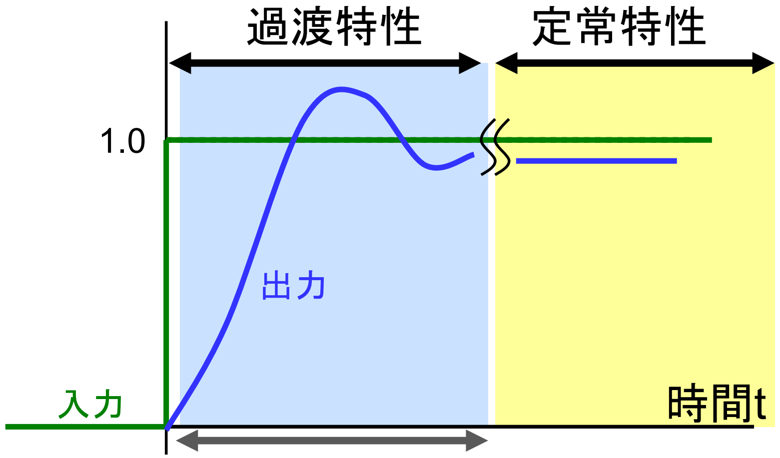
資料15
授業のポイント3

システム制御工学A

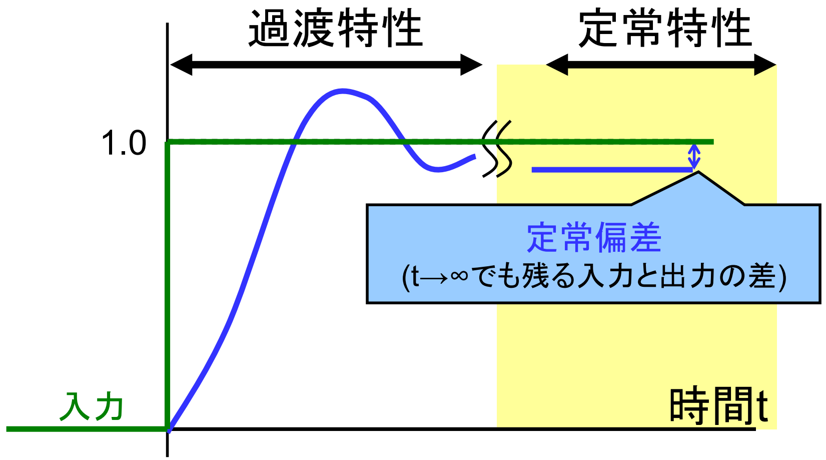
資料8 速応性と定常特性 今回はこちら
（教科書の7章）

ステップ応答(P.146)における過渡特性と定常特性

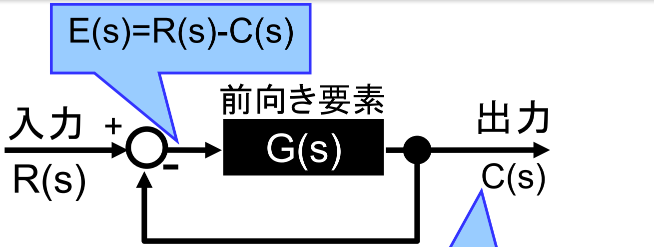


Ts 整定時間：出力が最終値の±5%に収まるまでの時間

定常偏差の意味



定常偏差の求め方



E(s)=R(s)-C(s)=R(s)-E(s)G(s)
E(s)(1+G(s))=R(s)

偏差 $E(s)=\dfrac{R(s)}{1+G(s)}$

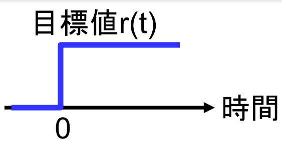
定常偏差の求め方(つづき)

最終値の定理より

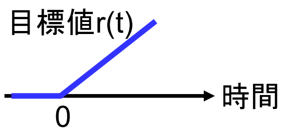
$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{R(s)}{1+G(s)}$$

定常偏差の入力の種類(P157-159)

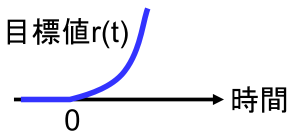
■ 定常位置偏差
- ➢r(t)=u(t) (単位ステップ)
- ➢$R(s)=1/s$



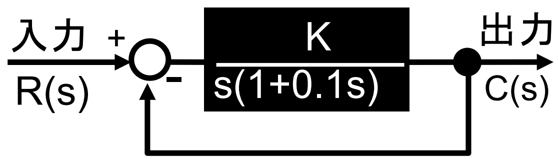
■ 定常速度偏差
- ➢r(t)=t
- ➢$R(s)=1/s^2$



■ 定常加速度偏差
- ➢$r(t)=t^2/2$
- ➢$R(s)=1/s^3$



演習問題:7. 2



下記の設計仕様を満足するKを求めよ. ただし, Os=10%のとき減衰率ξ=0.6とする.

行きすぎ量

■ 行き過ぎ量Os≦10%

■ 定常速度偏差εv≦0. 2

•行き過ぎ量を問題とする→2次遅れ系である
•ξは減衰率. 減衰率が大きい→Osは?
•定常速度偏差のとき入力は?

解答: 行き過ぎ量の条件

まず，閉ループ伝達関数を2次遅れ系の標準形に変形

$\frac{G}{1+G}$ →

$$\frac{\frac{K}{s(1+0.1s)}}{1+\frac{K}{s(1+0.1s)}}=\frac{K}{s(1+0.1s)+K}$$

$$=\frac{10K}{s^2+10s+10K}=\boxed{\frac{\varpi_n{}^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\varpi_n{}^2}}$$

覚える!!

$$\varpi_n=\sqrt{10K} \qquad \xi=\frac{5}{\varpi_n}=\frac{5}{\sqrt{10K}}$$

(続き) 解答:行き過ぎ量の条件

2次遅れ系の性質: 減衰率ξが大→Osは小

⇩

ξ=0.6のときOs=10% ⇒ Os≦10%のためには ξ ≧ 0.6

⇩

$$\xi=\frac{5}{\sqrt{10K}}\geq 0.6$$

K≦25/3.6=6.94

(続き)解答: 定常速度偏差の条件

定常速度偏差 ⇒ 入力R(s)= 1/s^2

$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)}=\frac{1}{1+\frac{K}{s(1+0.1s)}}\frac{1}{s^2}$$

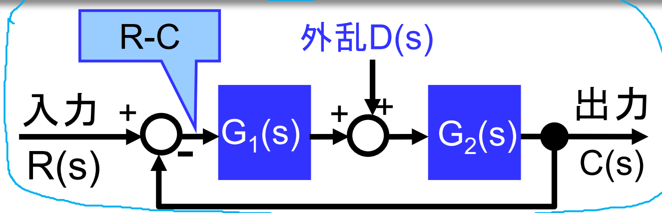
$$\varepsilon_v=\lim_{s\to 0}sE(s)=\frac{1}{K}\leq 0.2$$

$$\therefore K\geq 5$$

行き過ぎ量の条件
と合わせて

$\boxed{5\leq K\leq 6.94}$

外乱に対する定常偏差



C=((R-C)G_1 + D)G_2=(-CG_1+D)G_2 (入力R=0とする)

C=DG_2/(1+G_1G_2)

偏差

$$E(s)=-C=\frac{-DG_2}{1+G_1G_2}$$

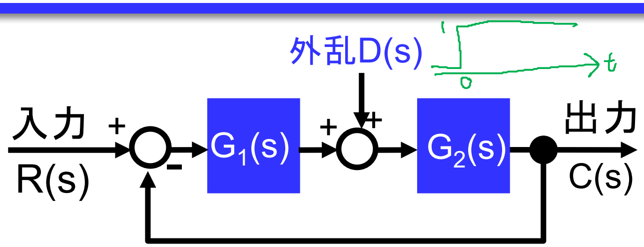
⇨

定常偏差

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{s\to 0}sE(s)$$

$$=\lim_{s\to 0}s\frac{-DG_2}{1+G_1G_2}$$

例題7．4の簡単バージョン



$$G_1(s)=\frac{K}{1+sT_1}\ ,\ G_2(s)=\frac{1}{s(1+sT_2)}$$

の場合，単位ステップ関数の外乱に対する
システムの定常偏差が0．1以下となるKを求めよ
ノイズに対する

D(s)は単位ステップのラプラス変換．最終値の定理を使う．

解答

$$E(s)=\frac{-D(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)}$$ において，

$$G_1(s)=\frac{K}{1+sT_1}\ ,\ G_2(s)=\frac{1}{s(1+sT_2)}\ ,\ D(s)=1/s$$

単位ステップ外乱

最終値の定理より定常偏差は，

$$\lim_{s\to 0} sE(s)=-\frac{1}{K}$$

制御ではゲイン定数 $K>0$

定常偏差の大きさが0.1以下であるので，$\frac{1}{K}\leqq 0.1$

10≦K

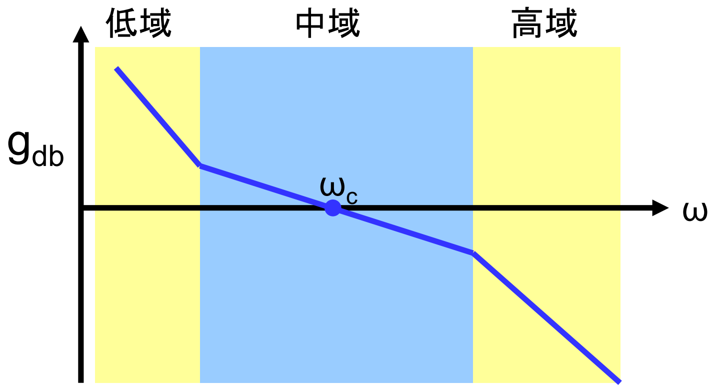
8章　フィードバック制御系の設計

開ループ伝達関数の周波数領域での設計

■ 目的
- 定常偏差，速応性，減衰性などが仕様を満たすようにシステムを調整すること

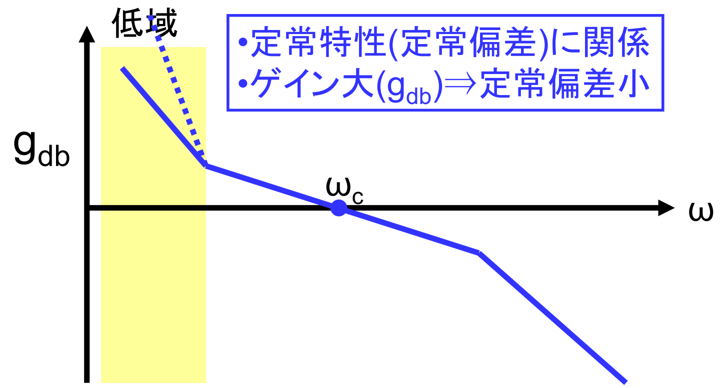
設計仕様と開ループ伝達関数の関係

ボード線図(ゲイン特性)

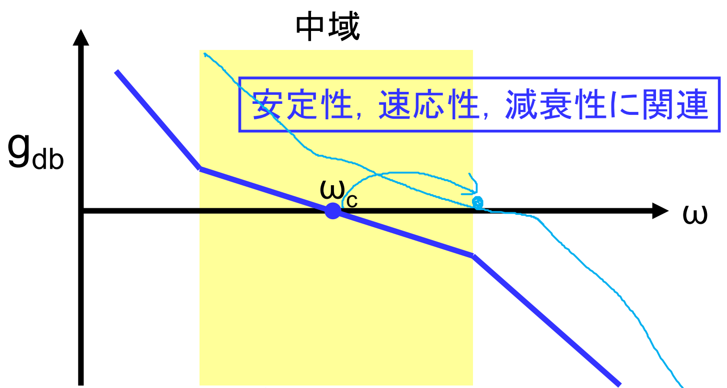


ω_c:ゲイン交差周波数

低域



中域

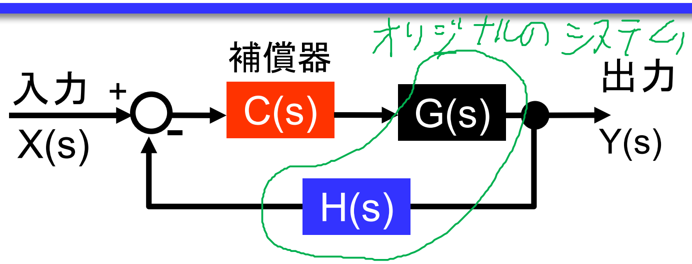


- 安定性：ωc付近⇒ゲインの傾きを-20db/dec程度に抑える
- 速応性：ωcを増加⇒速応性は向上
- 減衰性：ωcにおける位相余裕PMを大 ⇒　減衰性向上

設計手法のポイント

- 低域・中域・高域での周波数特性が，時間特性との関係を理解する
- 直列補償
  - 位相遅れ・位相進み補償の効果
- PID補償
  - P補償，PI補償，PD補償，PID補償の効果

直列補償

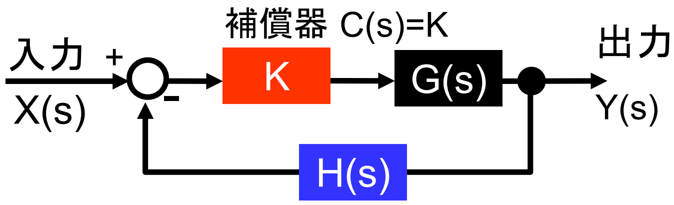


前向き要素に“補償器”を直列に挿入

特性改善

ゲイン補償，位相遅れ補償，位相進み補償

直列補償の例1: ゲイン補償



開ループ伝達関数: KG(jω)H(jω)

ゲイン特性はどのように変わった? (位相特性は変化無し)

オリジナルのゲイン特性: $20\log|G(j\omega)H(j\omega)|$

補償後のゲイン: $20\log|GHK|$

$= 20\log K + 20\log|GH|$

ゲイン補償

C(s)=K ⇒ g_{db}は20logK変化

位相特性は変化無し

ゲイン上にシフト

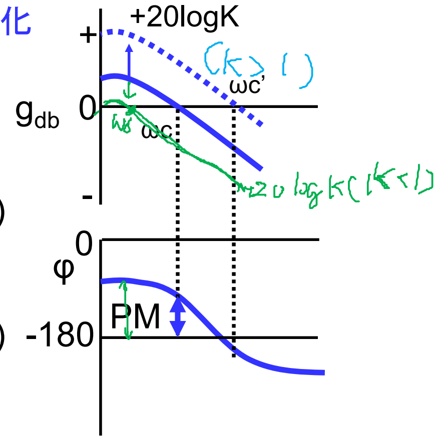
K>1⇒ ωc大(速応性向上)

PM減少(安定性劣化)

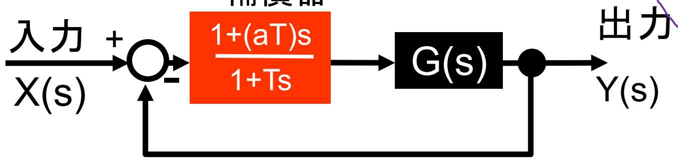
ゲインが下にシフト

K<1⇒ ωc小(速応性劣化)

PM増加(安定性向上)



直列補償の例2: 位相遅れ補償



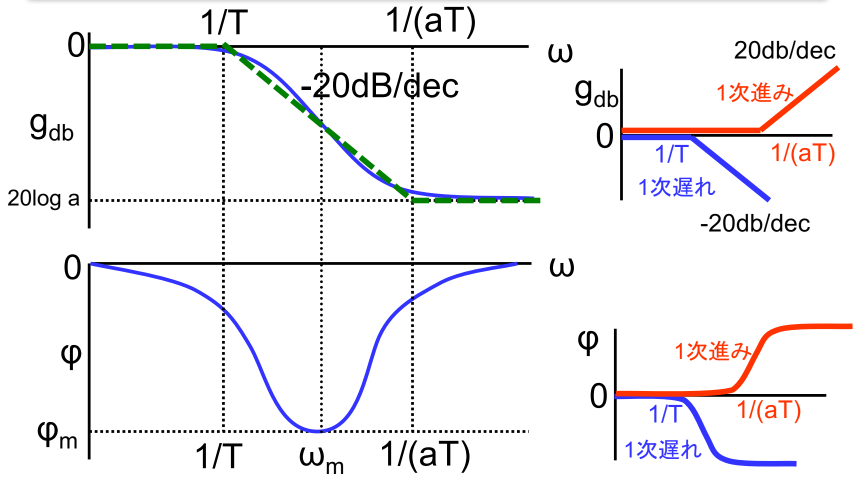
1次進み要素

$$C(s)=\frac{1+(aT)s}{1+Ts}$$

(a<1)

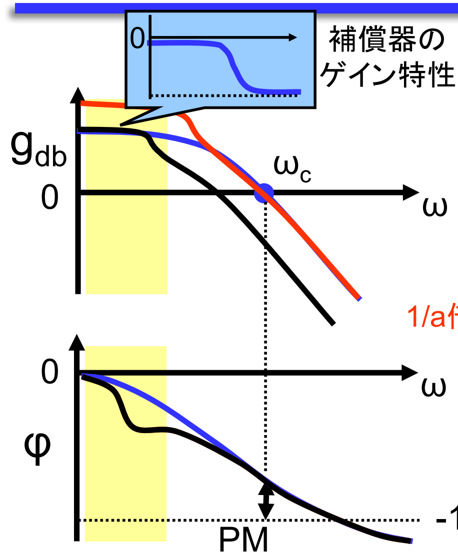
1次遅れ要素

位相遅れ補償器の周波数特性



$$\varpi_m = \frac{1}{T\sqrt{a}} \Rightarrow \phi_m = \tan^{-1}\frac{a-1}{a+1}$$

位相遅れ補償の使い方(低域のゲイン向上)

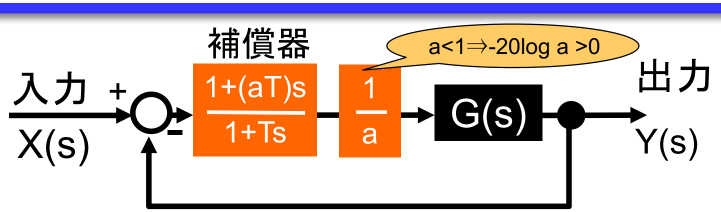


低域に位相遅れ補償

中域高域ゲインが
20log a 減少

1/a倍のゲイン補償を組み合わせる
(次のページ)
(中高域もとどおり
低域のみゲイン向上)

補足(位相遅れ補償+ゲイン補償)

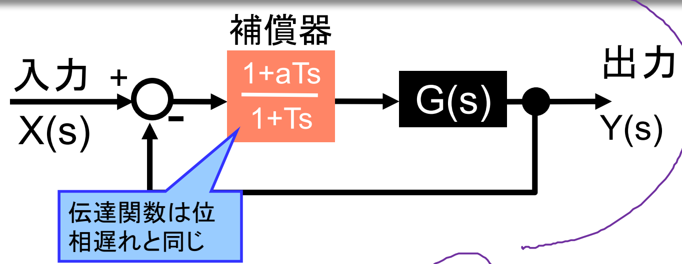


1次進み要素

$$C(s) = \frac{1+(aT)s}{1+Ts} \qquad (a<1)$$

1次遅れ要素

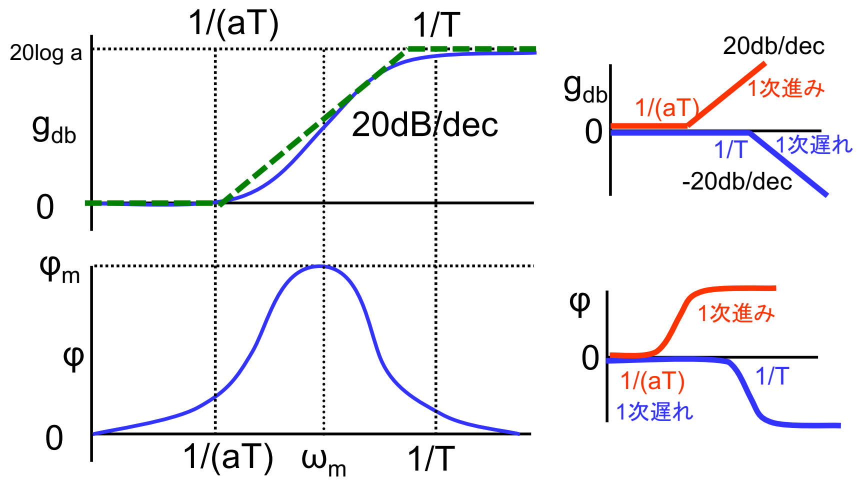
直列補償の例3: 位相進み補償



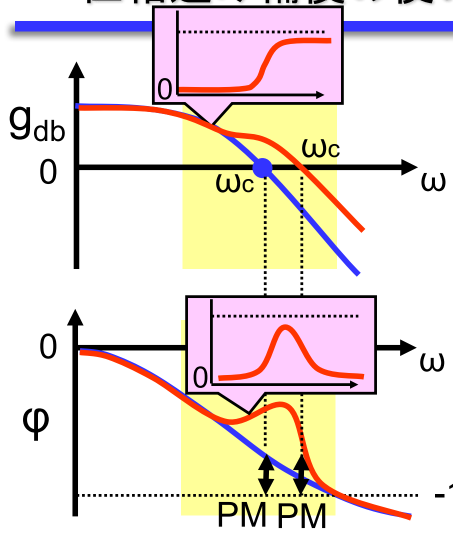
$$C(s) = \frac{1+aTs}{1+Ts} \qquad (a>1)$$

位相遅れ補償と
はaの大きさが
異なる

位相進み補償器の周波数特性



位相進み補償の使い方(ωcの増加)



- 中域に位相進み補償

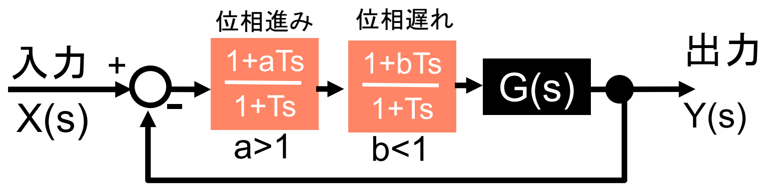
⇓

- 中域・高域ゲイン向上
  ωc増加⇒速応性

ωcだけ増加⇒PMが減少

- ωc付近の位相進める
  PMの増加⇒安定性

位相進み・遅れ補償(189ページから)



位相遅れ(低域における特性改善)

+

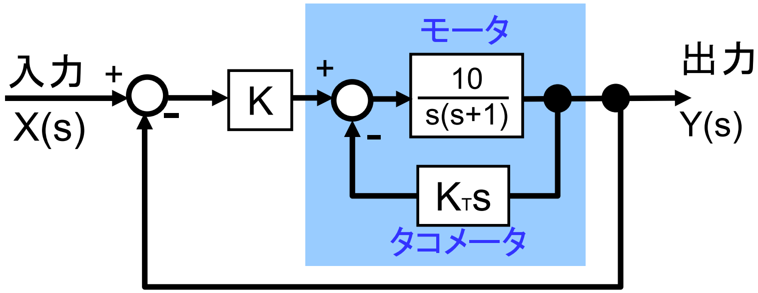
位相進み(中域における特性改善)

とりあえず本授業では省略します. 自分でみておくこと

フィードバック補償(P.193)

フィードバック補償～例題を通して

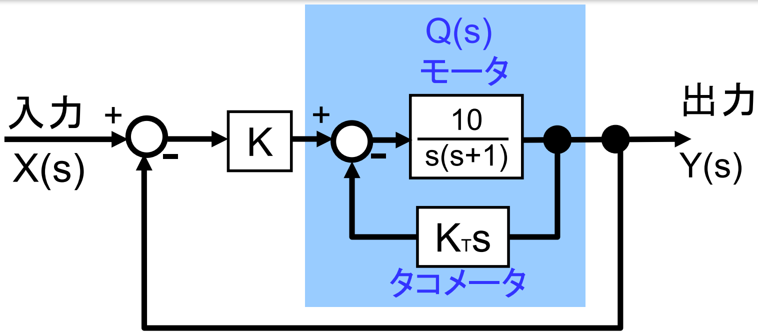
制御対象に対して，補償器をフィードバックで挿入



例題8．5

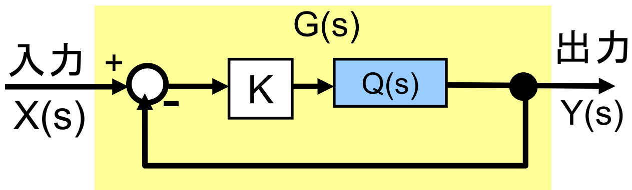
1. この系の伝達関数を求めよ
2. 次の仕様をみたすK, K_Tを求めよ
   - 減衰率$\xi=0.5$
     ヒント：G(s)を2次系の標準形式にする
   - 定常速度偏差$\varepsilon_v \leqq 0.05$
     ヒント：定常速度偏差はP.159　式7．24

解答1 青い部分の伝達関数を求めよ



$$Q(s)=\frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1+\frac{10}{s(s+1)}(K_T s)}=\frac{10}{s+10sK_T+s^2}$$

解答1(つづき) 全体の伝達関数を求めよ



※フィードバック要素が1⇒直結フィードバックループ

$$G(s)=\frac{KQ(s)}{1+KQ(s)\cdot 1}=\frac{10K}{s^2+s(10K_T+1)+10K}$$

解答2 減衰率の条件

2次遅れ系の標準系
覚える！！

$$G(s)=\frac{10K}{s^2+s(10K_T+1)+10K}=\frac{\varpi_n^2}{s^2+2\zeta\varpi_n s+\varpi_n^2}$$

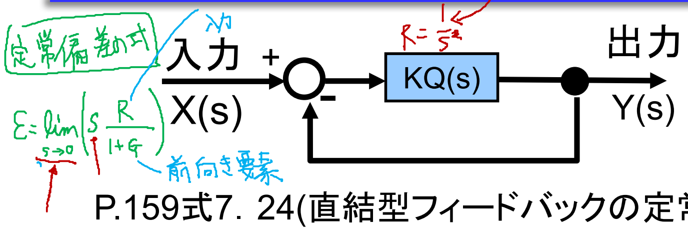
$$\varpi_n^2=10K \rightarrow \varpi_n=\sqrt{10K}$$

$$2\zeta\varpi_n=2\zeta\sqrt{K}\sqrt{10}=10K_T+1$$

$$\zeta=0.5 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{10K}=10K_T+1$$

PID補償(P.197)

解答2(つづき) 定常速度偏差の条件



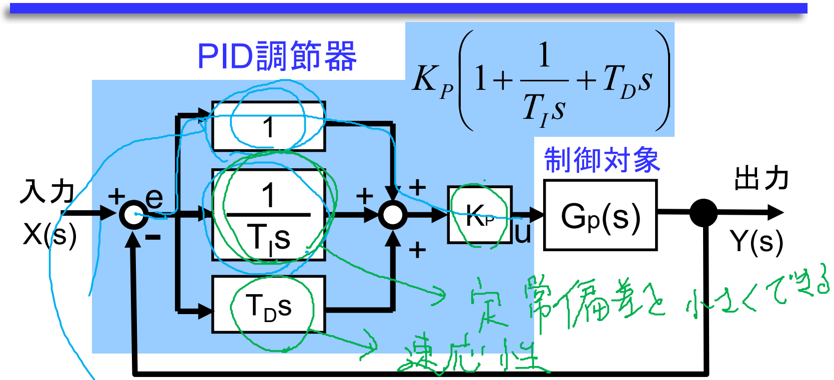
P.159式7. 24(直結型フィードバックの定常偏差)より

$$\varepsilon_v=\lim_{s\to 0}\left(s\frac{1}{1+KQ(s)}\frac{1}{s^2}\right)=\frac{1}{10K}(10K_T+1)\leq 0.05$$

前述の $\sqrt{10K}=10K_T+1$ と併せて解くと,

40≦K, 1.9≦K_T

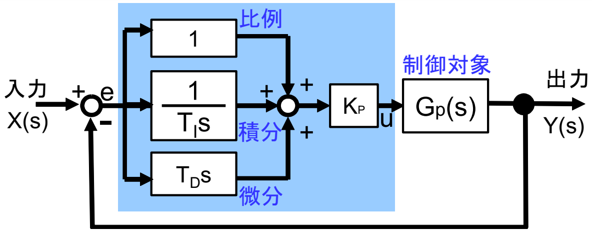
PID調節器の構成



K_P: 比例ゲイン, T_I:積分時間, T_D:微分時間

偏差eの比例(Proportional), 積分(Integral), 微分(Derivative)
により操作量uを決定

PIDの効果を確かめる例題



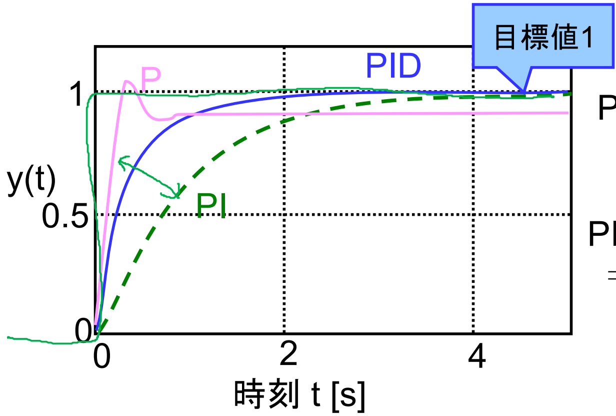
制御対象 $G_P(s)=\dfrac{10}{(s+1)(s+10)}$

P補償のパラメータ　: $K_P=10$

PI補償のパラメータ　: $K_P=1,\ K_I=1$

PID補償のパラメータ: $K_P=2.75,\ K_I=2.5,\ K_D=0.25$

ステップ応答



PID, PI
⇒ 積分の効果で
定常偏差0

PID
⇒微分効果で
過渡特性改善

演習(P.217　8･3改)

教科書P.217 図8･45について，次の問に答えよ

1. ゲイン補償Gc(s)=Kのみでは安定化することができないことを，ボード線図の位相特性から説明せよ
2. Gc(s)として，PD補償$G_c(s)=K_p(1+T_D s)$を用いたとき，系を安定にするK_P, T_Dを求めよ
3. PD補償を用いたとき，単位ステップの外乱に対して定常偏差を0．2以下にするK_Pを求めよ

基本伝達関数のまとめ

復習

伝達関数	Ks	$\frac{K}{s}$	$\frac{1}{(1+sT)}$	$1+sT$	$\frac{\omega_n^2}{S^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	e^{-Ls}
ボード線図のゲイン	1/K, 20dB/dec	K, -20dB/dec	1/T, -20dB/dec	1/T, 20dB/dec	$\omega_{co}=\omega_n$, -40dB/dec	0
ボード線図の位相	$\frac{\pi}{2}$, 0	0, $\frac{-\pi}{2}$	0, 1/T, $\frac{-\pi}{2}$	1/T, 0	0, -π/2, -π	0
ナイキスト線図	Im, Re	Im, Re	Im, Re	Im, 1	0, Im, 1	Im, 1
ステップ応答	0, t	0, t	63%, 0, T, t	0, t	0, t	0, L, t

振動現象がある

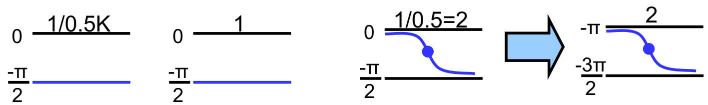
時間遅れ

解答1

Gc(s)=Kのとき開ループ伝達関数は

$$\frac{K}{s^2(s+2)} = \frac{0.5K}{s}\frac{1}{s}\frac{1}{1+0.5s}$$

2個の積分系と1個の1次遅れ⇒位相特性は?



ゲインに関わらず，PM<0(位相が-180度以下)⇒不安定

解答2 まずは特性方程式!

開ループ伝達関数G(s)は

$$G(s) = K_P(1+T_Ds)\times\frac{1}{s^2(s+2)} = \frac{K_P+sK_PT_D}{2s^2+s^3}$$

1+GH=0

特性方程式は

伝達関数の分母=0

閉ループ伝達関数

$$\frac{G}{1+GH}$$

フィードバック要素 直結型 H=1

$$1+G(s) = \frac{K_P+sK_PT_D}{2s^2+s^3}+1=0$$

$$s^3+2s^2+sK_PT_D+K_P=0$$

解答2つづき

ラウス配列は

$$\begin{array}{ccc}
1 & K_PT_D & 0 \\
2 & K_P & 0 \\
-\dfrac{\begin{vmatrix}1 & K_PT_D \\ 2 & K_P\end{vmatrix}}{2} & -\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 0 \\ 2 & 0\end{vmatrix}}{2} & \\
-\dfrac{\begin{vmatrix}2 & K_P \\ a & 0\end{vmatrix}}{a} & &
\end{array}$$

ラウスの安定判別条件(左1列目の符号)

$$a = K_P\left(T_D-\tfrac{1}{2}\right)>0, K_P>0 \quad \Rightarrow \quad T_D>\tfrac{1}{2}, K_P>0$$

解答3

$G_1 = G_c(s) = K_P(1+T_Ds)$, $G_2 = G_p(s) = \frac{1}{s^2(s+2)}$ $\qquad D(s)=\frac{1}{s}$

外乱に対する 定常偏差の大きさは

$$\left|\lim_{s\to0}\left\{s\left(-\frac{G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)}\right)D(s)\right\}\right| = \frac{1}{K_P}\le 0.2$$

$$5\le K_p$$

ポイント

- 8章は総合理解が試される章
  ⇒例題はどれも重要

定期試験では，根軌跡は試験範囲から
除かれます