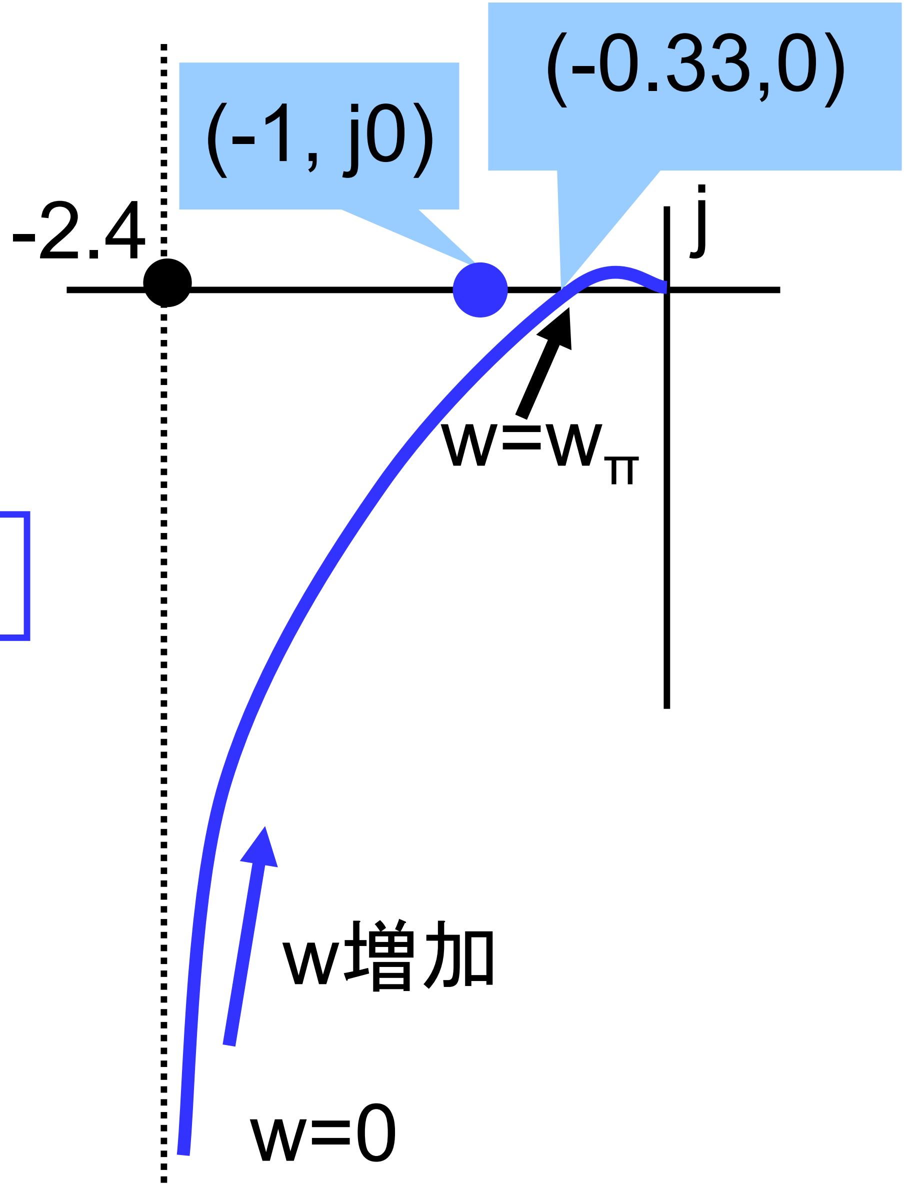
ナイキスト線図の概形を書いてみよう（既にやった）

w=0 : $R = -2.4 \quad I = -\infty$

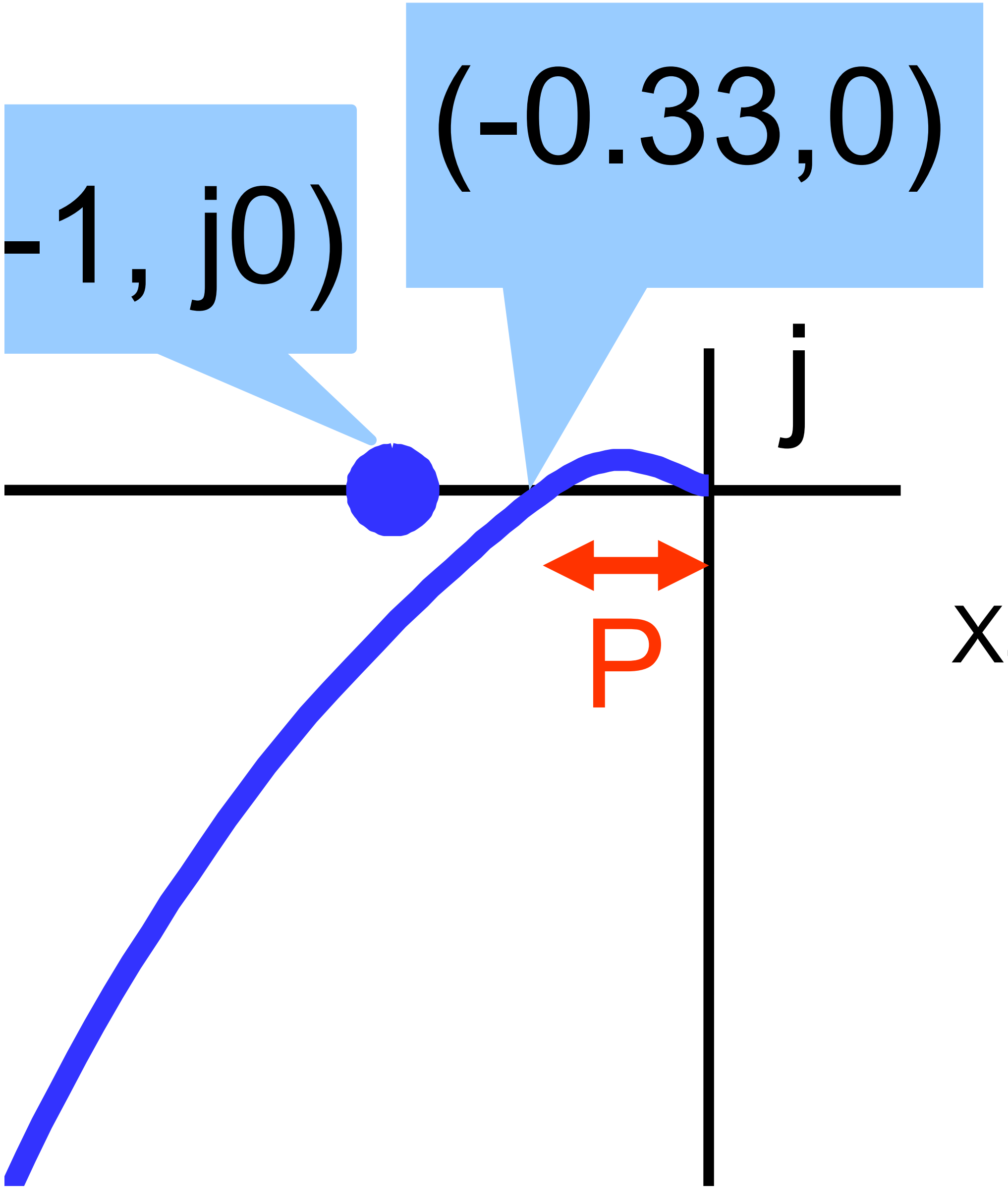
w=∞ : $R = 0 \qquad I = 0$

w=w$_\pi$= $\sqrt{5}$: $R = -0.33 \quad I = 0$

軌跡が(-1,j0)を左にみる⇒安定



ゲインに関する安定度(Gain Margin)を調べてみよう



X軸と交差するときに
(-1, j0)をからより
原点に近い側を
通過すればより安定度は高い

↓

X軸と交差するときのG(s)H(s)
の大きさ(ゲイン)Pが
1より小さいほど安定

ゲイン余裕(Gain Margin)の定義

ゲインはダイナミックレンジが広いのでlogをとる

$$GM = 20\log\boxed{\frac{1}{P}} = -20\log P = -20\log[|G(jw_\pi)H(jw_\pi)|]$$

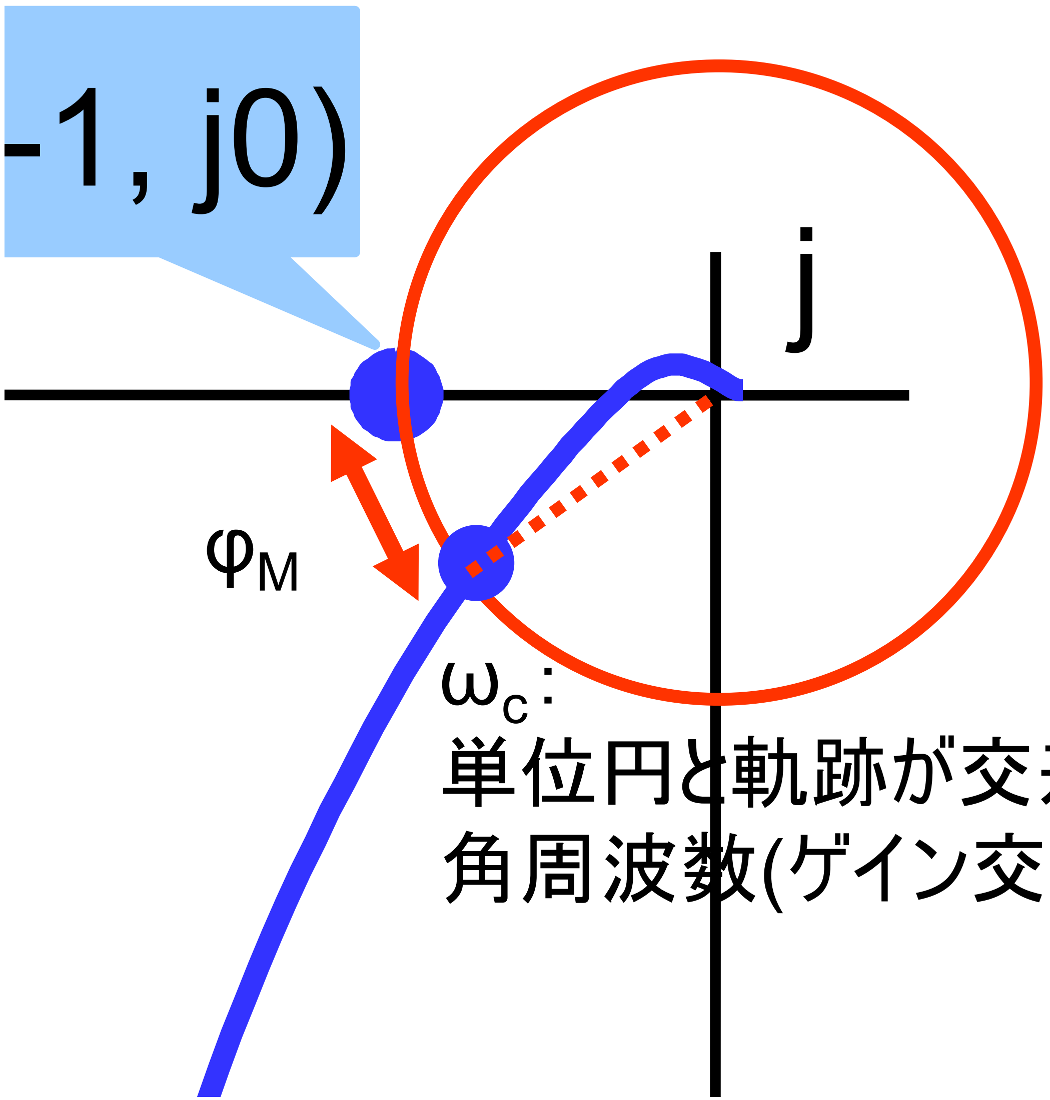
Pを何倍したら
不安定になるか

P.133の例)

$$20\log\left(\frac{1}{0.33}\right) = 9.63$$

[dB]

位相余裕(Phase Margin)を調べてみよう



ω_c：
単位円と軌跡が交差するときの
角周波数(ゲイン交差周波数)

ゲインPが1になったときに
(-1, j0)からできるだけ
離れた方が安定

φ_Mが大きいほど安定
(位相余裕)

位相余裕の求め方

ゲイン $|G(j\omega)|=1$ ⇒ ω_c を求める

⇩

位相$\theta(\omega_c)$ を求める

⇩

$\pi+\theta(\omega_c)$ を求める

例) G(s)H(s)=10/(s(s+1)(s+5))

$$\theta=-2.7[rad](-155[\deg])$$
$$\Rightarrow PM=\pi+\theta=180[\deg]-155[\deg]$$
$$=0.44[rad](25[\deg])$$

直交座標表現を用いた場合

$|G(j\omega)|=\sqrt{(実部)^2+(虚部)^2}=1$となる$\omega_c$

位相余裕・ゲイン余裕の目安

- 目標値追従制御(目標が動的に変わる制御)
  - ゲイン余裕　10～20[dB],
  - 位相余裕　40～60[deg]

    (位相余裕大→振動しにくい)
- 定値制御(目標が固定)
  - ゲイン余裕　3～10[dB]
  - 位相余裕　20[deg]以上

レポート

- P.142-143の
  - 6. 1
  - 6. 2
  - 6. 4

- 提出期限
  - 次回の 授業終了後提出
  - ステープラーで左綴じ，学籍番号，名前を1枚目に書くこと