資料14
授業のポイント2

システムの安定性(6章)

よいシステム = (最低限)安定である

システムが安定である

有界の入力⇒有界の出力

⇓

有界入力-有界出力(BIBO)安定

BIBO安定であるための必要十分条件

インパルス波形

インパルス応答 g(t)
(伝達関数の時間領域表現)

$$\int_0^{\infty} |g(t)|\,dt < \infty$$

インパルス応答が無限時間まで続かない

(無限時間までインパルス応答が続くと,
一般的な入力に対しては，出力が累積されて∞となる)

t→∞のとき，g(t)→0

安定性判別の結論

システムの閉ループ伝達関数

(伝達関数の分母)=0
特性方程式

$$G(s)=\frac{(s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_n)}{(s-b_1)(s-b_2)\cdots(s-b_m)}$$

$$=\frac{B_1}{s-b_1}+\frac{B_2}{s-b_2}+\cdots+\frac{B_n}{s-b_m}$$

すべての (biの実部)<0 ⇒ 安定

すべてのG(s)の極(分母を0とするsの値)
→ 複素平面上で右側になければ安定

部分分数展開が面倒 ⇒ お手軽な方法が必要

安定性判別(6章)

伝達関数の分母

- 特性方程式が多項式の場合
  - ➢ラウスまたはフルビッツの方法
    (※どちらかはできるようにする!!)

開ループ伝達関数

- それ以外の場合(指数関数がある場合など),
  また安定度もみたい場合
  - ➢ナイキスト法や，ボード線図を用いた方法
    (※どちらもできるようにする!!)

開ループ伝達関数

ラウスの安定判別法(P.128)

伝達関数の分母

特性方程式：$a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} \cdots a_{n-1} s + a_n = 0$

特性方程式の係数から“ラウス配列”を作成

2x2の行列式を使うのでおさらい：

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

ラウス配列(教科書よりも分かりやすいはず)

特性方程式n次⇒ラウス配列:n+1行の配列

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_2\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_3\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3\left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

ラウス配列の規則性：1，2行目

1行目は1, 3, 5, . . . 番目の係数

2行目は2, 4, 6. . . 番目の係数

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_2 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_3 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

ラウス配列の規則性：3行目以降

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
\boxed{a_1} & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{\boxed{a_1}}\right) & b_2\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{\boxed{a_1}}\right) & b_3\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{\boxed{a_1}}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

3行目の分母は，2行目の1列目

ラウス配列の規則性：3行目以降

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{\quad}\right) & b_2\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{\quad}\right) & b_3\left(=\dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{\quad}\right) & b & \cdots \\
c_1\left(=\dfrac{\quad}{a_1}\right) & \dfrac{\quad}{a_1} & \dfrac{\quad}{a_1} & & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

3行目の行列式の1列目は，1，2行目の1列目

3行目の行列式の2列目は，1，2行目の2列目

以降を順次適用

ラウス配列の規則性:3行目以降

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
b_1 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_2 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_3 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_0 & a_6 \\ a_1 & a_7 \end{vmatrix}}{a_1}\right) & b_4 & \cdots \\
c_1 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_2 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & c_3 \left(= \dfrac{-\begin{vmatrix} a_1 & a_7 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{b_1}\right) & \cdots & \cdots \\
d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \cdots \\
 & & & & \ddots
\end{array}
$$

行列式の前のマイナスを忘れないように！！

演習

次のフィードバック制御系の安定判別を行え

$$G(s) = \frac{1}{2s^4 + s^3 + 3s^2 + 5s + 9}$$

ヒント:ラウス配列において要素がない部分は0とする

解答

フィードバック要素H(s)=1より，特性方程式は，

$$1+GH=0 \rightarrow 1+G=0$$

$$1+\frac{1}{2s^4+s^3+3s^2+5s+9}=0$$

忘れない…

$$2s^4+s^3+3s^2+5s+9+1=0$$

$$2s^4+s^3+3s^2+5s+10=0$$

2	1	3	5	10
a_0	a_1	a_2	a_3	a_4

解答

特性方程式が4次なので，5行のラウス配列は

$$
\begin{array}{ccc}
2 & 3 & 10 \\
1 & 5 & 0
\end{array}
$$

$$
\frac{-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}}{1} = -7 \qquad
\frac{-\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 10 \qquad
\frac{-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0
$$

$$
\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -7 & 10 \end{vmatrix}}{-7} = 6.43 \qquad
\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}}{-7} = 0 \qquad
\frac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -7 & 0 \end{vmatrix}}{-7} = 0
$$

$$
\frac{-\begin{vmatrix} -7 & 10 \\ 6.43 & 0 \end{vmatrix}}{6.43} = 10
$$

1列目の符号変化すなわち、
不安定な極の数は，　個.
よって，[安定/不安定]

ポイント(続き)

- ナイキスト線図を描ける＆安定判別ができる
  - ゲイン交差周波数
- ボード線図を描ける＆安定判別ができる
  - ゲイン交差周波数
    (ゲイン特性=0となる角周波数)
  - 位相余裕PM
    ゲイン交差周波数での位相特性と-180度の差
    ゲイン交差周波数で, PM>0(位相が-180より大)⇒安定

ラウス配列を用いた安定判別の結論

- ラウス配列の1列目の要素

  $a_0, a_1, b_1, c_1, d_1 \cdots$

  の符号変化の回数

  ⇒ 実部が正の特性根

  (特性方程式=0となるs)の数

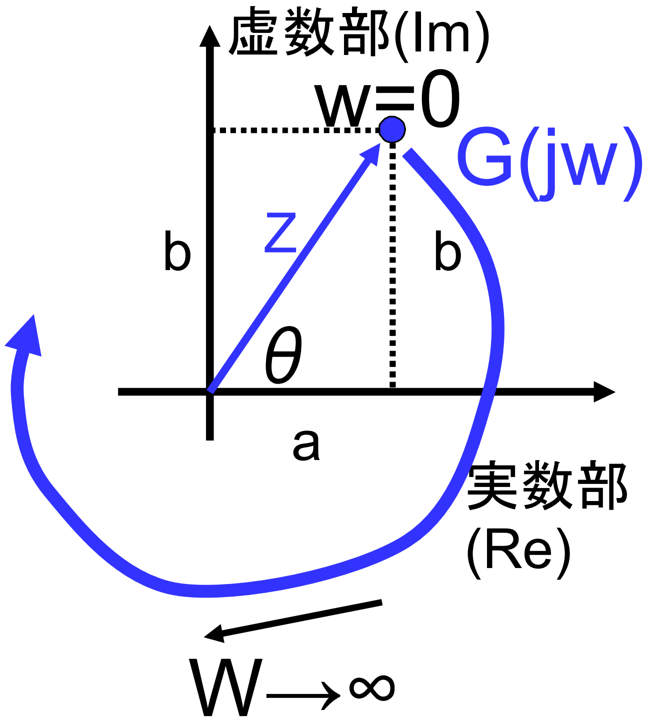
不安定な極の数

- 安定であるためには，特性根(特性方程式=0となるs)の実部は負

  ⇒ラウス配列の1列目の要素の符号変化なしならば，安定

ナイキスト線図を用いた安定性判別

- ω:0→∞と変化したときに，複素数平面上でG(jω)の軌跡を描いたグラフ



安定性の判別が直感的にしやすい

例題1 (P.133) まずは描き方

「開ループ伝達関数」が次式で与えられとする. ω=0～∞で制御系のナイキスト線図の概形を描き, 安定性を調べよ

$$G(s)H(s) = \frac{10}{s(s+1)(s+5)}$$

ヒント: ナイキスト線図を書くときは, s=jωと置く

教科書では, 極座標(ゲイン|G(jω)|と位相θ)を用いた描き方を説明してます.
私の授業では, 直交座標を用いた描き方を説明

周波数伝達関数をもとめよう

$$G_0(jw) = G(jw)H(jw) = \frac{10}{jw(jw+1)(jw+5)} = \frac{10}{jw[(5-w^2)+j6w]}$$

実部Rと虚部Iを求められるように変形する.

$$G_0(jw) = \frac{-10j}{w}\frac{1}{(5-w^2)+j6w}\frac{(5-w^2)-j6w}{(5-w^2)-j6w}$$

$$= -\frac{10}{w}\frac{6w+j(5-w^2)}{(5-w^2)^2+36w^2}$$

実部 $R = \dfrac{-60}{(5-w^2)^2+36w^2}$ 　虚部 $I = \dfrac{-10}{w}\dfrac{(5-w^2)}{(5-w^2)^2+36w^2}$

ω=0, ω_π, ∞のときの座標を計算

実部 $R=\dfrac{-60}{(5-w^2)^2+36w^2}$　虚部 $I=\dfrac{-10}{w}\dfrac{(5-w^2)}{(5-w^2)^2+36w^2}$

w=0：　$R=\dfrac{-60}{(5)^2}=-2.4$　　$I=-\infty$

w=∞：　$R=0$　　$I=\dfrac{\infty^2}{\infty^5}=0$ (分母にw⁵が出てくる)

w=w_π：　$I=0$ より $w_\pi=\sqrt{5}$

ナイキスト線図
が実軸と交わるω

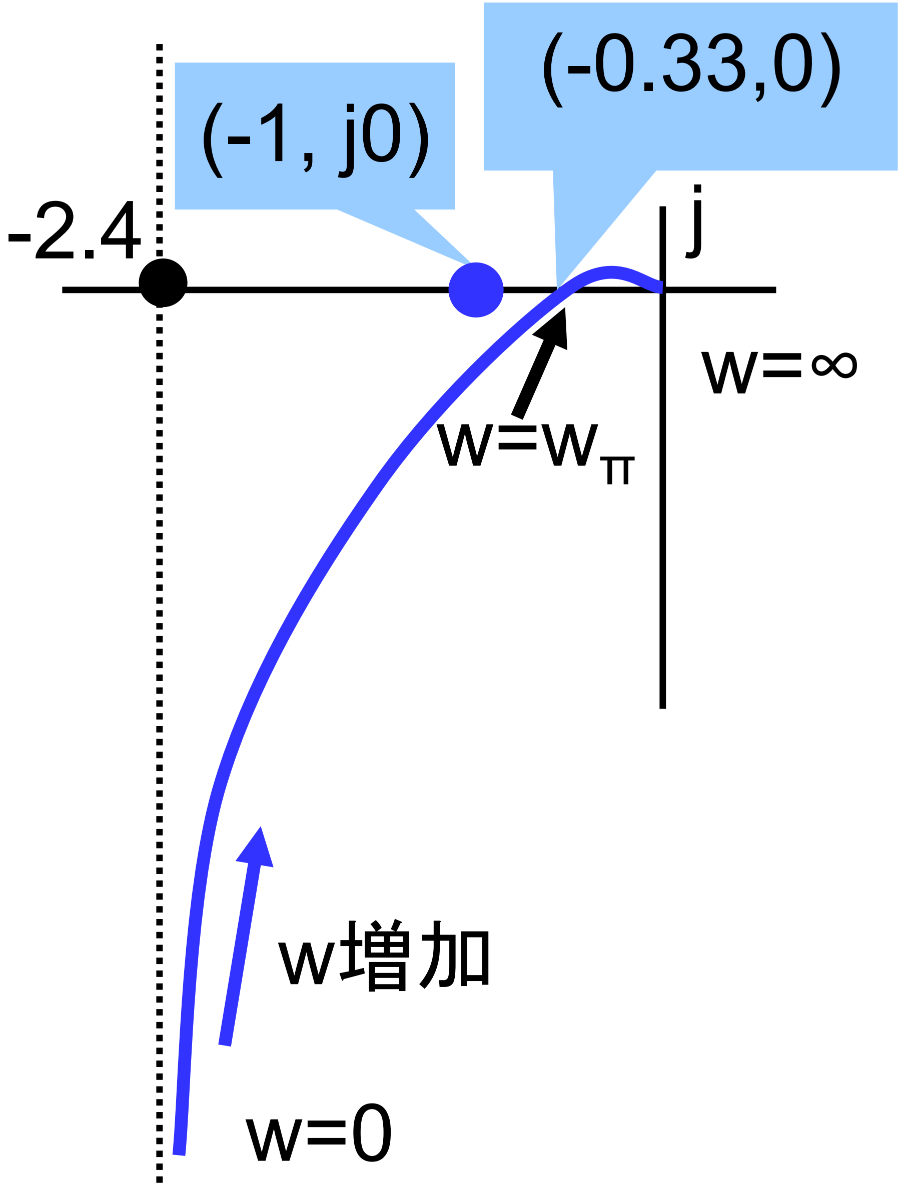
このとき，R=G(jw_π)= $\dfrac{-60}{36\cdot 5}$ =-0.33

ナイキスト線図の概形を書いてみよう

w=0： $R=-2.4 \quad I=-\infty$

w=∞： $R=0 \quad I=0$

w=w$_\pi$= $\sqrt{5}$ ： $R=-0.33 \quad I=0$



ナイキストの安定条件(簡易版)

適用条件:

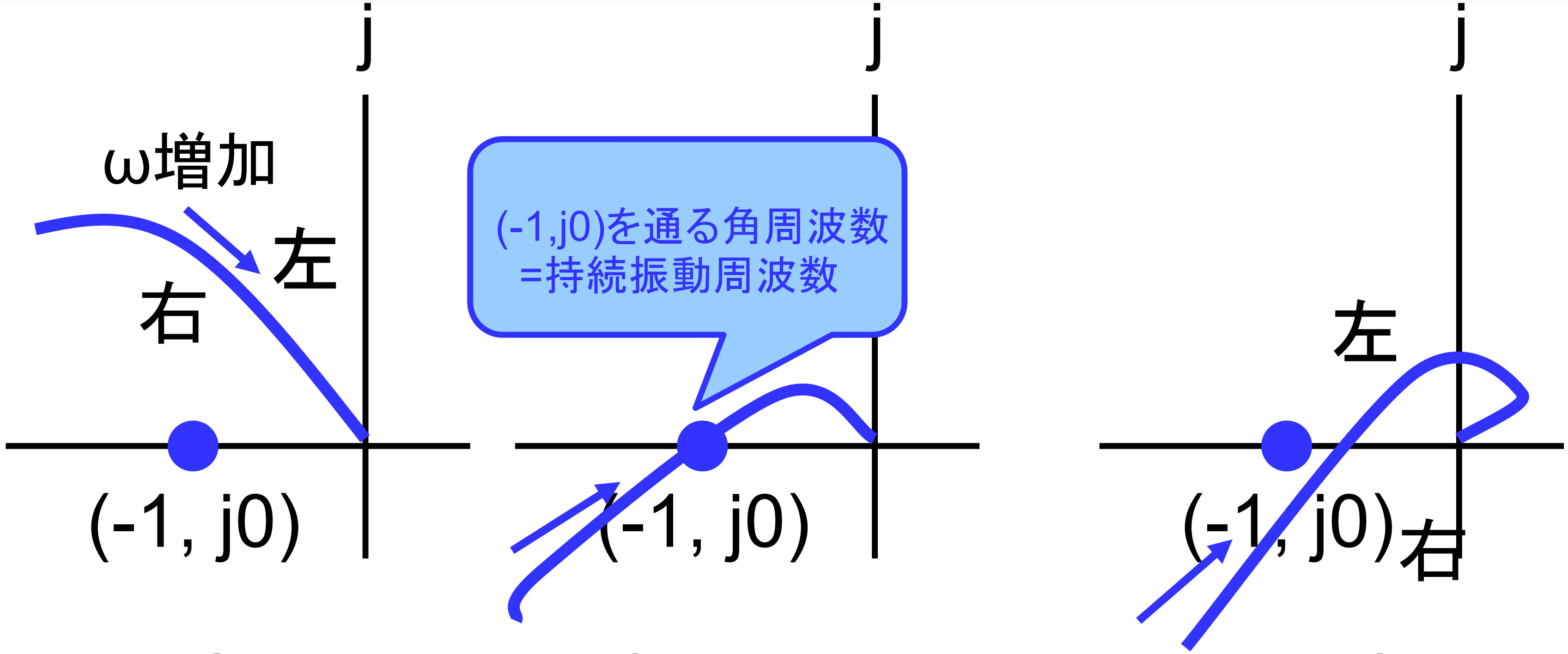
開ループ伝達関数G(s)H(s)の極がs平面の右半面にない場合

1. 複素平面において，ωが0～+∞に対する開ループ伝達関数G(jω)H(jω)のナイキスト線図を書く

2. ωが0～+∞のときに，(−1, j0)点を左に見れば安定，右側にみれば不安定

(補足) 開ループ伝達関数の極がs平面の右半面にある場合
つまり，極の実部が正である極が存在する場合→拡張ナイキスト

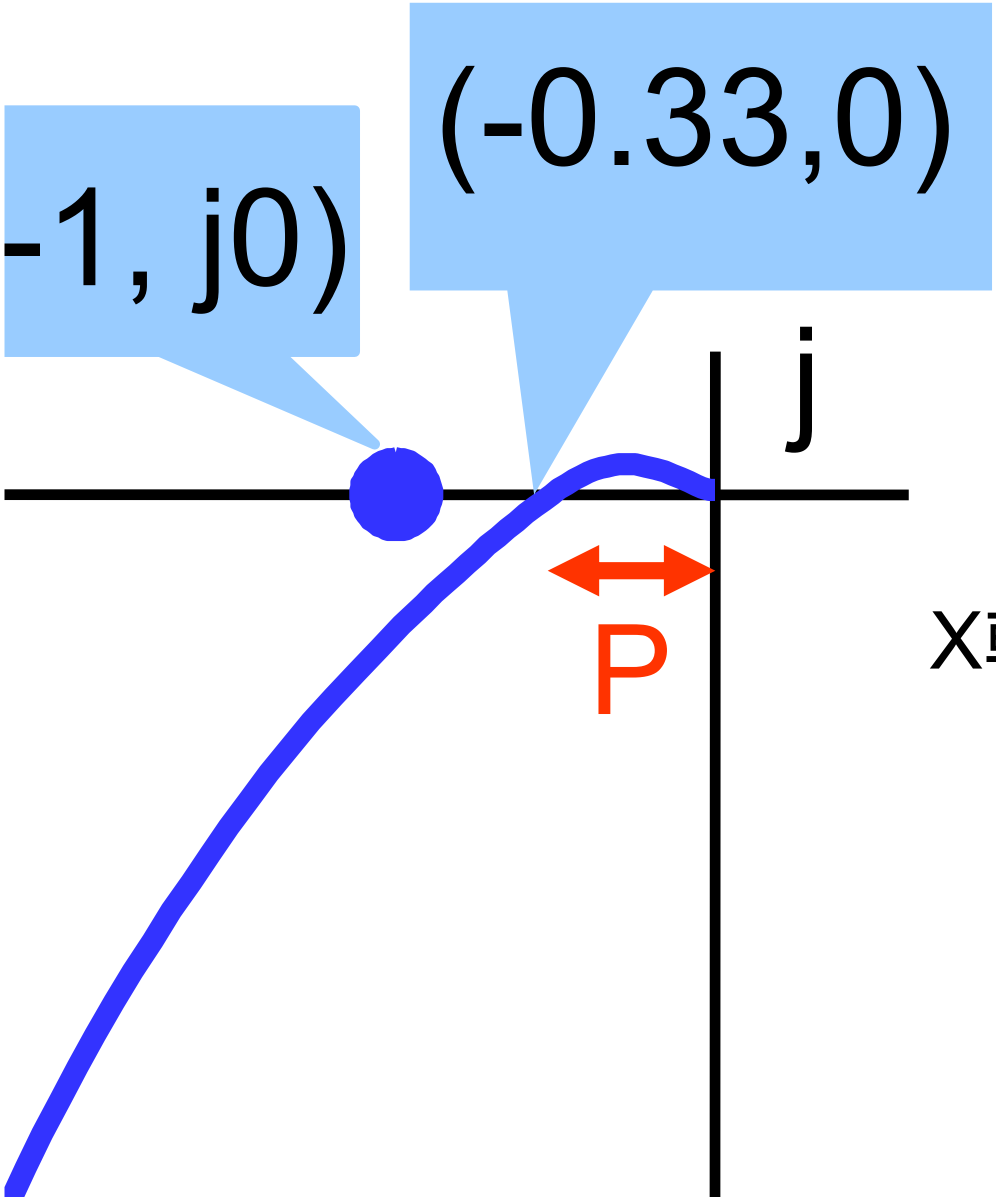
安定判別法適用例



(a)不安定　(b)安定限界　(c)安定

先ほどのナイキスト線図の例題はどのパターン? ⇒ C(安定)

ゲインに関する安定度(Gain Margin)を調べてみよう



X軸と交差するときに(-1, j0)をからより**原点に近い側**を通過すればより安定度は高い

X軸と交差するときのG(s)H(s)の大きさ(ゲイン)Pが1より小さいほど安定

ゲイン余裕(Gain Margin)の定義

ゲインはダイナミックレンジが広いのでlogをとる

$$GM = 20\log \boxed{\frac{1}{P}} = -20\log P = -20\log[|G(jw_\pi)H(jw_\pi)|]$$

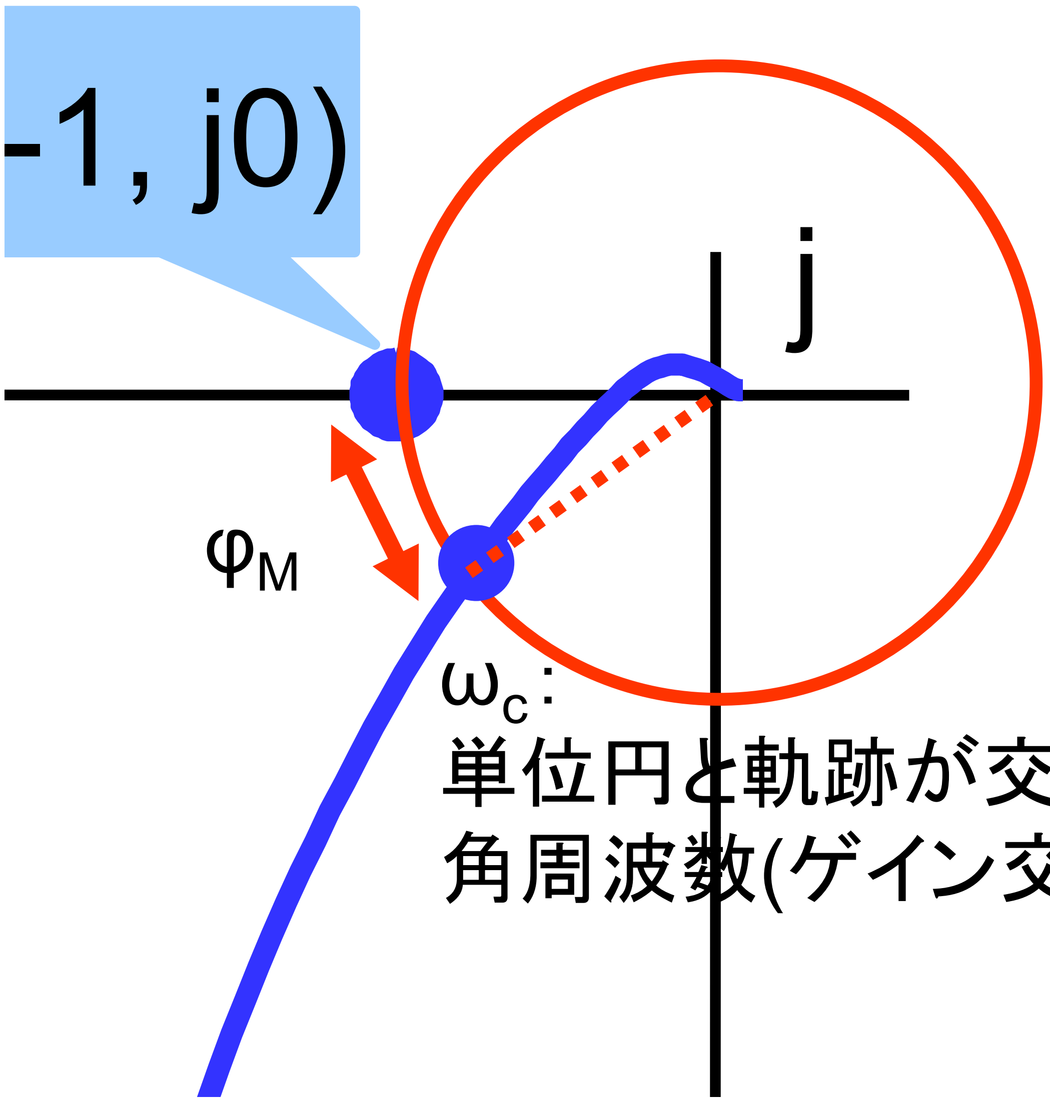
Pを何倍したら
不安定になるか

P.133の例)

$$20\log(\frac{1}{0.33}) = 9.63$$

[dB]

位相余裕(Phase Margin)を調べてみよう



ω_c:
単位円と軌跡が交差するときの
角周波数(ゲイン交差周波数)

ゲインPが1になったときに
(-1, j0)からできるだけ
離れた方が安定

φ_Mが大きいほど安定
(位相余裕)

位相余裕の求め方

ゲイン $|G(j\omega)|=1$ ⇒ ω_c を求める

位相$\theta(\omega_c)$ を求める

$\pi+\theta(\omega_c)$ を求める

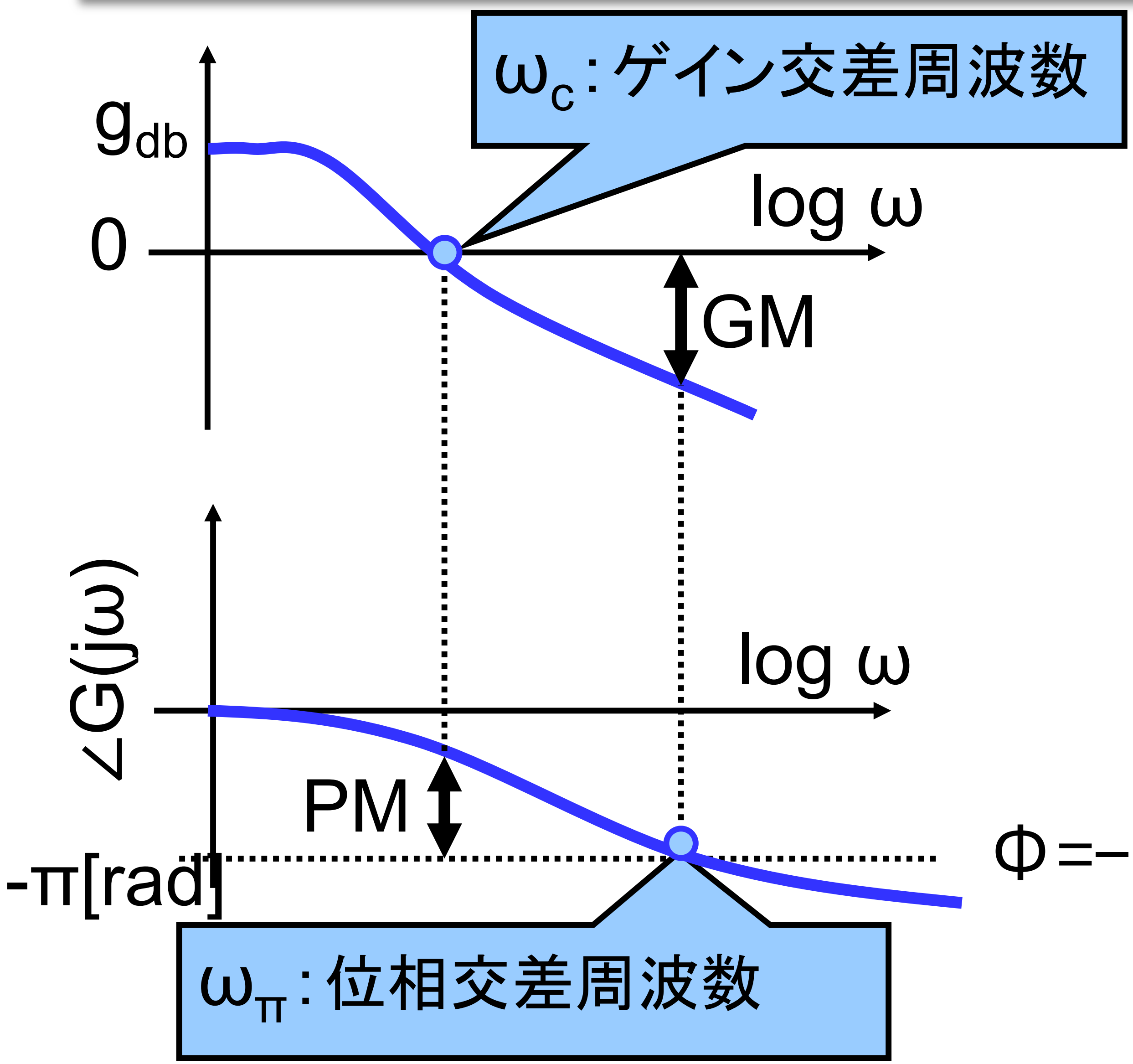
例) $G(s)H(s)=10/(s(s+1)(s+5))$

$$\theta=-2.7[rad](-155[\mathrm{deg}])$$
$$\Rightarrow PM=\pi+\theta=180[\mathrm{deg}]-155[\mathrm{deg}]$$
$$=0.44[rad](25[\mathrm{deg}])$$

直交座標表現を用いた場合

$|G(j\omega)|=\sqrt{(\text{実部})^2+(\text{虚部})^2}=1$となる$\omega_c$

ボード線図を用いた
フィードバックシステムの安定度の調べ方



Φ=−π[rad]

log 1=0より,
ゲイン特性の横軸
→ナイキスト線図での
単位円に対応

PM,GM＞0→安定