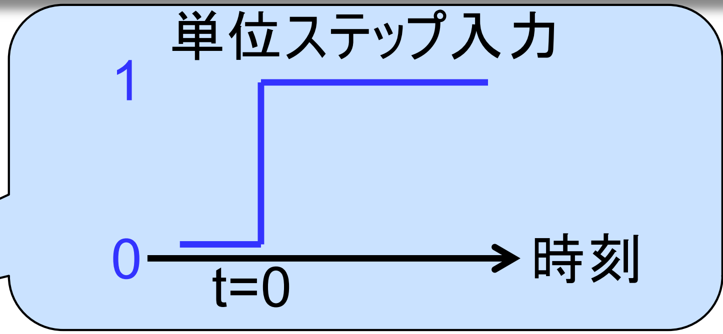
システム制御工学A

資料9 速応性と定常特性 今回はこちら

（教科書の7章）

安定性以外に制御系設計において重要なこと



時間特性(ステップ応答)

- 過渡特性

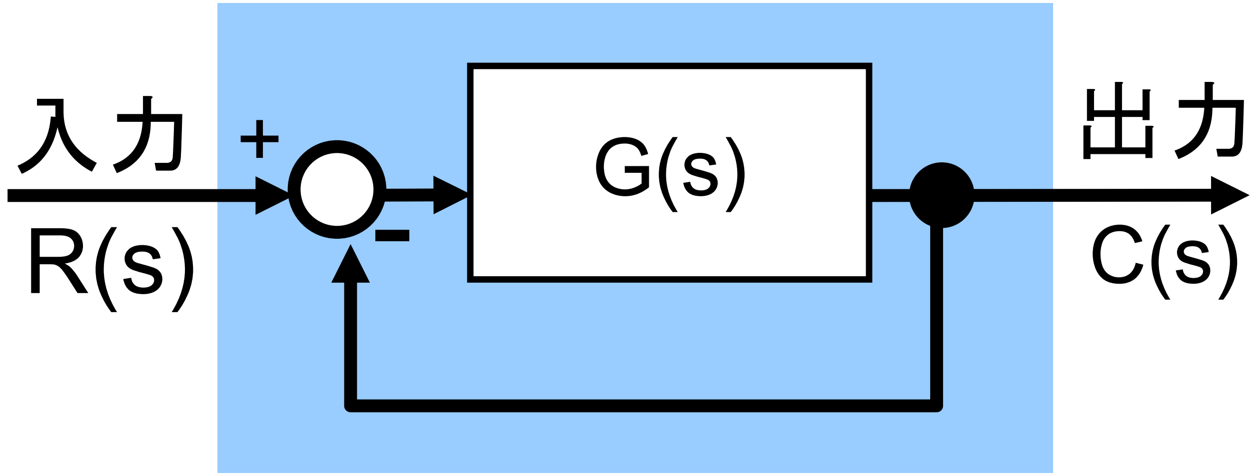
  速応性：単位ステップ入力の立ち上がりに対する追従性

  減衰性：最終値に速やかに収束するか

- 定常特性

  定常状態($t \to \infty$)では，目標値と制御対象の出力の差（定常偏差）が小さいほうが望ましい

対象:「直結型」フィードバックシステム



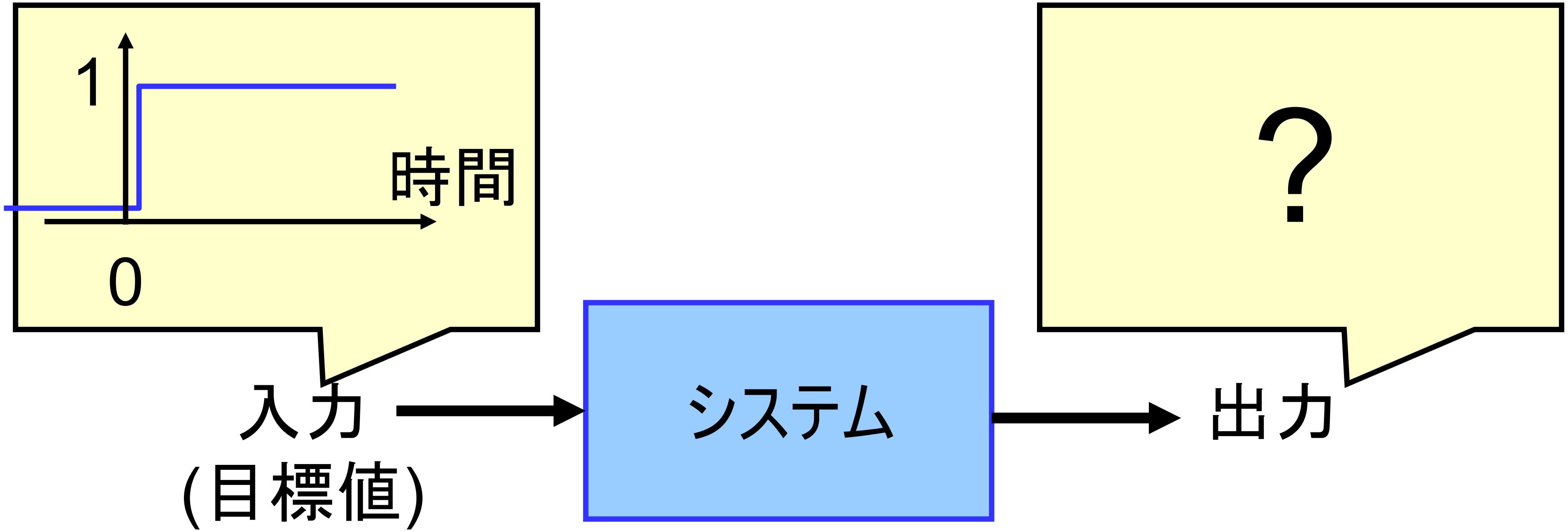
全体の伝達関数
（閉ループ伝達関数）

$$\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

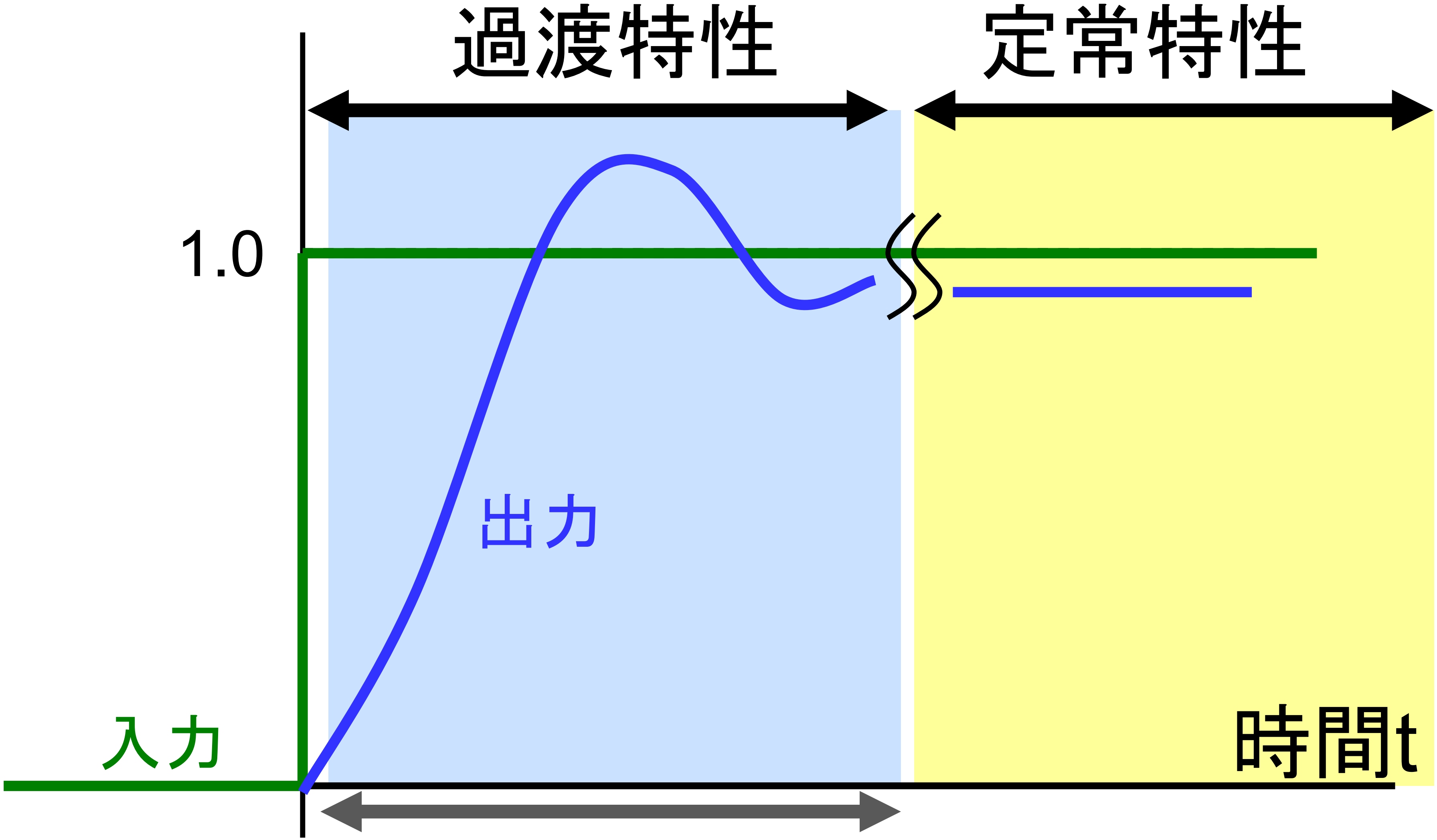
（簡単な）直結型フィードバックシステムを用いて
過渡応答特性を調べる

どうやって調べるのか? ステップ応答

システムに**単位ステップ入力**を入れた場合の出力

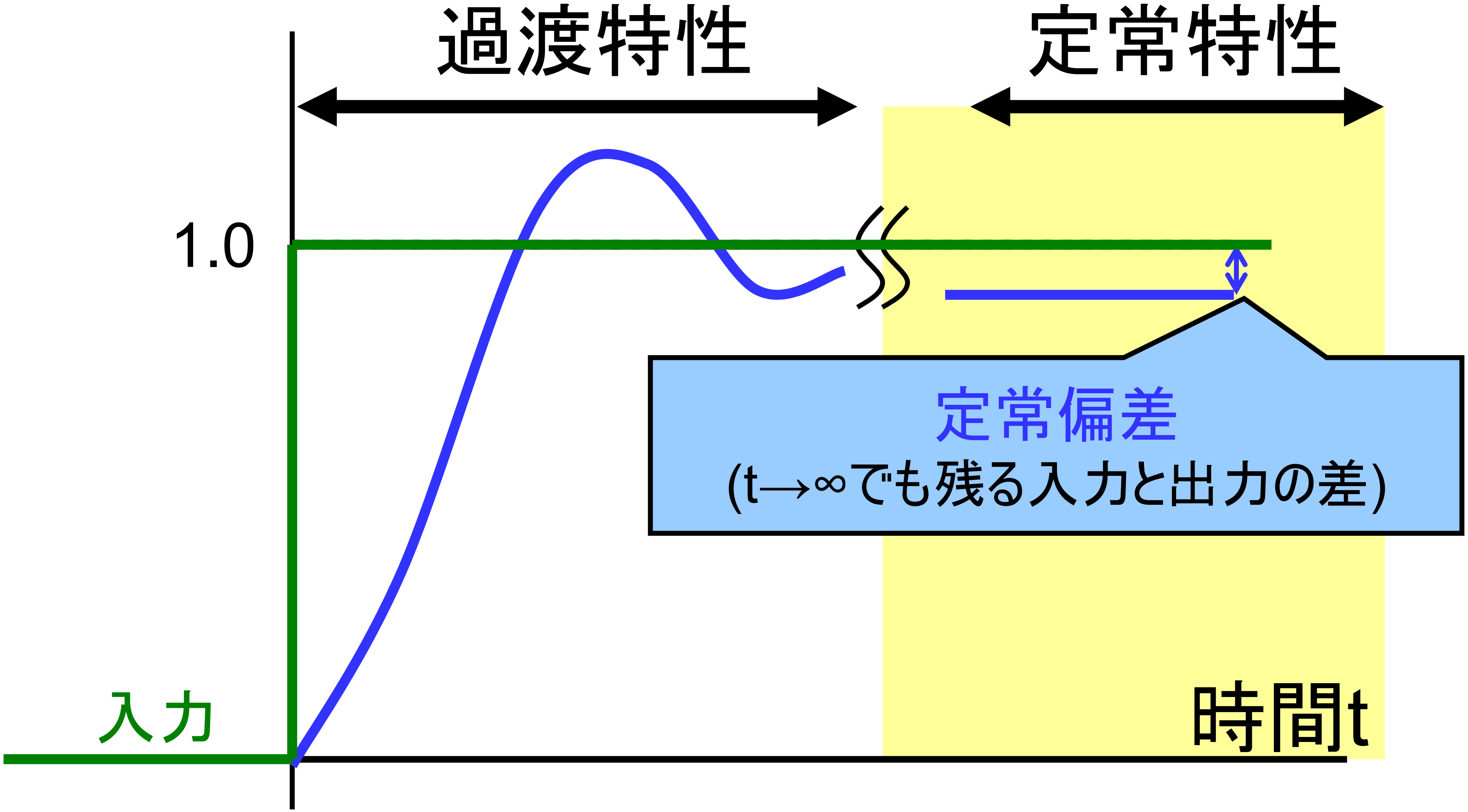


ステップ応答(P.146)における過渡特性と定常特性



Ts 整定時間：出力が最終値の±5%に収まるまでの時間

定常偏差の意味



7.3 定常偏差の詳細

時間領域

目標値(入力) $r(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow$ 出力 $c(t)$

$$\boxed{\text{定常偏差 } e = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} \{ r(t)-c(t) \}}$$

ラプラス領域で
定常偏差を求めてみよう

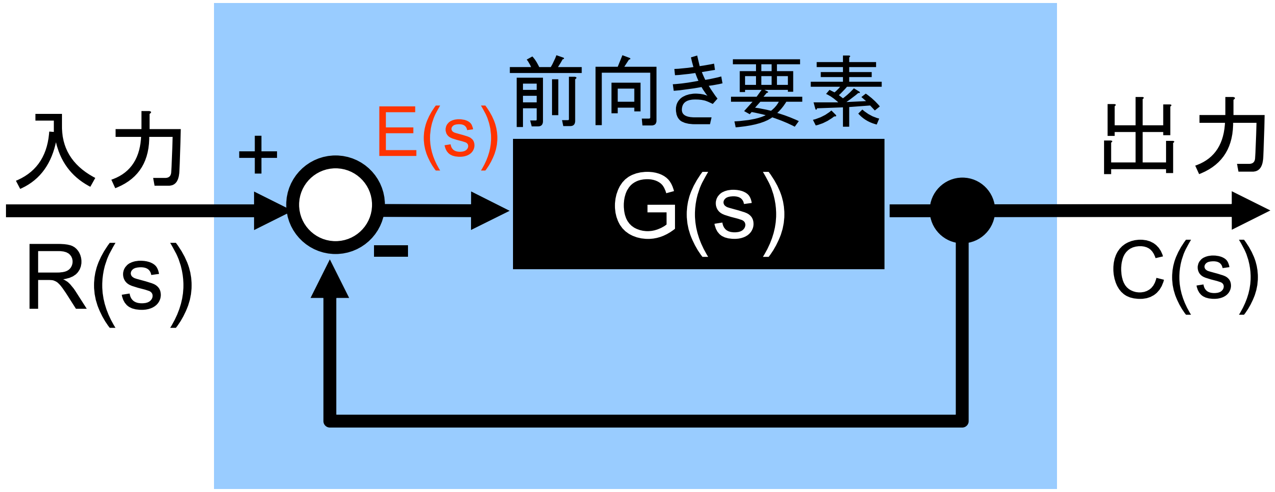
入力 $R(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow$ 出力 $C(s)$

$$\boxed{\text{定常偏差 } e = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\{R(s)-C(s)\}}$$

最終値の定理(P.55)

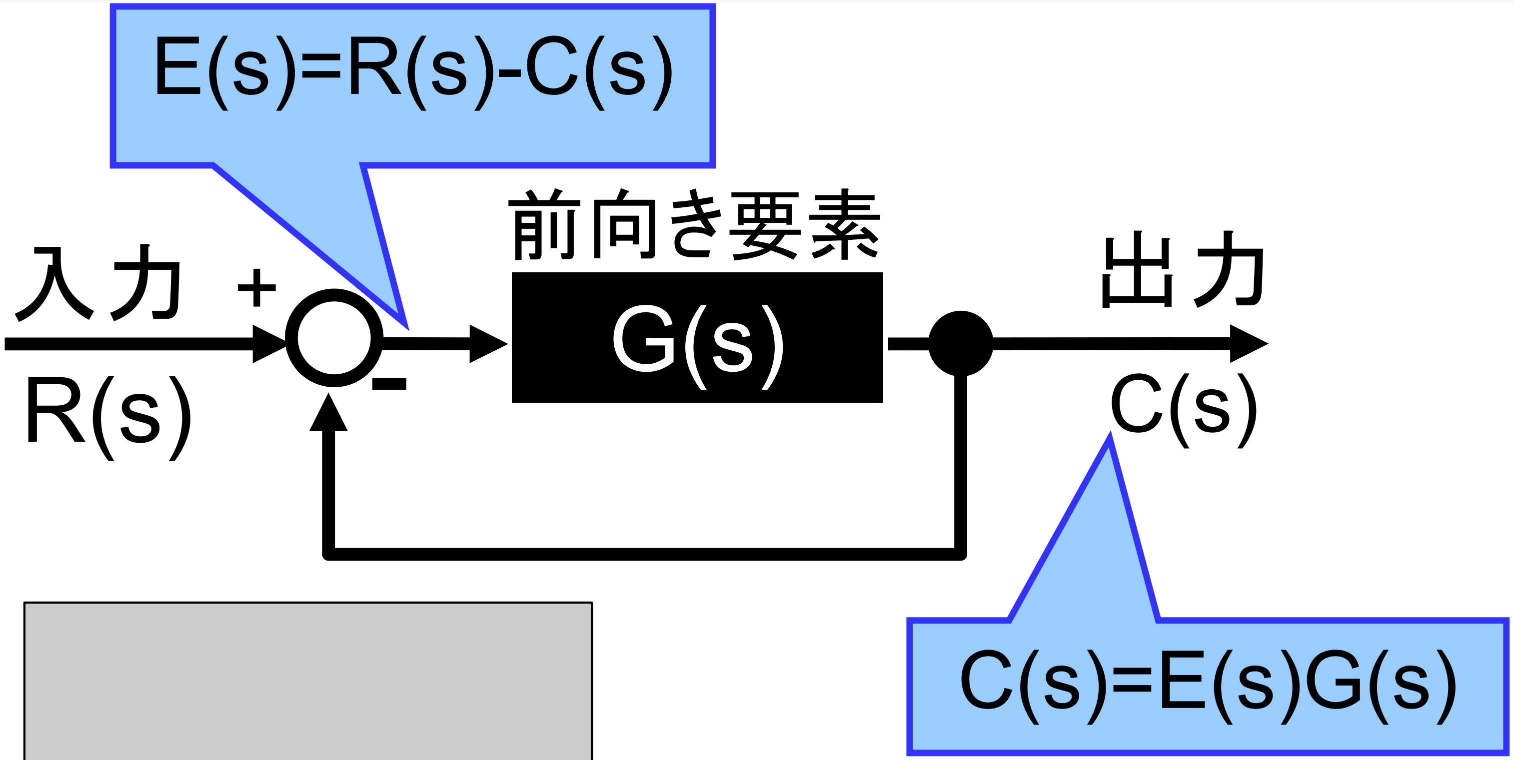
例題1: フィードバック制御系における偏差の求め方

下記の“直結フィードバック制御系”の偏差e(t)の
ラプラス変換E(s)を求めよ(E(s)をR(s),G(s)を用いて表せ)



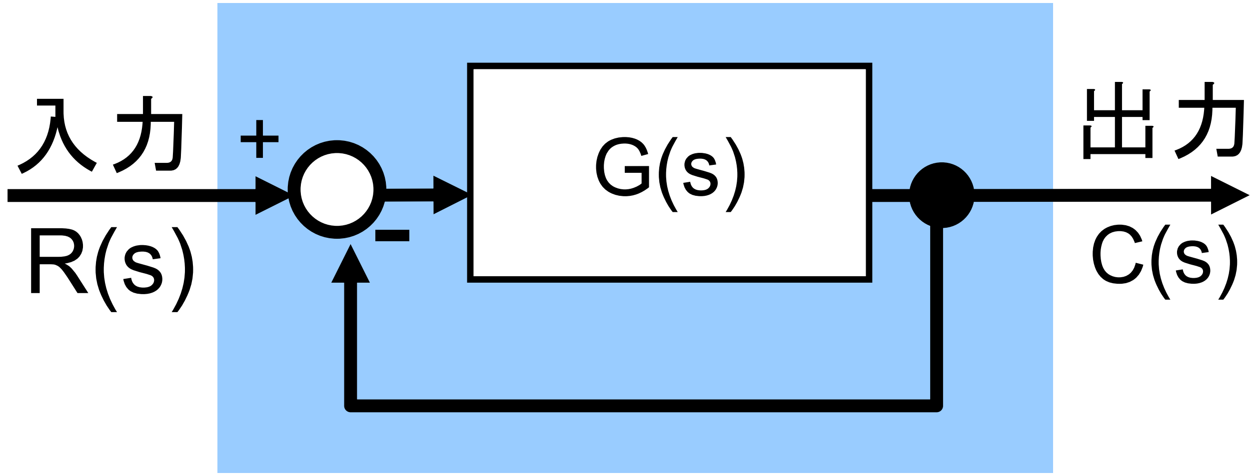
E(s)=R(s)-C(s), すなわち
加え合わせ点の出力がE(s)である.

解答



E(s)=

まとめ 直結型フィードバック系の定常偏差

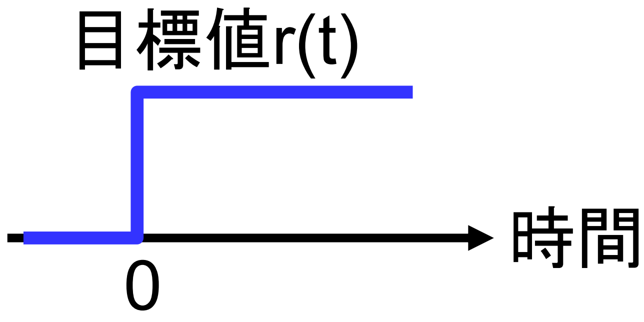


定常偏差 $e = \lim_{s\to 0} sE = \lim_{s\to 0} s(R-C) = \lim_{s\to 0} s\dfrac{R(s)}{1+G(s)}$

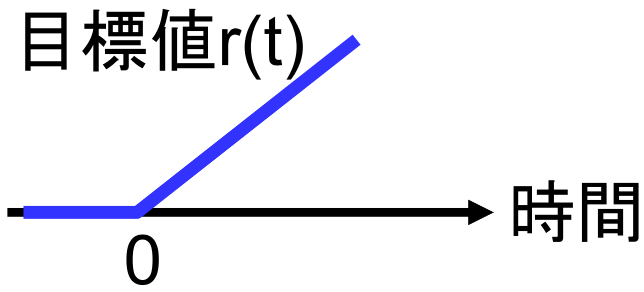
式を覚えたほうが便利かも
(試験中に求めてもいい)

定常偏差の入力R(S)の種類(P157−159)

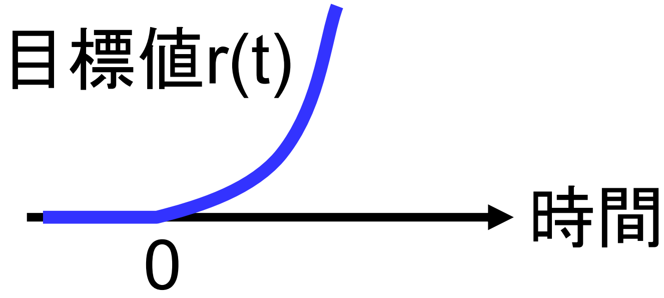
- 定常位置偏差
  - $r(t)=u(t)$ (単位ステップ)
  - $R(s)=1/s$



- 定常速度偏差
  - $r(t)=t$
  - $R(s)=1/s^2$



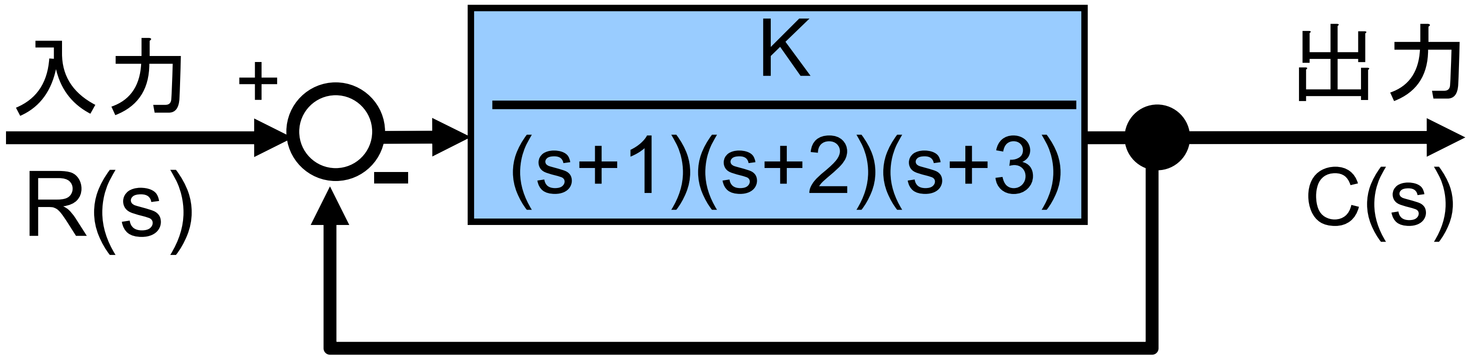
- 定常加速度偏差
  - $r(t)=t^2/2$
  - $R(s)=1/s^3$



制御の目的に応じて使い分ける
（目標値が変化するどうかなど）

例題2(例題7. 3, P160)

下記の制御系が安定で，定常位置偏差が0. 1以下となるようにゲイン定数Kを定めよ



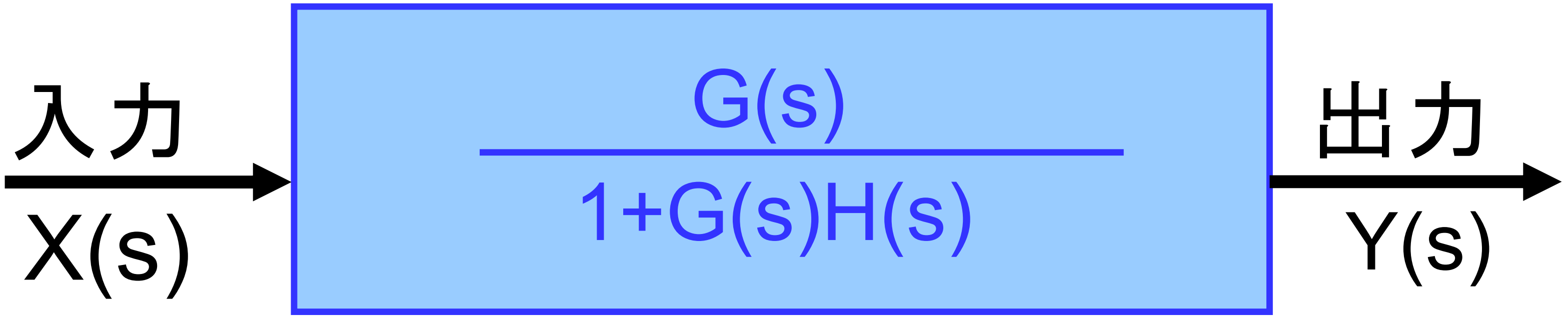
安定性判別にはラウス(またはフルビッツ法)を使う

P.126-127

E(s)の導出には，例題1の結果を使う

復習　フィードバック制御系の 伝達関数(P.72)

前向き要素，フィードバック要素をまとめると，



※重要：1+G(s)H(s)=0 を特性方程式とよぶ

復習

伝達関数の分母

ラウスの安定判別法(P.128)

特性方程式：$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} \cdots a_{n-1} s + a_n = 0$

特性方程式の係数から“ラウス配列”を作成

2x2の行列式を使うのでおさらい：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

復習

ラウスの安定判別法(P.128)

特性方程式：$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} \cdots a_{n-1} s + a_n = 0$

特性方程式の係数から“ラウス配列”を作成

2x2の行列式を使うのでおさらい：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

復習

ラウス配列(教科書よりも分かりやすいはず)

特性方程式n次⇒ラウス配列:n+1行の配列

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_2\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_3\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

ラウス配列の規則性：1，2行目

1行目は1, 3, 5, . . . 番目の係数

2行目は2, 4, 6. . . 番目の係数

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_2 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_3 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

復習　ラウス配列の規則性：3行目以降

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
\boxed{a_1} & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{\boxed{a_1}}\right) & b_2 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{\boxed{a_1}}\right) & b_3 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{\boxed{a_1}}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

3行目の分母は，2行目の1列目

復習

ラウス配列の規則性：3行目以降

$$
\begin{array}{lllll}
\boxed{a_0} & \boxed{a_2} & \boxed{a_4} & \boxed{a_6} & \cdots \\
\boxed{a_1} & \boxed{a_3} & \boxed{a_5} & \boxed{a_7} & \cdots \\
b_1 (= -\begin{vmatrix} \boxed{a_0} & a_2 \\ \boxed{a_1} & a_3 \end{vmatrix}) & b_2 (= -\begin{vmatrix} \boxed{a_0} & a_4 \\ \boxed{a_1} & a_5 \end{vmatrix}) & b_3 (= -\begin{vmatrix} \boxed{a_0} & a_6 \\ \boxed{a_1} & a_7 \end{vmatrix}) & b_4 & \cdots \\
c_1 (= \quad a_1 & \quad a_1 & \quad a_1 & & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

3行目の行列式の1列目は，1，2行目の1列目

3行目の行列式の2列目は，1，2行目の2列目以降を順次適用

解答：　安定である条件を求める

特性方程式は 1+G(s)=0 より

$s^3+6s^2+11s+6+K=0$

$\square$　$\square$

$\square$　$\square$　奇数番目の要素

$\square$　$\square$　偶数番目の要素

$$a_1 = \frac{-\begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix}}{\square} \qquad a_2 = \frac{-\begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix}}{\square} \quad \square$$

$$b_1 = \frac{-\begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix}}{\square}$$

> a_1, b_1を焦って計算しない！！
> 相殺することが多い

ラウス配列の左から一列目を取り出す

1， 6， $a_1=$ $\boxed{}$ ， $b_1=$ $\boxed{}$

安定である(符号変化なし)⇒全ての要素が正

$\boxed{}$

定常位置偏差を求める

例題1の結果より，定常偏差のラプラス変換E(s)は

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)}$$

定常位置偏差では，入力が単位ステップ⇒ 入力R(s)=

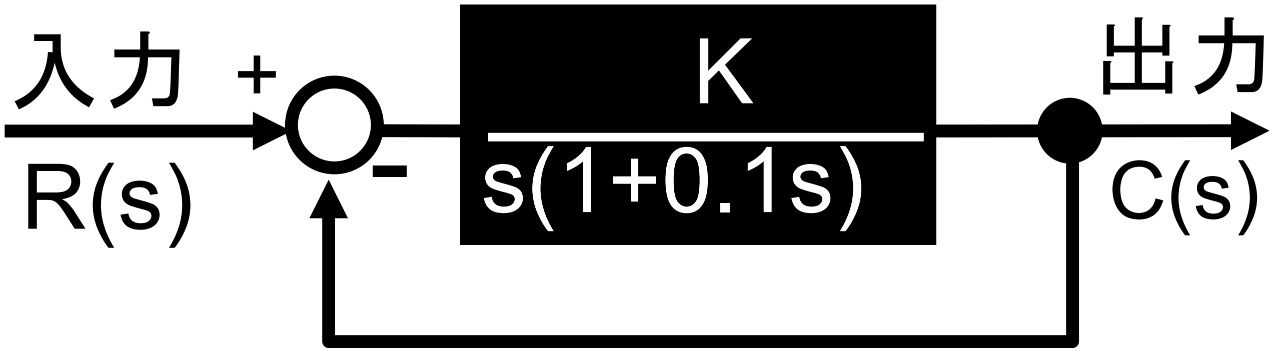
最終値の定理より

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s \qquad =$$

$\leqq 0.1 \Rightarrow$

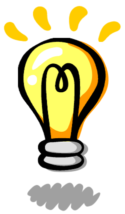
安定性の結果と合わせて

演習問題:7. 2



下記の設計仕様を満足するKを求めよ. ただし, 行き過ぎ量がOs=10%のとき減衰率ξ=0.6とする.

- 行き過ぎ量Os≦10%
- 定常速度偏差εv≦0. 2



•行き過ぎ量を問題とする→2次遅れ系である
•ξは減衰率. 減衰率が大きい→Osは？
•定常速度偏差のとき入力は？

解答: 行き過ぎ量の条件

まず，閉ループ伝達関数を2次遅れ系の標準形に変形

$$= \qquad\qquad = \frac{\varpi_n{}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \varpi_n{}^2}$$

$$\varpi_n = \qquad\qquad \xi =$$

（続き）解答:行き過ぎ量の条件

2次遅れ系の性質: 減衰率ξが大→Osは小

ξ=0.6のときOs=10% ⇒ Os≦10%のためには ξ ≧

不等号を入れる ≦ または >

(続き)解答: 定常速度偏差の条件

定常速度偏差 ⇒ 入力R(s)=

$$E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)} =$$

$$\varepsilon_v = \lim_{s \to 0} sE(s) = \qquad \leq 0.2$$

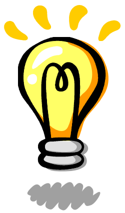
行き過ぎ量の条件
と合わせて

[レポート] 演習問題:7. 3

開ループ伝達関数が

$$G(s)= \frac{K}{s(1+sT)}$$

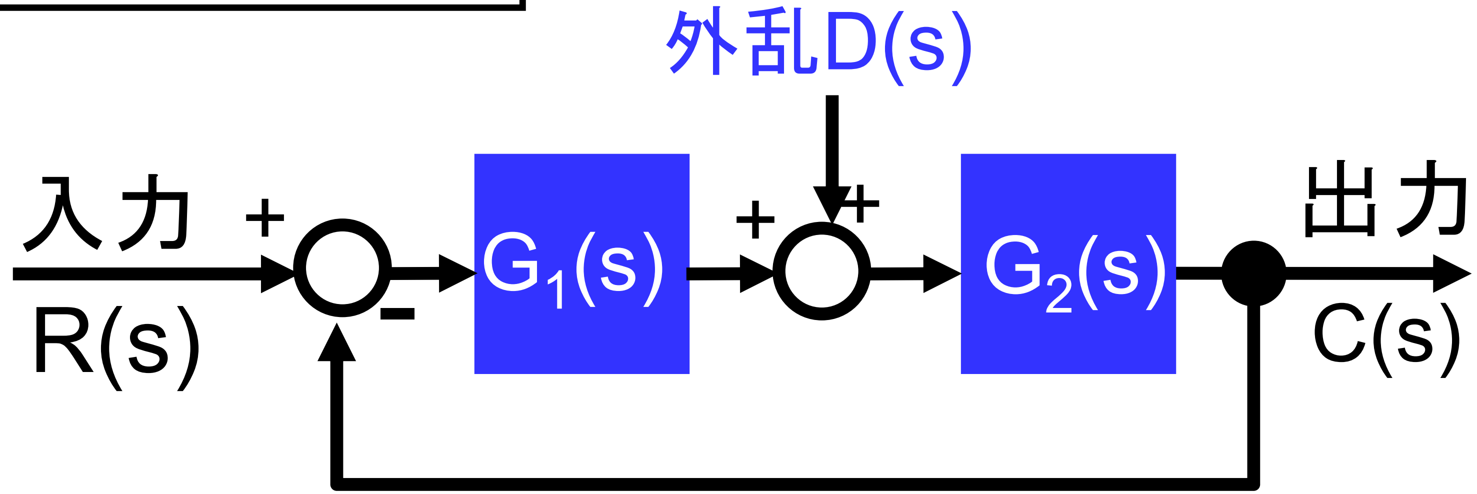
で与えられるシステムを考える．入力r(t)=1+t(t>0)に対する定常偏差を0．1，減衰率をξ=0．5にするK, Tを求めよ.



•“減衰率”が問題となる→2次遅れ系である
•定常偏差→E(s)=R(s)/(1+G(s))を使う.

7.3.2 外乱に対する定常偏差

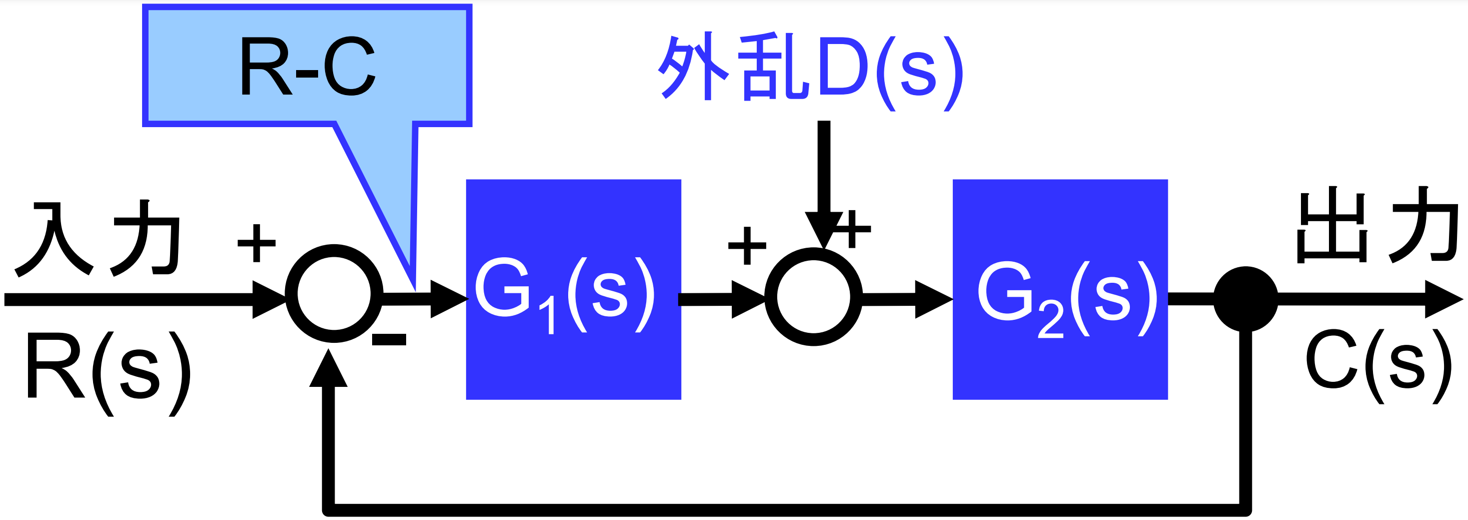
例題7．4の準備



外乱D(s)に対する偏差E(s)は，R(s)=0として求める．
E(s)=R(s)-C(s)=-C(s)を求めよ

C(s)をD(s)，$G_1(s)$，$G_2(s)$で表す

説明



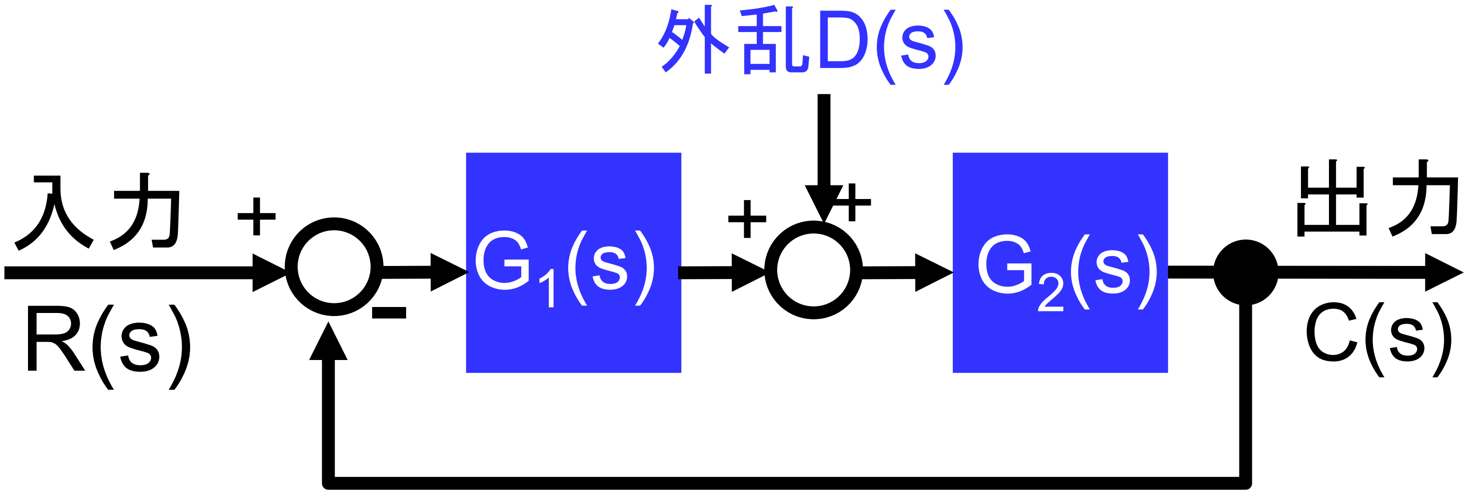
$$C = ((R - C)G_1 + D)G_2 = (-CG_1 + D)G_2$$ (R=0より)

整理して $$C = \frac{DG_2}{1 + G_1G_2}$$

外乱に対する偏差は

$$\boxed{E(s) = R - C = 0 - C = -\frac{DG_2}{1 + G_1G_2}}$$

例題7．4の簡単バージョン



$$G_1(s)=\frac{K}{1+sT_1}\quad,\quad G_2(s)=\frac{1}{s(1+sT_2)}$$

の場合，単位ステップ関数の外乱に対するシステムのノイズに対する定常偏差が0．1以下となるKを求めよ

D(s)は単位ステップのラプラス変換．最終値の定理を使う．

解答

$$E(s)=\frac{-D(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$ において，

$G_1(s)=\boxed{}$ ， $G_2(s)=\boxed{}$ ， $D(s)=\boxed{}$

単位ステップ外乱

最終値の定理より定常偏差は，

$$\lim_{s\to 0} sE(s)=\boxed{}$$

定常偏差の大きさが0.1以下であるので，

$$\boxed{}\leqq K$$