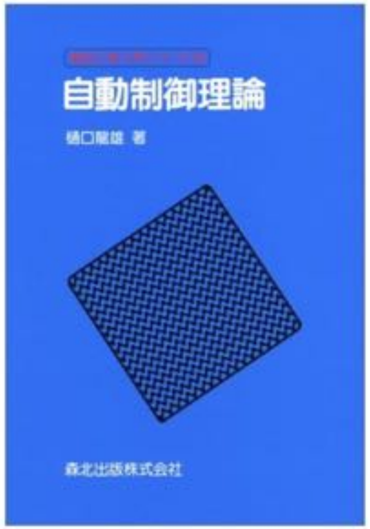
資料13
授業のポイント1

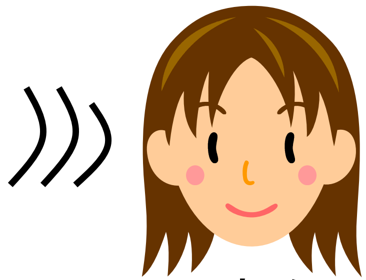


張山の授業のページ: PDF がダウンロードできます
http://www.ecei.tohoku.ac.jp/hariyama

伝達関数: 入力と出力の関係を数学的に記述

よいスイカかどうかを調べるには？

コツンと叩く

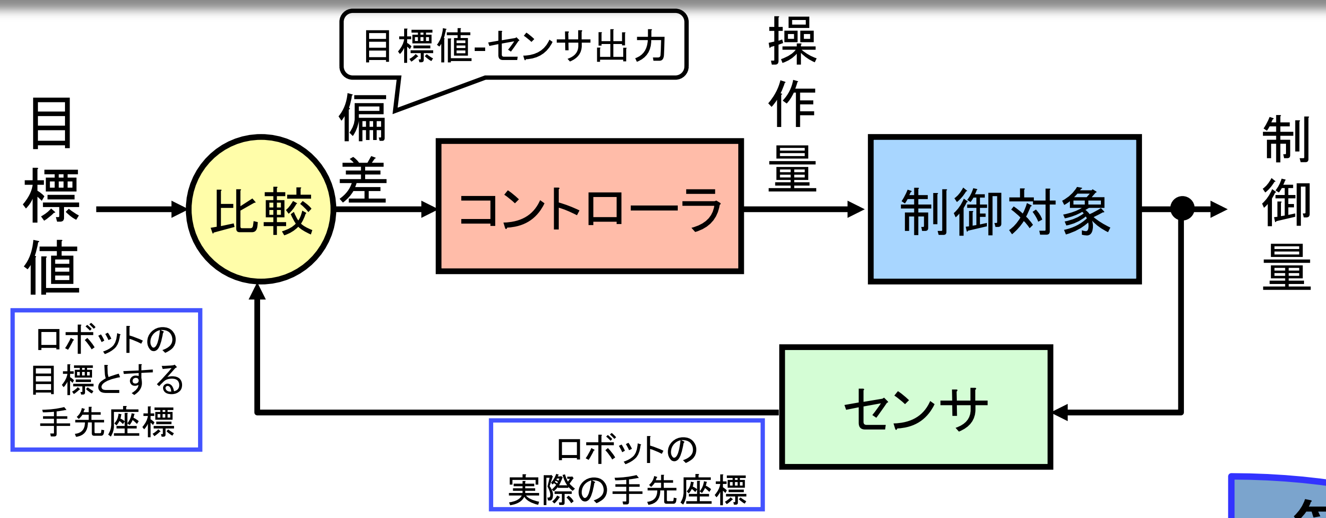


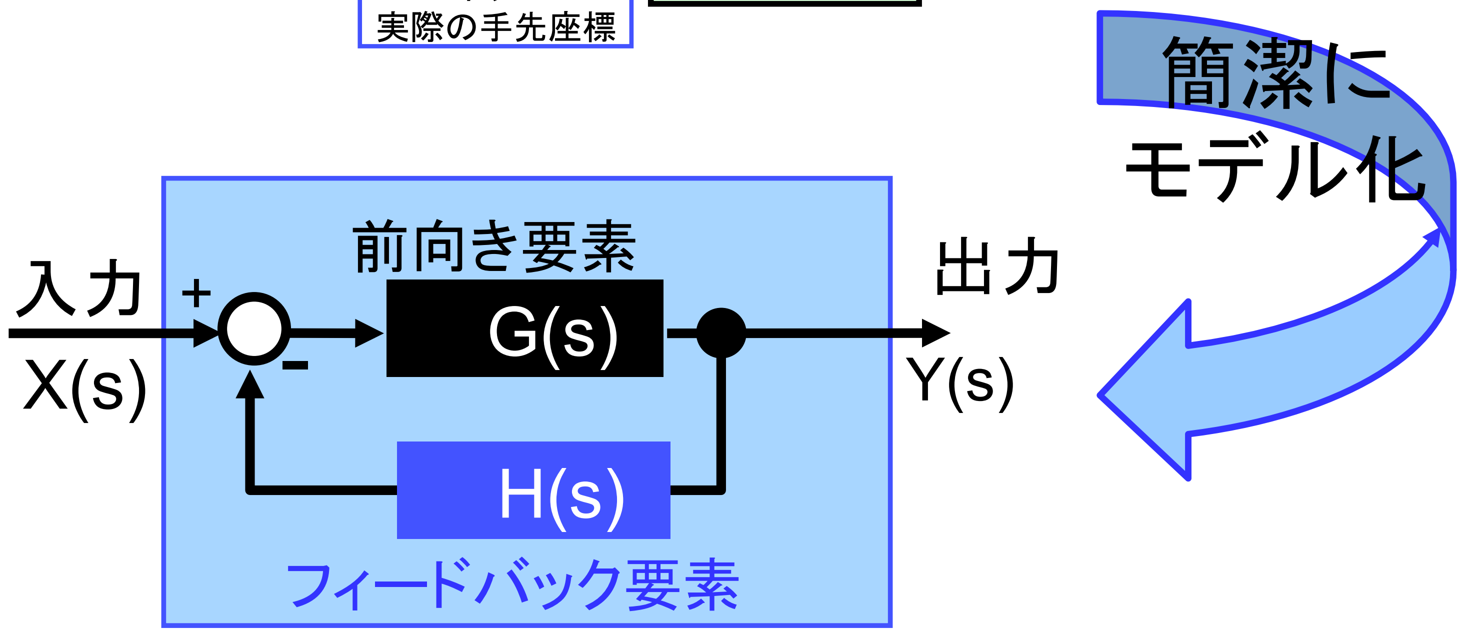
耳で音を聞く

インパルス波形

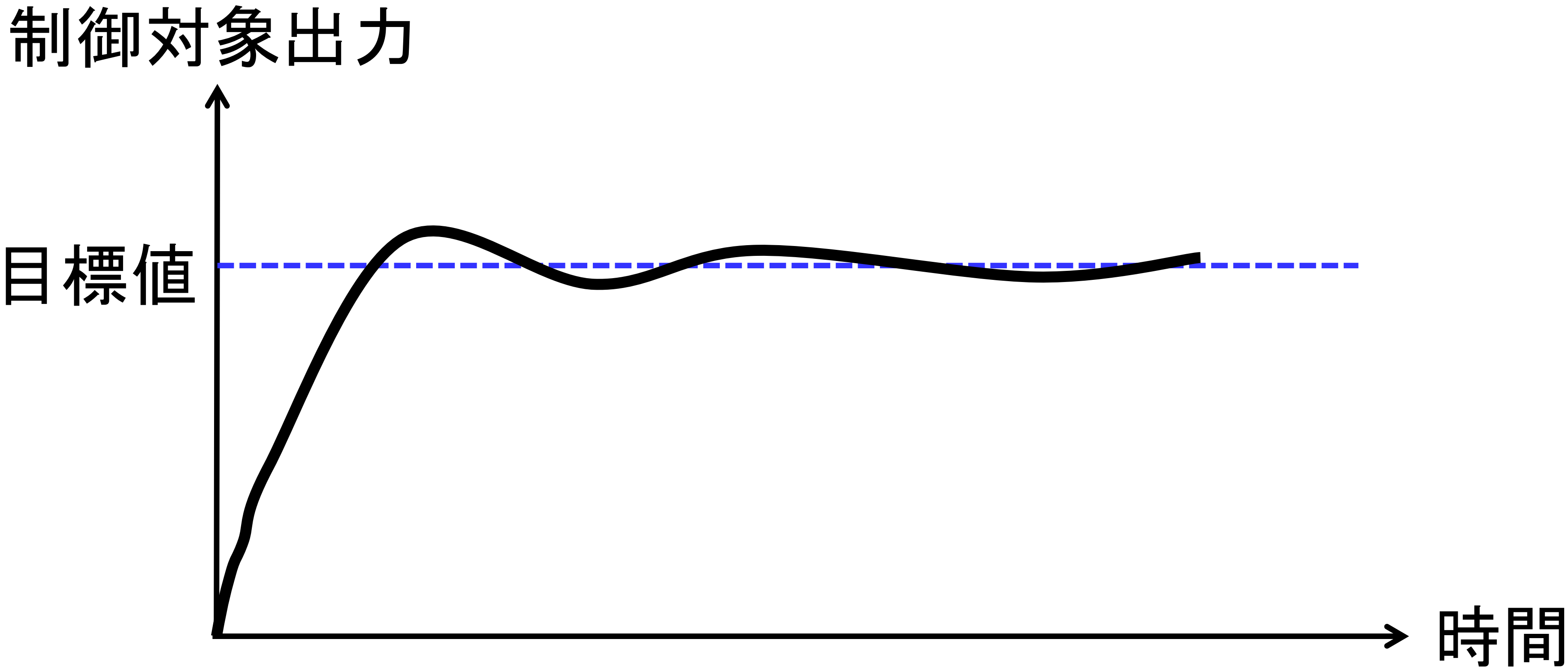
インパルス応答 g(t)
(伝達関数の時間領域表現)

教科書で扱うフィードバック制御モデル



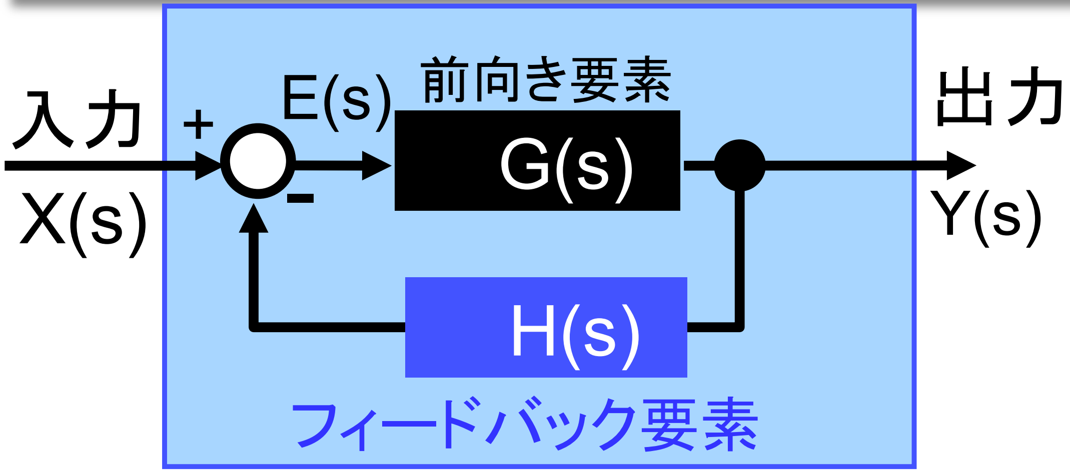


フィードバック制御系の動作イメージ



目標値と制御対象の出力を比較
→ 偏差に基づき，制御対象出力を目標値に近づける制御量を
コントローラが発生
→最終的に目標値に近づく

フィードバック制御系の 伝達関数(P.72)



フィードバック制御系の
・ナイキスト線図(安定性判別)
・ボード線図(安定性判別)
・8章の設計

**1. 閉ループ伝達関数
(入力と出力の関係を表す伝達関数)**

E(s)=X(s)-H(s)Y(s)　Y(s)=G(s)E(s)

$$Y(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}X(s)$$

※重要: 1+G(s)H(s)=0 を特性方程式とよぶ

2. 開ループ伝達関数

G(s)H(s)

閉ループの一部を開いた場合の
ループに沿ったシステムの伝達関数
(システム特性を簡単に調べるために
用いられる. 閉ループ伝達関数は
一般的に複雑になるので)

インパルス応答と伝達関数の関係

システムのインパルス応答:g(t)

時間領域

入力 x(t) → システム g(t) → 出力

畳み込み

$$y(t)=\int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

ラプラス変換

逆ラプラス変換

入力 X(s) → システム G(s) → 出力

Y(s)=G(s)X(s)

s領域

システムの伝達関数:G(s)

伝達関数G(s)の求め方

方法1. 微分方程式が与えられている場合

微分方程式をラプラス変換した後に

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}\quad\begin{matrix}\text{出力のs関数}\\ \text{入力のs関数}\end{matrix}$$

方法2. インパルス応答g(t)が与えられている場合

$$G(s)=L[g(t)]$$

g(t)のラプラス変換

方法3. ブロック線図の簡単化（授業から追加）

変換表の見方(51ページ)

(1), (2), (3), (5), (8)は必須

	時間領域 f(t)	s領域 F(s)
	ラプラス変換 → / ← 逆ラプラス変換	
(1)	δ(t)	1
(2)	1またはu(t) (単位ステップ信号)	$\frac{1}{s}$
(3)	tまたは(tu(t))	$\frac{1}{s^2}$

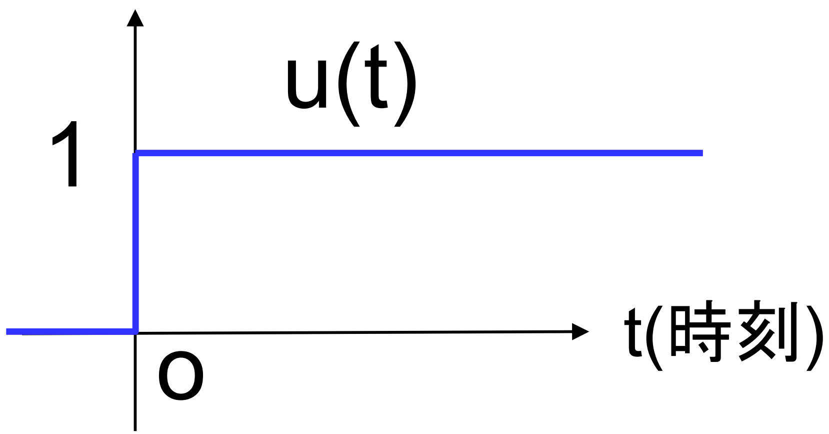
x<0⇒f(t)=0を意味する．ようするに t

追加 (1),(2),(3),(5),(8)

	f(t)	F(s)
(1)	δ(t)	1
(2)	1またはu(t) （単位ステップ信号）	$\frac{1}{s}$
(3)	tまたは(tu(t))	$\frac{1}{s^2}$
(5)	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$
(8)	$\frac{1}{\beta-\alpha}(e^{-\alpha t}-e^{-\beta t})u(t)$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$

ちなみに，単位ステップ波形とは？

$$u(t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0) \\ 0 & (t < 0) \end{cases}$$



ちなみに，ラプラス変換

$$\frac{1}{s}$$

t=0でステップ(階段状に波形が立ち上がっている)

微分と積分のラプラス変換(P.52〜53)

初期値が0の時 → 制御分野のみ

微分

$$L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s)$$

f(t)のn回微分のラプラス変換
⇒ sのn乗にF(s)をかける

積分

$$L\left[\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)(dt)^n\right] = \frac{F(s)}{s^n}$$

n重積分⇒s^nで割る

その他, ラプラス変換の定理等は覚える
“時間の遅れ”, 部分分数展開など

部分分数展開:1位の極

公式の詳細は教科書の57ページを見てください

$$\boxed{F(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}}$$

変換表を用いて逆変換をできない⇒部分分数展開

F(s)の分母が0になるsの値を“極”という

例:s= -1,-2

aがF(s)の極である⇒分母は(s-a)を含む

分母が$(s-a)^n$の項を有する⇒aはn位の極である

変数を用いて部分分数に分ける

$$F(s)=\frac{s}{(s+1)(s+2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$$

Aを求める⇒両辺にs+1 (Aの分母)をかける⇒Aだけ残す

$$\frac{s}{(s+1)(s+2)}(s+1)=\frac{A}{s+1}(s+1)+\frac{B}{s+2}(s+1)$$

$$\frac{s}{(s+2)}=A+\boxed{\frac{B}{s+2}(s+1)}$$ 0になる

s=-1 (Aの分母を0とする極)を代入　⇒ A=-1

Bを求める⇒s+2(Bの分母)をかけて,s=-2とする

(続き)変数を用いて部分分数に分ける

$$F(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} = \frac{-1}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

Bを求めてみよう

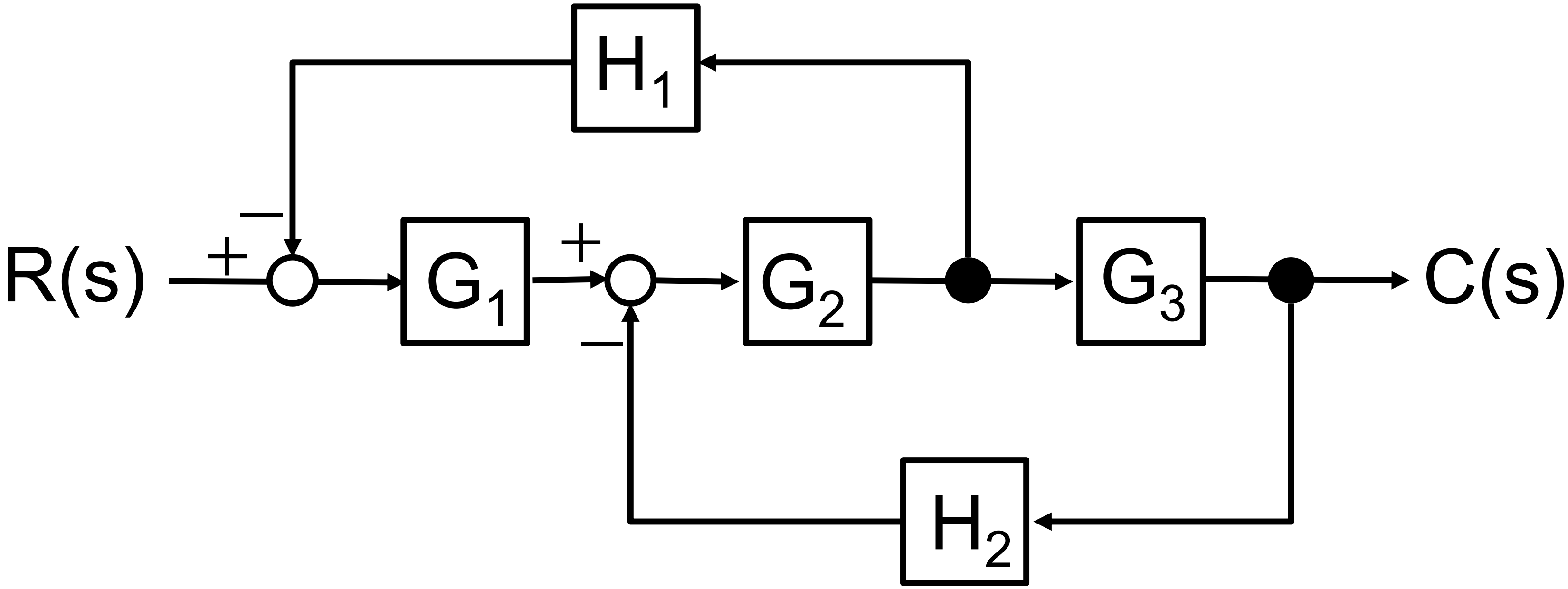
両辺にs+2(Bの分母)をかける

両辺にs=-2(Bの分母を0にするsの値)を代入

B=

ブロック線図の簡単化

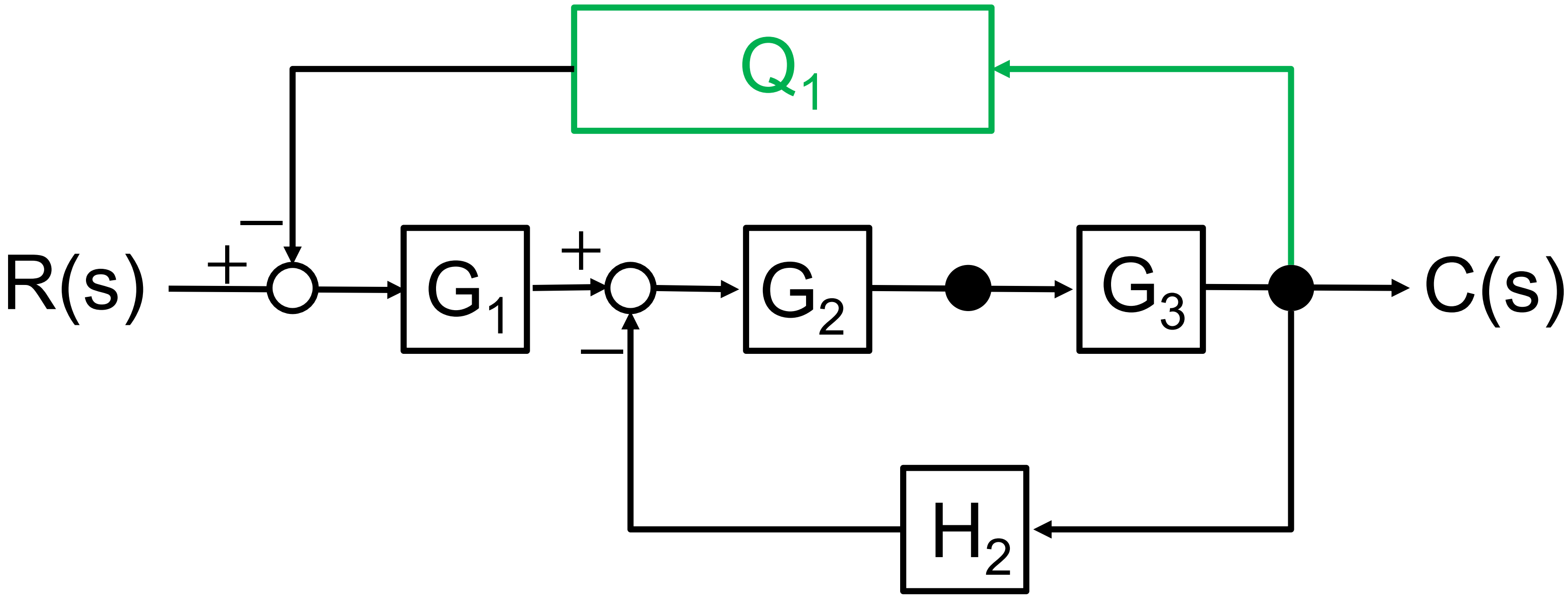
次のブロック線図を簡単ブロック線図を簡単化せよ



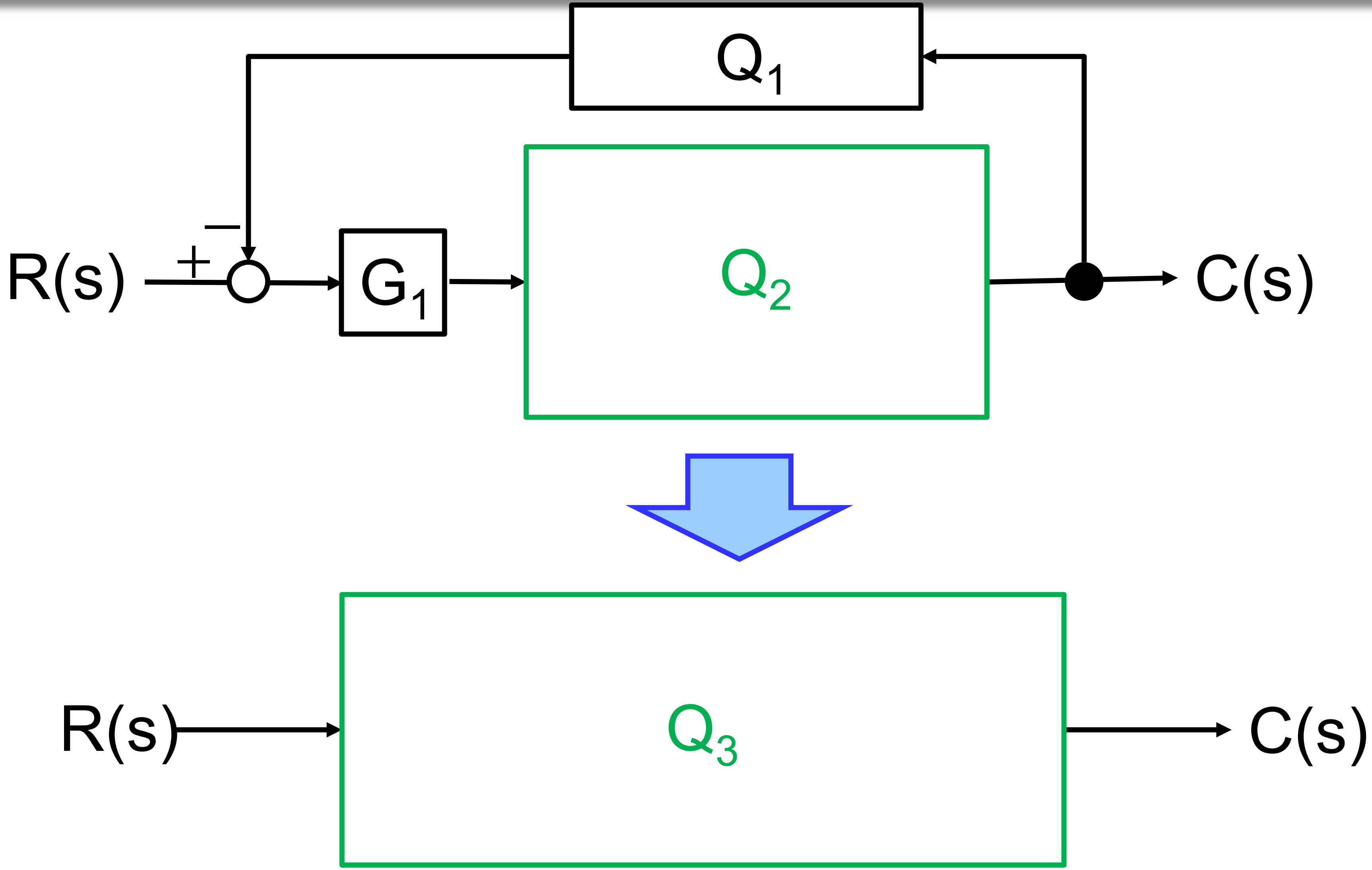
基本的な方針

- 内ループ→外ループ
- フィードバックループの組み合わせに変換

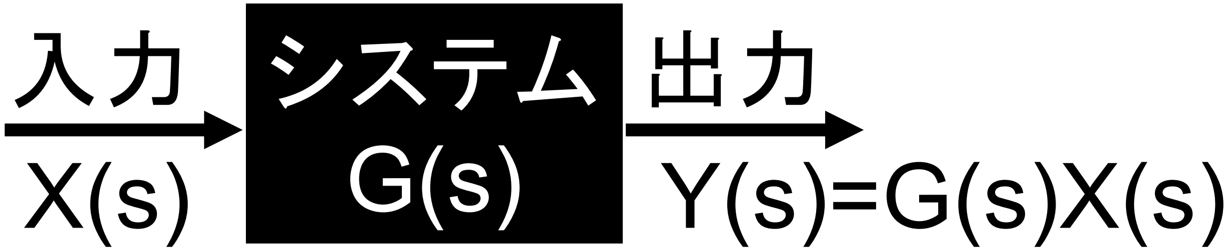
手順1



手順2, 3



周波数伝達関数



s領域

システムの伝達関数：G(s)

s=jω を代入

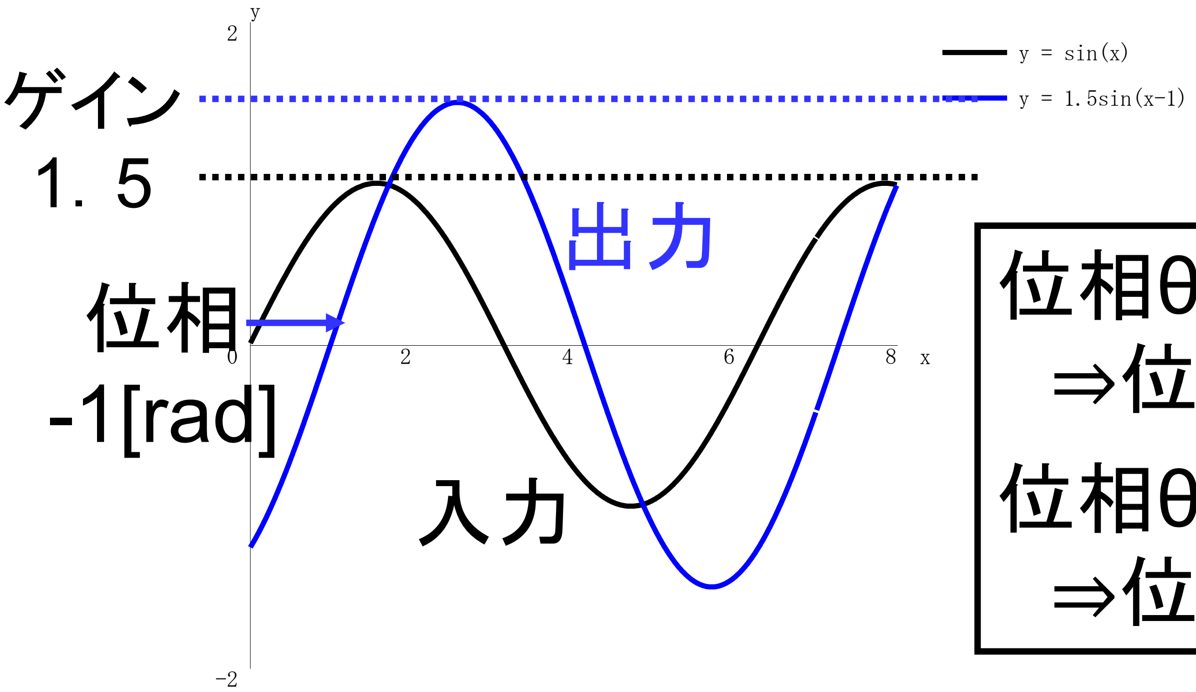
周波数伝達関数 G(jω)

周波数特性とは

入力

x=sin (ωt) ⇨ システム ⇨ y=Asin (ωt+θ)

角速度w[rad/sec]の正弦波信号を入力
⇒出力の振幅比A(ゲイン)は？，位相θは？



位相θ>0
⇒位相が“進んでいる”

位相θ<0
⇒位相が“遅れている”

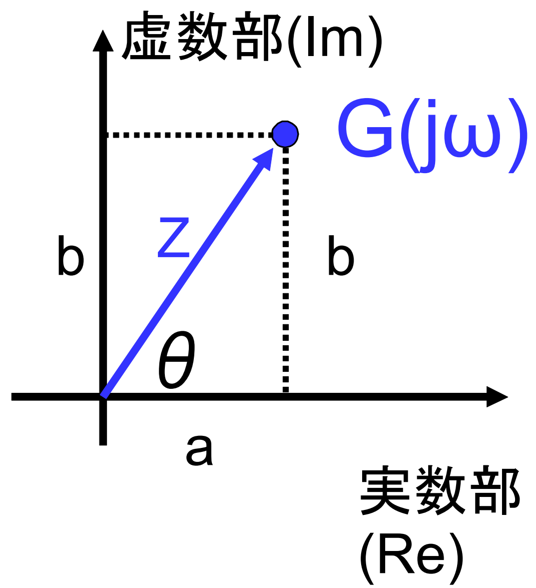
周波数伝達関数G(jω)の意味

入力 → システム G(jw) → 出力

X(jω) → G(jw) → Y(jω)=G(jω)X(jω)

■ゲイン(入出力振幅比)

$$\left|\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}\right| = \left|G(j\omega)\right| = \sqrt{a^2+b^2}$$



■位相

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$ (a,b>0の場合)

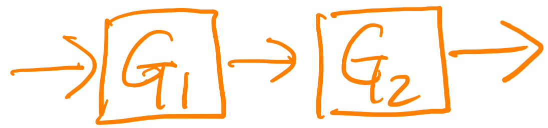
名前

基本伝達関数のまとめ

	微分	積分	1次遅れ	1次進み	2次遅れ	時間遅れ（ムダ時間）
伝達関数	Ks (s)	$\frac{K}{s}$ ($\frac{1}{s}$)	$\frac{1}{(1+sT)}$	$1+sT$	$\frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	e^{-Ls}
ボード線図のゲイン	1/K 20dB/dec	K -20dB/dec	1/T -20dB/dec	1/T 20dB/dec	$\omega_{co}=\omega n$ -40dB/dec	0
ボード線図の位相	$\frac{\pi}{2}$ 0	0 $-\frac{\pi}{2}$	1/T 0 $-\frac{\pi}{2}$	1/T 0	0 $-\pi/2$ $-\pi$	0
ナイキスト線図	Im Re	Im Re	Im Re 1	Im 1	0 Im 1	Im 1
ステップ応答	0 t	0 t	63% 0 T t	0 t	0 t	0 L t

ボード線図のメリット(P.78～79ページ)

G(jw)=G1(jw)G2(jw)



ゲイン特性

20log |G| = 20log |G1| + 20log |G2|

位相特性

θ = θ1 + θ2

高次の周波数伝達関数が，低次の伝達関数の特性の和で表現⇒ボード線図上で足し合わせ

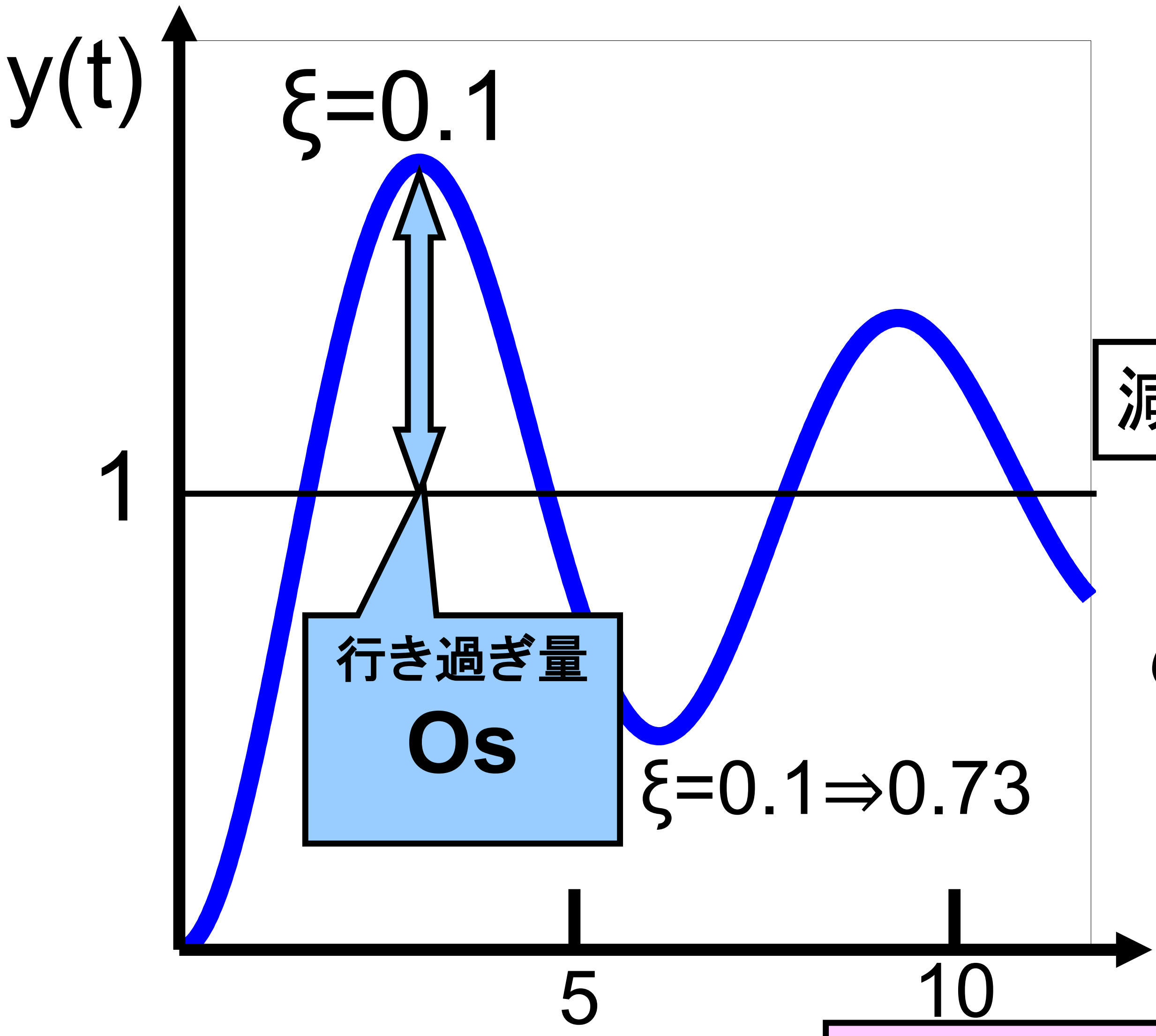
2次遅れ要素

$$Y(s) = \frac{\varpi_n{}^2}{s^2 + 2\xi\varpi_n s + \varpi_n{}^2} X(s)$$

ω_n: 固有周波数

ξ: 減衰率

2次遅れ要素のステップ応答



振動現象

オーバーシュート後

⇒目的値1に収束

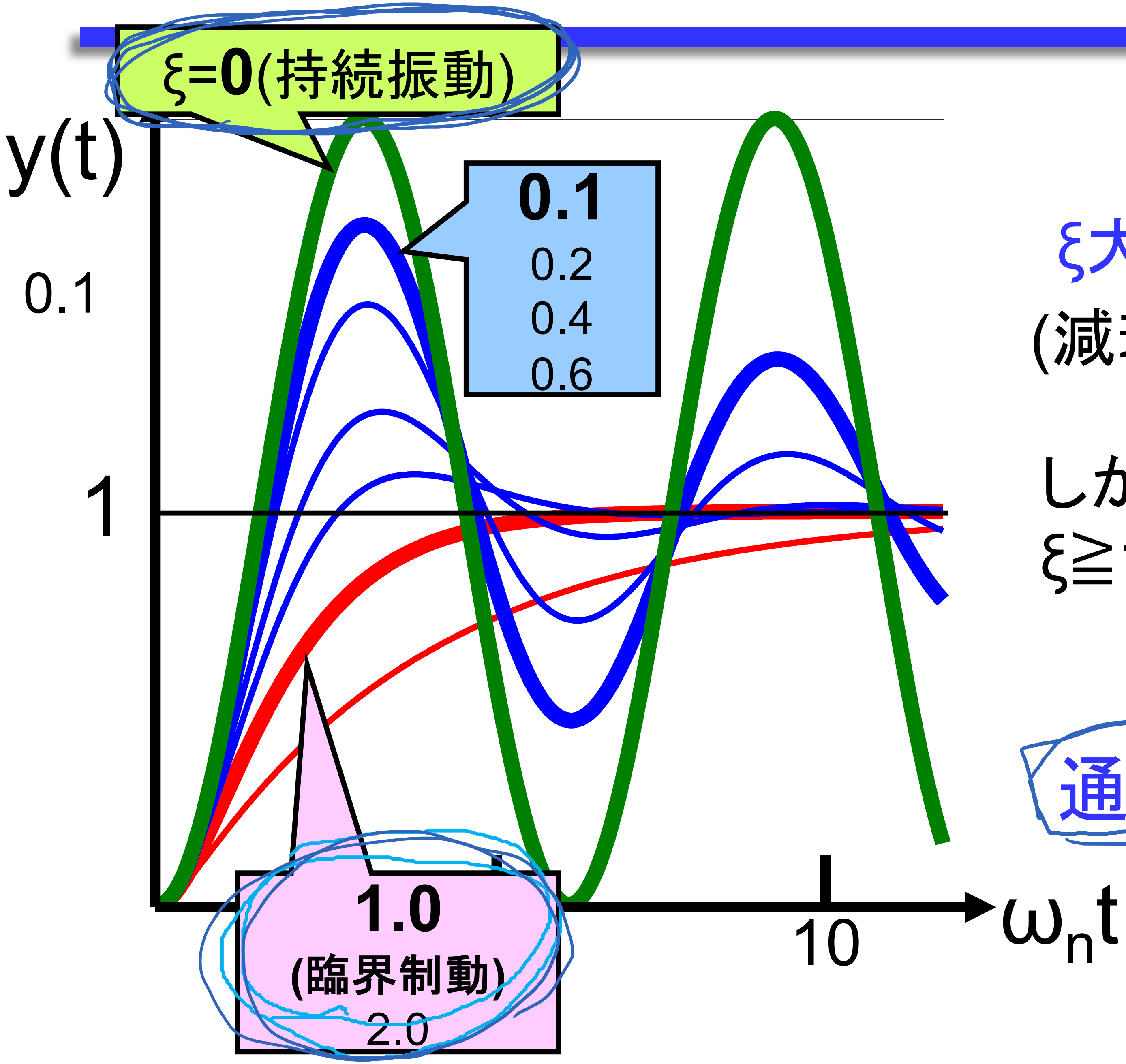
減衰率ξ大⇒振動 小

$$Os = \exp\left(-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \right)$$

ω_nが大きいほど応答が速くなる

2次遅れ要素のステップ応答

物理的
意味重要



減衰率

ξ大⇒振動 小

(減衰の度合い大)

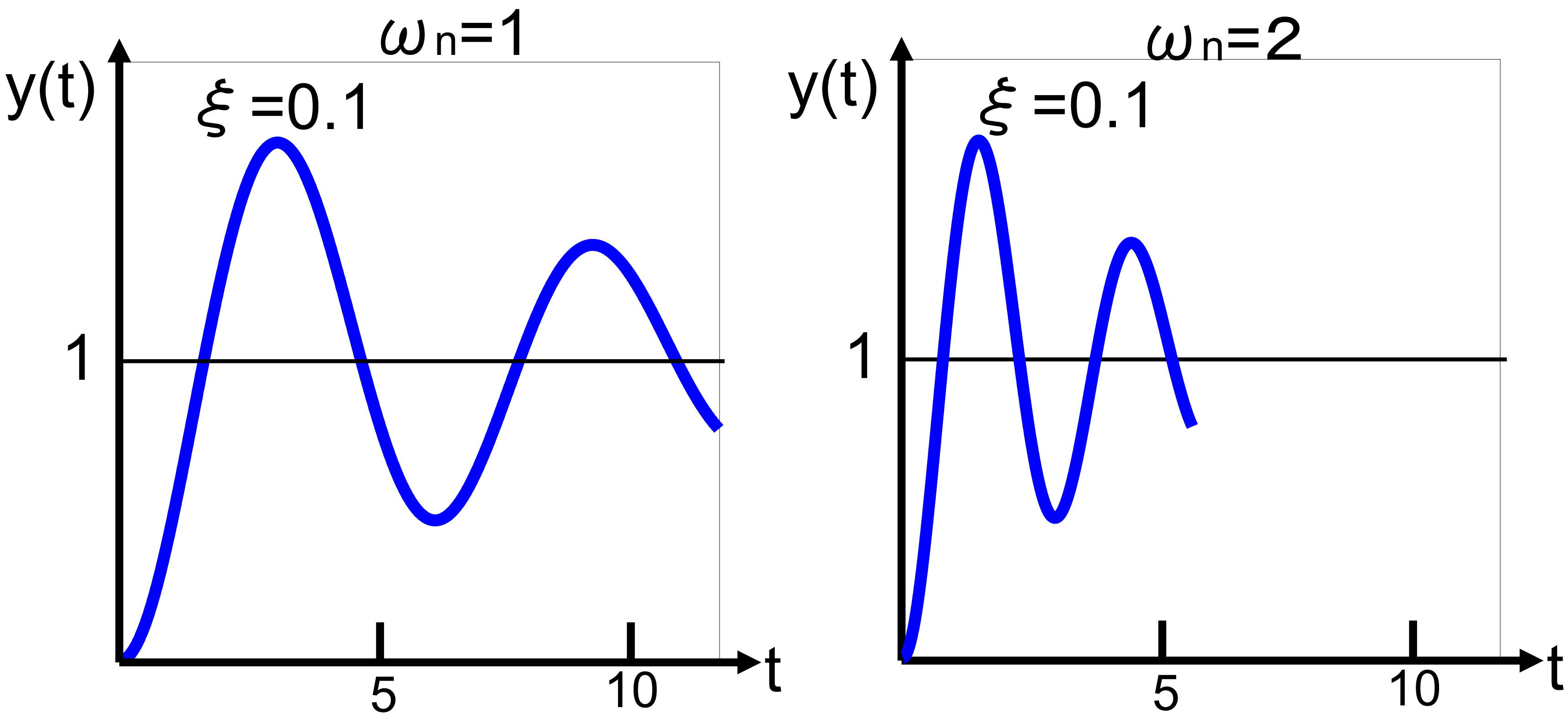
しかし,
ξ≧1は収束が遅い!!

通常:0.6<ξ<1

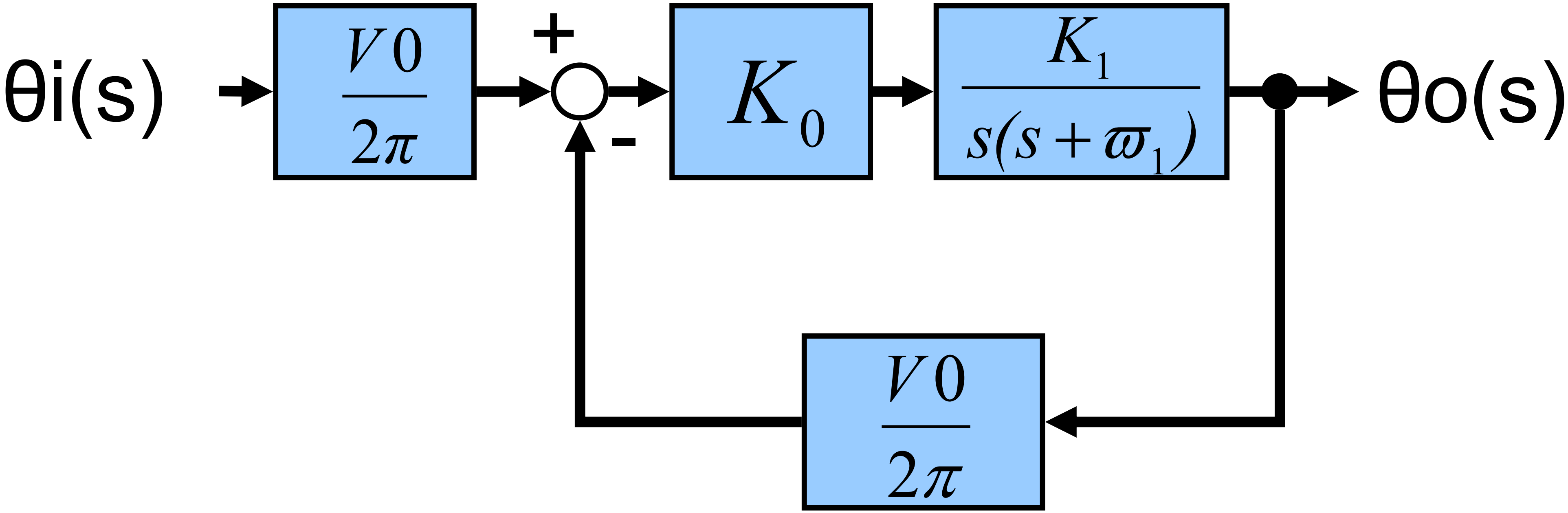
2次遅れ要素のステップ応答

物理的意味重要

ω_nが大きいほど応答が速くなる

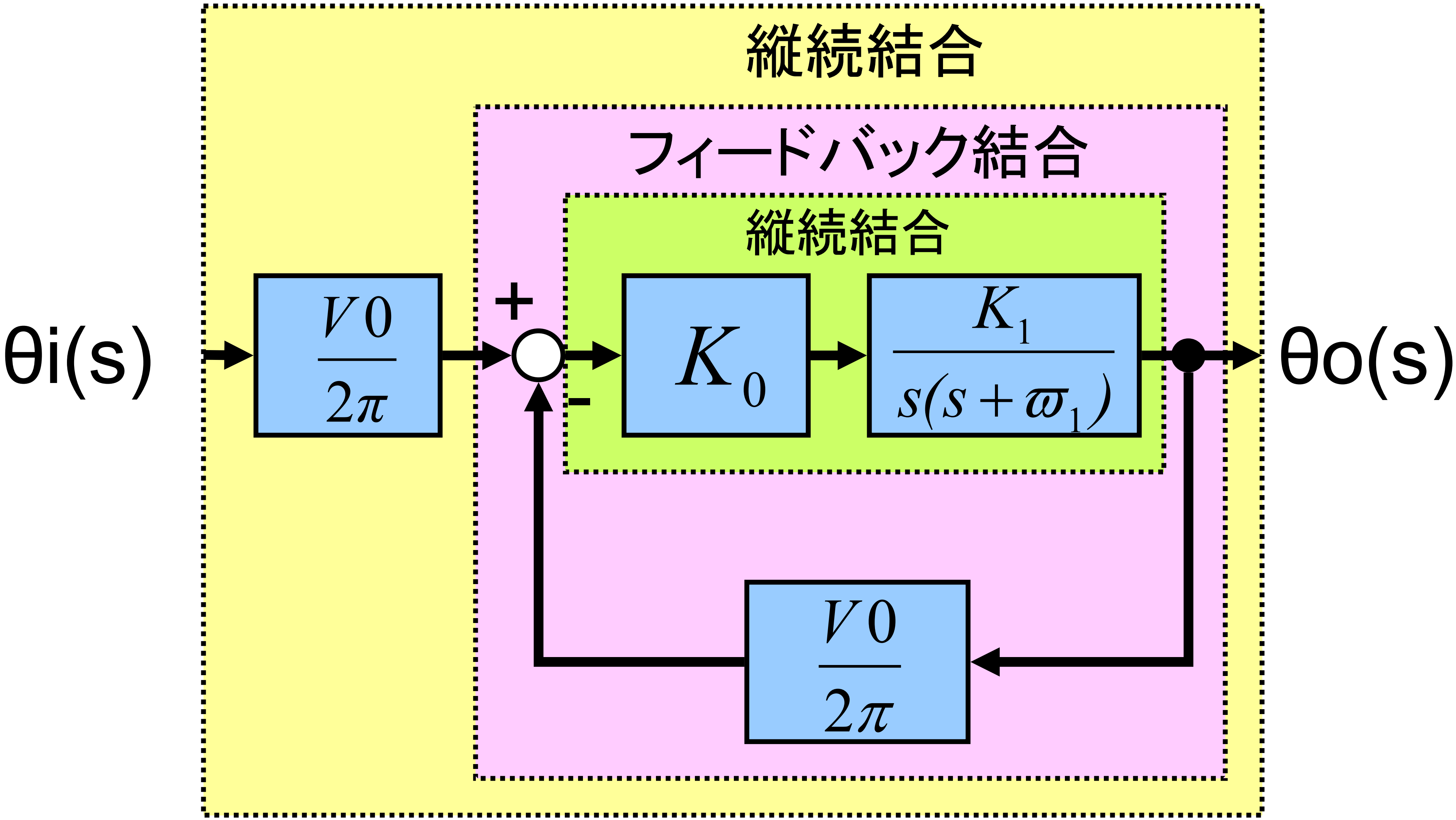


演習:2次遅れ系



1. 入力θiと出力θoの関係を表す伝達関数G(s)を示せ
2. この系の減衰率，固有角周波数ωnを求めよ

解答



縦続結合
フィードバック結合
縦続結合
θi(s)
$\frac{V0}{2\pi}$
+
-
K_0
$\frac{K_1}{s(s+\varpi_1)}$
θo(s)
$\frac{V0}{2\pi}$

解答

$$G(s)=\frac{V0}{2\pi}\left[\frac{\dfrac{K_0K_1}{s(s+\varpi_1)}}{1+\dfrac{K_0K_1}{s(s+\varpi_1)}\bullet\dfrac{V0}{2\pi}}\right]$$

$$=\frac{\dfrac{K_0K_1V0}{2\pi}}{s^2+\varpi_1 s+\dfrac{K_0K_1V0}{2\pi}}$$

解答(c)

2次遅れ要素の一般型と比較して

$$G(s)=\frac{\dfrac{K_0K_1V0}{2\pi}}{s^2+\varpi_1 s+\dfrac{K_0K_1V0}{2\pi}}=\frac{\varpi_n{}^2}{s^2+2\xi\varpi_n s+\varpi_n{}^2}$$

$$\varpi_n=\sqrt{\frac{K_0K_1V0}{2\pi}} \qquad \xi=\frac{\varpi_1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{K_0K_1V0}}$$

ボード線図の外形をかけるようにする

次の伝達関数のボード線図(ゲイン特性)の概形をかけ

$$G(s) = \frac{K}{s}\frac{(1+sT_1)}{(1+sT_2)}$$

ただし，$T_1 \gg T_2 \gg (1/K)$

ヒント: 基本伝達関数に分解＆足し合わせ

解答

基本伝達関数に分解＆足し合わせ

$$G(s)=\frac{K}{s}\frac{(1+sT_1)}{(1+sT_2)}=\boxed{\frac{K}{s}}\boxed{\frac{1}{1+sT_2}}\boxed{(1+sT_1)}$$

$g_1 \quad g_2 \quad g_3$

g1: 積分+比例
g2: 一時遅れ要素
g3: 一次進み要素

g1,g2,g3のゲイン特性の概形の加算→G(s)のゲイン特性の概形
(計算をする必要はない!!)

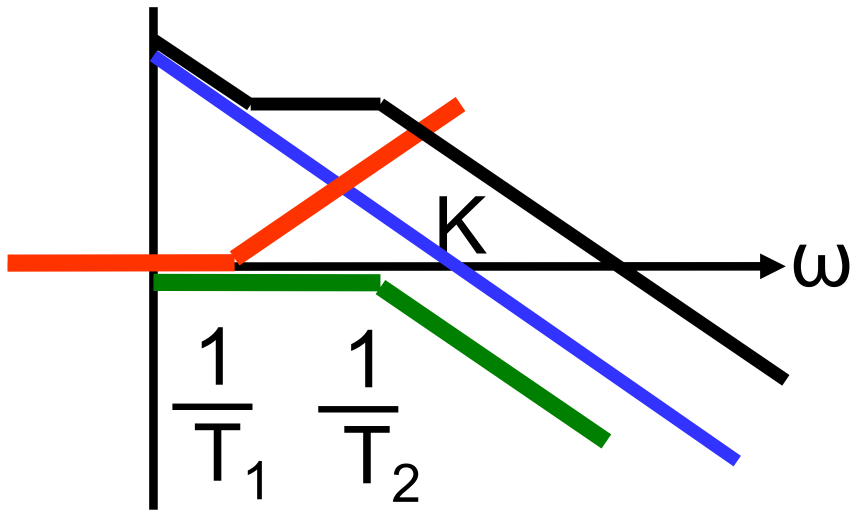
解答

$$g_{dB} = 20\log G(s)$$

$$= 20\log\left(\frac{K}{s}\right) + 20\log\left(\frac{1}{1+sT_2}\right) + 20\log\left(1+sT_1\right)$$

$T_1 >> T_2 >> (1/K)$より，$(1/T_1) < (1/T_2) < K$

解答



$\omega<1/T_1 \Rightarrow g_1$のみ$(g_2,g_3=0)$. 下降

$1/T_1\omega<1/T_2 \Rightarrow g_1$と$g_3$で打ち消しあう$(g_2=0)$. 変化無し

$1/T_2\omega \Rightarrow g_2$により下降

演習:ゲイン特性から伝達関数を推定する

最小位相要素を仮定(次のスライドで説明)

ボード線図のゲイン特性より

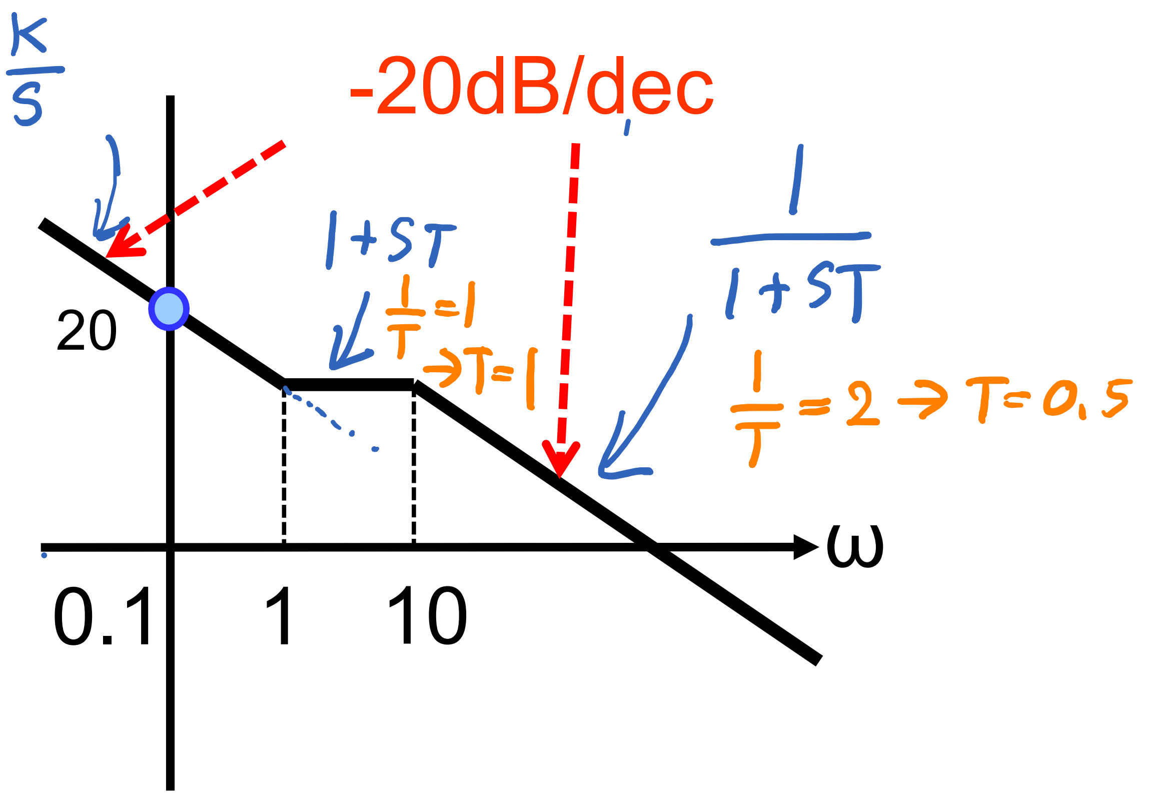
$20\log\left|\frac{K}{j\omega}\right|$

$\omega=0.1$のとき ゲイン 20

$20\log\frac{K}{0.1}=20$

$\frac{K}{0.1}=10^1$

$K=1$



答え $\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{1+0.5s}\cdot(1+s)$

ヒント:左から特定していきましょう

その他の重要事項

- 無駄時間要素（時間遅れ要素）のボード線図，ナイキスト線図
- ブロック線図の簡単化