

全極形伝達系を駆動するマルチパルス系列の推定*

(特異値分解における Taper 窓の利用)

金井 浩*¹, 城戸 健一*²

Estimation of Multipulse Series Driving of an All-Pole Transfer System (Application of Tapering Window in Singular Value Decomposition)

Hiroshi KANAI and Ken'iti KIDO

When a vibration is repeatedly driven, it is difficult to identify the multipulse driving series from the observed signal contaminated by additive noise; this is the case even when the transfer system is described by an all pole model and its characteristics are known because an unstable nonlinear optimization method, such as pole-zero modeling, is necessary. Thus, an inverse filter is ordinarily used. However, when the signal-to-noise ratio is low, even this method cannot estimate the multipulse series accurately. Therefore, we propose a stable method to estimate the multipulse driving series from the observed signal by using singular value decomposition and applying a tapering window. Finally, the principle is confirmed experimentally.

Key Words: Vibration Analysis, Spectrum Estimation, Inverse Filtering, Multipulse Driving Series, Singular Value Decomposition, Eigenvalue Decomposition, Tapering Window

1. ま え が き

機械系で繰返し励振される振動の分析⁽¹⁾⁽²⁾等において、全極形伝達系を駆動する信号が、単一パルスではなく、マルチパルス状で表される場合、そのパルスの入力時刻を推定することが重要となる。この問題は、決定論的なアプローチを採る必要があること、駆動系列がスペクトル零を持つため、伝達系が全極形でかつその特性が既知の場合でも、非線形の推定法が必要となることなどの点で、一般に安定に解を得ることが難しい。したがって、通常逆フィルタリング処理⁽³⁾⁽⁴⁾が用いられる。逆フィルタリング処理は、観測時間内のすべての時刻に駆動パルスを仮定し、観測雑音のパワーを最小化するように、駆動パルスを最小二乗推定することと等価である。しかし、 S/N が低い場合、良好な結果を得ることができない。

また、パルス位置を仮想的に設定し、その各々の場

合に関してパルスの振幅を最小二乗推定する方法も考えられる。しかし、長さ N 点の信号中に N_p 個のパルスが存在する場合、総数 ${}_N C_{N_p}$ とおりのパルス位置設定の組合せがある。例えば、わずか $N=16$ 点の短い信号でさえ、 $N_p=8$ のとき、 ${}_N C_{N_p}=12870$ 回となり、これらすべての組合せ各々に対して、最小二乗法を適用することは現実的ではない。

そこで本論文では、特異値分解または固有値展開を利用して、高雑音下においても、パルス位置を安定に推定するための方法を提案する。さらに、Taper 窓を適用することによって、パルス位置をより精度高く推定する方法を提案する。最後にシミュレーション実験により、これらの方法の有効性を示す。

2. 本手法の原理 (図1参照)

時刻 τ_i ($0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_{N_p} \leq N-1$) に入力した振幅 d_i のパルス $d_i \cdot \delta(n - \tau_i)$ からなるマルチパルス駆動系列を $x(n)$ とおく。

$$x(n) = \sum_{i=1}^{N_p} d_i \cdot \delta(n - \tau_i) \dots \dots \dots (1)$$

ただし、

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$$

* 昭和63年8月23日 第951回講演会において講演、原稿受付 昭和63年3月4日。

¹ 正員、東北大学情報処理教育センター (〒980 仙台市川内無番地)。

² 正員、東北大学応用情報学研究センター (〒980 仙台市片平2-1-1)。

N, N_p は、各々信号長とパルスの個数を示す。また、 M 次全極形伝達系 $1/A(z)$ の分母を次式で表す。

$$A(z) = \sum_{i=0}^M a_i z^{-i} \quad (a_0=1) \dots\dots\dots (2)$$

$\{a_i\}$ は線形予測係数である。 $x(n)$ により駆動された全極形伝達系の応答 $h(n)$ と、さらに、 $h(n)$ に白色雑音 $n(n)$ が付加して得られた観測信号 $y(n)$ は、各々次式で表される。

$$h(n) = -\sum_{i=1}^M a_i \cdot h(n-i) + x(n) \dots\dots\dots (3)$$

$$y(n) = h(n) + n(n) \dots\dots\dots (4)$$

$(n=0, 1, 2, \dots, N-1)$

さらに式(4)をベクトルと行列により次のように表す。

$$y = Hd + n \dots\dots\dots (5)$$

$$y = [y(0), y(1), \dots, y(N-1)]^T$$

$$n = [n(0), n(1), \dots, n(N-1)]^T$$

$$d = [d_1, d_1, \dots, d_{N_p}]^T$$

ここで、 y, n は、 N 次元ベクトルを表し、 d は、 i 番目の要素が時刻 τ_i に入力したパルスの振幅 d_i から構成される N_p 次元ベクトルを表す。雑音下において観測信号 y から d を推定することが本論文の目的である。また、全極モデル $1/A(z)$ を振幅 1 の単一のインパルス $\delta(n-\tau_i)$ で駆動したときのインパルス応答を $h_i(n)$ で表すとき、行列 H は、 N 次元ベクトル $[h_i(0), h_i(1), \dots, h_i(N-1)]^T$ を i 番目の列に持つ $N \times N_p$ 下三角行列である。

このとき、雑音系列 n のパワーを最小化することによって得られる、 d の最小二乗解 \hat{d} は、次式によって与えられる。

$$\hat{d} = (H^T H)^{-1} H^T y \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 T は、行列の転置。

もし、駆動信号 $x(n)$ の N 点すべてにパルス d_i が入力していた場合、すなわち、 $N_p = N$ で、 $\tau_i = i-1, (i=1, 2, \dots, N)$ が成立するときには、 H は、 $N \times N$ の下三角 Toeplitz 行列となる。この H を H_N と表す。ここで、 $N \times N$ 行列 A を線形予測係数 $\{a_i\}$ からなる次の下三角 Toeplitz 行列とする、

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & & & \\ \vdots & a_1 & & & \\ a_M & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_1 & a_0 \end{bmatrix}$$

$N \times N$ 単位行列を I_N で表すと、 $AH_N = I_N$ で、行列式 $\det(A) = \det(H_N) = 1$ であるから、 $(H_N^T H_N)^{-1} H_N^T = A$ が成立する。したがって、式(6)の最小二乗解は、通常の逆フィルタリング Ay と等価となる。しかし、式(5)を式(6)に代入すれば、

$$\hat{d} = Ay = d + An \dots\dots\dots (7)$$

となる。すなわち、逆フィルタリングにより推定したパルスの振幅 \hat{d} は、真のパルス系列 d に、全零モデルの系列 An の項が加わった形となる。したがって、仮に真の $\{a_i\}$ が求まっていて、かつ観測端においては Hd と n 間の S/N が良好であったとしても、推定値 \hat{d} における d と An 間の S/N は低下し、各点のパルスの振幅 $\{d_i\}$ を求めることは困難を極める。これは、行列 H の列ベクトル間の相関が大きいためによって、式(6)の $H^T H$ の条件数が大きくなっているためである。

そこで、 H_N の固有値展開または H の特異値分解を行う。まず、 $N_p < N$ の場合には、 H を次のように特異値分解する⁽⁸⁾。

$$H = Q_1 \Sigma Q_2^T \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 Q_1, Q_2 は、各々対称行列 HH^T と $H^T H$ の固有ベクトルを列とする、 $N \times N, N_p \times N_p$ 正規直交行列である。また、行列 H の階数を $\text{rank } H = R, (R \leq N_p < N)$ とおく、 Σ は、特異値 $\sigma_i (\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_R > 0 = \dots = 0)$ を対角線上にもつ $N \times N_p$ の対角行列である。したがって、 $N_p \times N$ の対角行列 $\Sigma_{\hat{r}}^{-1}$ を、

$$\Sigma_{\hat{r}}^{-1} = \text{diag} [1/\sigma_1, 1/\sigma_2, \dots, 1/\sigma_R, 0, \dots, 0] \dots\dots\dots (9)$$

と定義すると、式(6)の \hat{d} は、次式で与えられる。

$$\hat{d} = Q_2 \Sigma_{\hat{r}}^{-1} Q_1^T y \dots\dots\dots (10)$$

また、 $N_p = N$ の場合も、推定値 \hat{d} は、同様に式(10)で表される。ここで、 $N_p = N$ の場合に関して、 \hat{d} の物理的意味を調べてみる。このとき、 $H = H_N$ は、下三角 Toeplitz 行列であり、 $N \times N$ 交換行列 J を掛けた JH_N は、対称行列となるため、次のように固有値展開できる。

$$JH_N = U \Sigma U^T \dots\dots\dots (11)$$

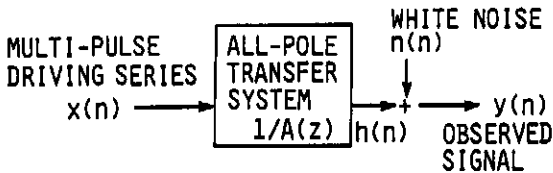


図 1 本論文で扱う信号のモデル

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}$$

ただし、 U は $H_N H_N^H$ の固有ベクトル $\{u_i\}$ を列にもつ正規直交行列 ($U^T U = U U^T = I_N, U^{-1} = U^T$)、 Σ は、固有値 $\sigma_i (|\sigma_1| \geq |\sigma_2| \geq \cdots \geq |\sigma_R| > 0 = \cdots = 0)$ をもつ対角行列である。式(10)と同様、行列 H_N の階数を $\text{rank } H_N = R, (R \leq N_p = N)$ とおく。 $J^T = J, J J = I_N$ であることを注意すれば、式(11)から

$$(H_N^H H_N)^{-1} H_N^H = U \Sigma^{-1} U^T J \cdots \cdots \cdots (12)$$

が成立する。したがって、固有値展開を用いたときの式(6)の \hat{d} は次式によって表される。

$$\hat{d} = U \Sigma^{-1} U^T (J y) \cdots \cdots \cdots (13)$$

この式の物理的な意味を調べるために、さらに式(5)の y と式(11)の H_N を代入する。

$$\begin{aligned} \hat{d} &= U \Sigma^{-1} U^T J (J U \Sigma U^T d + n) \\ &= (U^T)^{-1} \Delta_R U^T d + (U^T)^{-1} \Sigma_R^{-1} U^T n' \end{aligned} \cdots \cdots \cdots (14)$$

ここで、

$$\Delta_R = \Sigma_R^{-1} \Sigma = \text{diag}[\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_N]$$

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{for } 1 \leq i \leq R \\ 0 & \text{for } R < i \leq N \end{cases}$$

また、 $n' = J n$ は、ノイズ $n(n)$ の時間方向を逆にした系列 $n'(n) = n(N - n - 1)$ である。

式(14)の右辺第1項 $(U^T)^{-1} \Delta_R U^T d$ は、真のパルス系列 d を固有値ベクトル $\{u_i\}$ によって正規直交展開し、 Δ_R を掛けて低次項のみとり、また逆の正規直交展開 $(U^T)^{-1}$ を行う、一般化された低域通過フィルタを表す(図2参照)。仮に u_i が N 点の離散的フーリエ変換における正規直交基底ベクトルと等しければ、この $(U^T)^{-1} \Delta_R U^T$ は、通常低域通過フィルタリングそのものとなる。

また、式(14)の右辺第2項 $(U^T)^{-1} \Sigma_R^{-1} U^T n'$ は、 Σ_R^{-1} の特性からわかるように、近似的には、一般化された高域強調フィルタを形成している。

したがって、例えば、ある閾値 T_0 に対して、

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^R |\sigma_i|}{\sum_{i=1}^N |\sigma_i|} \right) < T_0 \cdots \cdots \cdots (15)$$

を満足する R の最大値を打ち切り次数とおく等の適当な基準によって設定された Δ_R, Σ_R^{-1} を用いることにより、雑音成分を抑制し、 \hat{d} における S/N を向上させることができる。

しかし、通常FIRフィルタにおいて、ギブスの現象によって良好な遮断周波数特性が得られないことと同様に、 Δ_R の急峻な矩形型特性によって得られた駆

動パルスは、真のパルス周辺に振幅の大きい裾野が広がっているため、真のパルスの検出がやや難しい。

そこでさらに、Taper窓を用いて、急峻な矩形型特性を緩やかにし、駆動パルスの推定波形において、パルス周辺以外の部分の振幅を抑制することを提案する。ここで用いる方法は、(a)窓関数を Δ_R の対角項に畳み込み、フィルタを求める方法と、(b)フィルタ $U \Delta_R U^T$ のインパルス出力に対して窓関数を掛けて作成した裾野の抑制された系列を出力するように、フィルタ係数を最小二乗設計する方法の2種である。以下に概要を述べる。

(a) 窓関数と Δ_R の対角成分を畳み込みによるフィルタ

Δ_R の対角成分 $\{\delta_i\}$ に対し、幅 $\pm N_w$ の Taper 窓 w_i を畳み込み、得られた系列を $\{\lambda_i\}$ とする。 $\{\lambda_i\}$ を対角線上に持つ $N \times N$ 行列を Λ とおき、式(10)または、式(13)における $\Sigma_R^{-1} = \Delta_R \Sigma^{-1}$ のかわりに $\Lambda \Sigma^{-1}$ を用いる。

$$\hat{d} = Q_2 \Lambda \Sigma^{-1} Q_1^T y \cdots \cdots \cdots (10')$$

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N]$$

または

$$\hat{d} = U \Lambda \Sigma^{-1} U^T J y \cdots \cdots \cdots (13')$$

窓 w_n としては、例えば、次の Hamming 窓がある。

$$\begin{aligned} w_n &= 0.54 + 0.46 \cos(2\pi n / 2N_w) \cdots \cdots \cdots (16) \\ &(-N_w \leq n \leq N_w) \end{aligned}$$

(b) フィルタ係数の最小二乗設計法

時刻 i に入力した単一インパルスのみもつ系列を、次のように i 番めの要素のみが1を持つ N 次元ベクトル $\delta_i = [0, 0, \cdots, 1, \cdots, 0]^T$ により表す。 δ_i に対する一般化低域フィルタ $U \Delta_R U^T$ の出力は、時間波形ベクトル $U \Delta_R U^T \delta_i$ により表される。これは、時刻 i を中心と

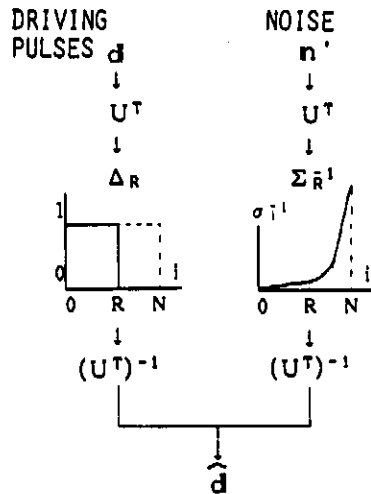


図2 特異値分解・固有値展開 [式(13), (14)] により \hat{d} を推定する原理説明図

して、時間的に前後に裾野の広がった波形となる。この裾野の部分を抑制するために、 $U\Delta_r U^T \delta_i$ に対して、次のような i を中心とする重み行列 W_i を掛け、その出力を f_i とおく。

$$f_i = W_i U \Delta_r U^T \delta_i \quad (1 \leq i \leq N) \dots\dots\dots (17)$$

ただし

$$W_i = \text{diag} [w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{iN}]$$

i を 1 から N まで変更して、各 f_i を i 番めの列にもつ行列 $F = [f_1, f_2, \dots, f_N]$ を求める。

一方、フィルタ係数 λ_i からなる対角行列を Λ とし、 $U\Delta_r U^T$ のかわりに δ_i に対するフィルタリング後の波形 $U\Lambda U^T \delta_i$ をベクトル s_i で表す。

$$s_i = U\Lambda U^T \delta_i \dots\dots\dots (18)$$

s_i を i 番めの列にもつ行列 $S = [s_1, s_2, \dots, s_N]$ を考える。行列 F は、実際に裾野を抑制したパルス出力で、希望の出力の集合であり、 S は、これから求めたいフィルタ (λ_i) を用いたときに得られる波形の集合である。したがって、この二つの行列間の差のパワーを最小化するように、 Λ の対角要素 $\{\lambda_i\}$ の係数を決定すればよい。すなわち、次の β を最小化する。

$$\begin{aligned} \beta &= (\|F - S\|_F)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \|f_i - s_i\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \|f_i - U\Lambda U^T \delta_i\|^2 \rightarrow \text{最小化} \end{aligned} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、 $\|\cdot\|_F, \|\cdot\|$ は各々行列とベクトルのユークリッドノルムを表す⁽⁶⁾。また、行列 U は正規直交行列であるから、次のように変形できる。

$$\beta = \sum_{i=1}^N \|U^T f_i - \Lambda U^T \delta_i\|^2$$

さらに、 $u_i = [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iN}]^T$ と定義すると、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \Lambda U^T \delta_i &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \vdots \\ u_{iN} \end{bmatrix} \\ &= U_i \lambda \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} U_i &= \text{diag} [u_{i1}, u_{i2}, \dots, u_{iN}] \\ \lambda &= [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N]^T \end{aligned}$$

したがって、 β は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \beta &= \sum_{i=1}^N \|U^T f_i - U_i \lambda\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (f_i^T f_i) - 2 \sum_{i=1}^N (f_i^T U U_i) \lambda + \lambda^T \lambda \end{aligned} \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $\sum_{i=1}^N U_i^T U_i = I_N$ を用いている。 β を λ で、偏微分し、導関数を零とおくことにより、フィルタ係数ベクトル λ は次のように決定できる。

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= \sum_{i=1}^N (U_i U_i^T) f_i \\ &= \sum_{i=1}^N U_i U_i^T W_i U \Delta_r U^T \delta_i \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

$\hat{\lambda}$ の各要素を用いて、式(10)'または式(13)'を計算し、 \hat{d} を推定する。また式(17)の重み行列 W_i は、式(16)の Hamming 窓 $\{w_n\}$ を N 点フーリエ変換し、得られた周波数スペクトルを用いる。 w_n は、実偶関数であるから、その周波数スペクトルも実偶関数となる。

以上、(a)または(b)の2種類の方法に基づいて、特異値分解または固有値展開に、新たに Tapering 窓を導入することにより、パルス周辺の裾野を抑制し、パルスの位置を、より精度高く推定できる。

3. シミュレーション実験

以上の理論を検証するために、計算機シミュレーションを行い、本手法と通常の逆フィルタリングによる推定結果の比較を行う。実験に用いる全極モデルは、スペクトル推定関係の文献でよく用いられる4次のものである⁽⁶⁾。

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, a_1 = -2.7607, a_2 = 3.8106 \\ a_3 &= -2.6535, a_4 = 0.9238 \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

図3(a),(b)にこの全極モデルの特性を示す。この全極モデルは、 $0.98 \exp \pm j0.69, 0.98 \exp \pm j0.88$ に四つの極をもつ共振の Q の大きい系である。なお、これらの極は、 z 平面上において互いに非常に近くに存在するため、長さ64点以下のFFTを用いた分析では、パワースペクトル中の二つのピークを分離することができず、分析の難しい全極モデルの一つである。本実験の各処理は、すべて倍精度実数により計算を行った。

また、駆動信号 $x(n)$ は、図3(c)に示すように2個のパルスをもつ、長さ $N=32$ 点の系列を考える。

$$x(n) = \sum_{i=1}^2 d_i \cdot \delta(n - \tau_i) \dots\dots\dots (23)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \text{パルス位置 } \tau_1 &= 4, \text{ 振幅 } d_1 = 1 \\ \tau_2 &= 10, \quad d_2 = -1 \end{aligned}$$

さらに、 $x(n)$ が上記の全極モデルを駆動した際に得られる応答信号 $h(n)$ を図3(d)に示す。この応答信号に雑音信号 $n(n)$ が加わって得られる観測信号 $y(n)$ の長さも、 $N=32$ と設定する。また、以下の実験においては、パルス位置は、あらかじめわからないも

のとし、パルスの個数 $N_p = N$ とおく。

3.1 逆フィルタリング処理によるパルス位置の推定 式(7)に基づく通常の逆フィルタリング処理によってパルスを推定した結果 \hat{d} を、図4に示す。S/Nは、10 dBである。線形予測係数には、式(22)の真の値を用いている。このように、図3(c)に示した本来のパルス以外にも多数のパルスが発生している。

次に、式(23)において、パルス $d_0\delta(n-n_0)$ のみ持つ駆動パルス系列を対象として、S/Nとパルスの推定精度との関係を調べる。S/N = ∞ において推定した駆動パルス列 $x_m(n)$ から作成した $x'_m(n)$ と、式(7)に基づいて推定した結果 $\hat{x}(n) = \hat{d}_{n-1}$ との間の誤差パワー α を次式にもとづいて計算する。

$$\alpha = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |\hat{x}(n) - x'_m(n)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |x'_m(n)|^2} \dots\dots\dots (24)$$

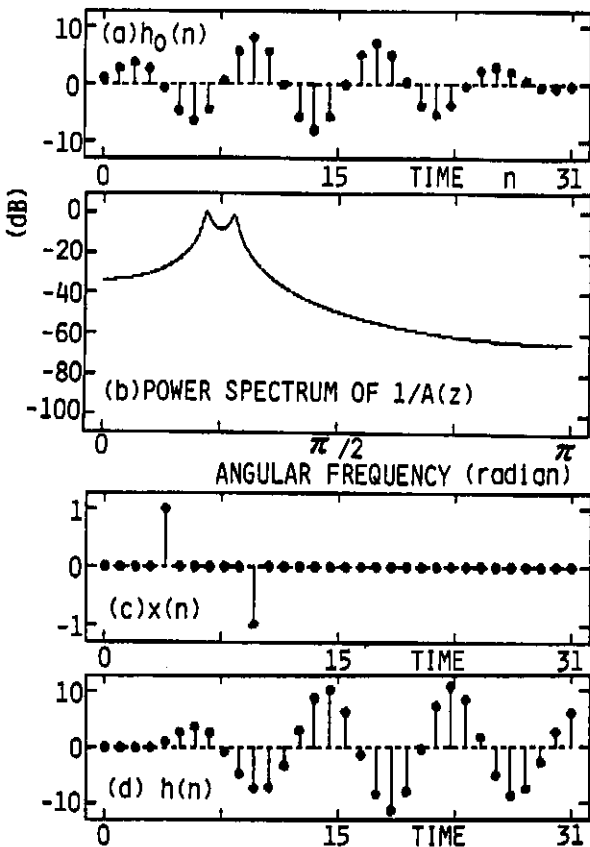
$$x'_m(n) = \begin{cases} x_m(n) & (|n-n_0| \leq N_p) \\ 0 & (|n-n_0| > N_p) \end{cases}$$

後述するように、裾野の振幅も評価するために、 $x_m(n)$ は、真のパルス位置を中心として、 $\pm N_p$ の部分のみの波形を用いる ($N_p=1$)。

この式に基づく評価結果を図5(*1)に示す。S/Nが70 dB程度では、 $\alpha = -27$ dBとなり、真のパルス系列を推定している。しかし、S/Nの減少分1 dB当たり α が1 dBの割合で減少しているため、S/Nが40 dB以下では、真のパルス以外の成分のパワーのほうが大きく、もはやパルス位置の推定は困難である。通常の逆フィルタリングは、最小二乗推定であるが、このように雑音には非常に弱い。

3.2 特異値分解・固有値分解によるパルス位置の推定 式(13)に基づいて推定したパルス $\hat{x}(n) = \hat{d}_{n-1}$ を図6に示す。S/Nは、(1) ∞ と(2)10 dBである。また、式(15)において、打ち切り次数 R の設定基準を $T_0 = 90\%$ と設定したところ、 $R=7$ となった(図6(3))。また、行列 Σ の固有値 $|\sigma_i|$ の分布を、縦軸を対数にとって図7に示す。

図6より、S/N劣化によってもほとんど結果が変わ



(a) 全極形伝達系の単一パルス応答 $h_0(n)$
 (b) 全極形伝達系のパワースペクトル
 (c) マルチパルス駆動系列 $x(n)$
 (d) 全極形伝達系を $x(n)$ で駆動したときの応答 $h(n)$

図3 実験に用いる全極形伝達系・駆動信号

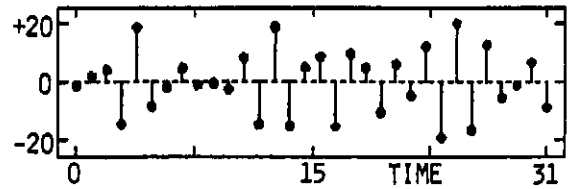


図4 通常の逆フィルタリング処理〔式(7)〕により推定した駆動パルス \hat{d} (S/N=10 dB)

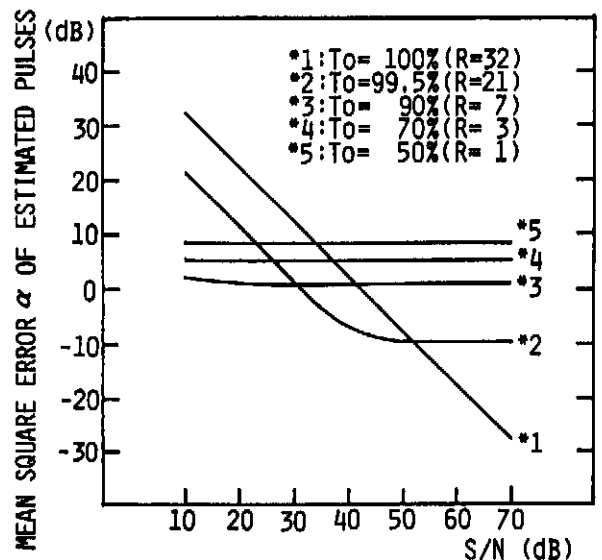
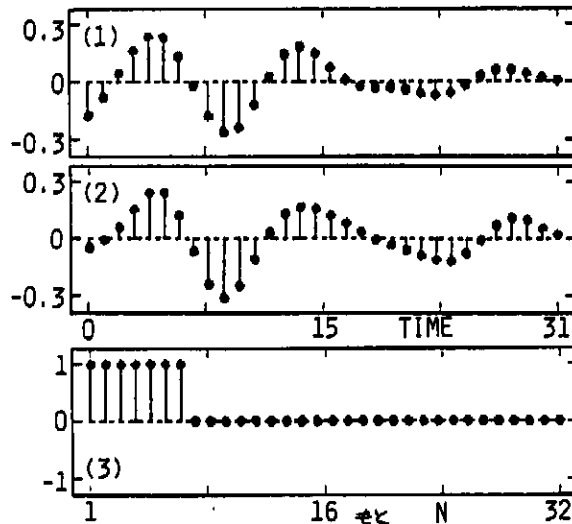


図5 逆フィルタリング処理〔式(7)、図中*1〕と、特異値分解・固有値展開に基づく方法〔式(13)、図中*2~*5〕により推定したパルスの推定精度とS/Nの関係

らず、図3(c)に示した真のパルス位置付近の振幅は大きく、雑音には確かに強いことがわかる。これは、図2において説明できるように、固有値展開または特異値分解による処理において、雑音成分の大部分のパワーを除去しているためである。しかし、真のパルス位置を中心に振幅の大きい裾野が広がっており、パルス位置を決定することがやや難しいことがわかる。

式(24)の評価式を用いて調べた S/N とパルスの推定精度、打ち切り次数 R の関係を図5(*2~*5)に示す。 T_0 が100%に近いときは、雑音に弱いのが、半面 S/N の良好な領域において裾野の影響が小さい。反対に T_0 が小さい場合、 S/N の変動に対して推定値が変化せず雑音に対して強いが、裾野の影響は大きくなっている。したがって、実際に適用する場合、もし S/N に関する情報が得られれば、それを用いて最適な T_0 を決定する必要がある。

3.3 Taper 窓を用いた場合のパルス位置の推定式(13)'にもとづいて推定したパルス $\hat{d}(n) = \hat{d}_{n-1}$ を図8に示す。さらに、式(24)を用いて調べた S/N とパ



(1) $S/N = \infty$, (2) $S/N = 10$ dB, (3) Δ_n の $\{\sigma_n\}$ の特性

図6 特異値分解・固有値展開に基づく方法〔式(13)〕により推定したパルス $\hat{d}(T_0=90\%)$

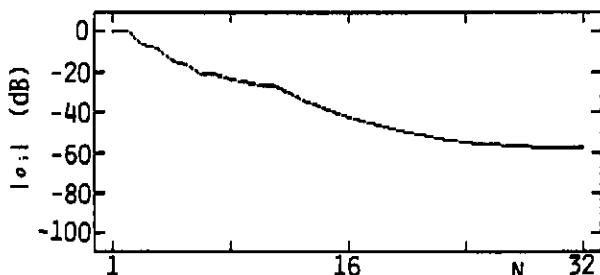
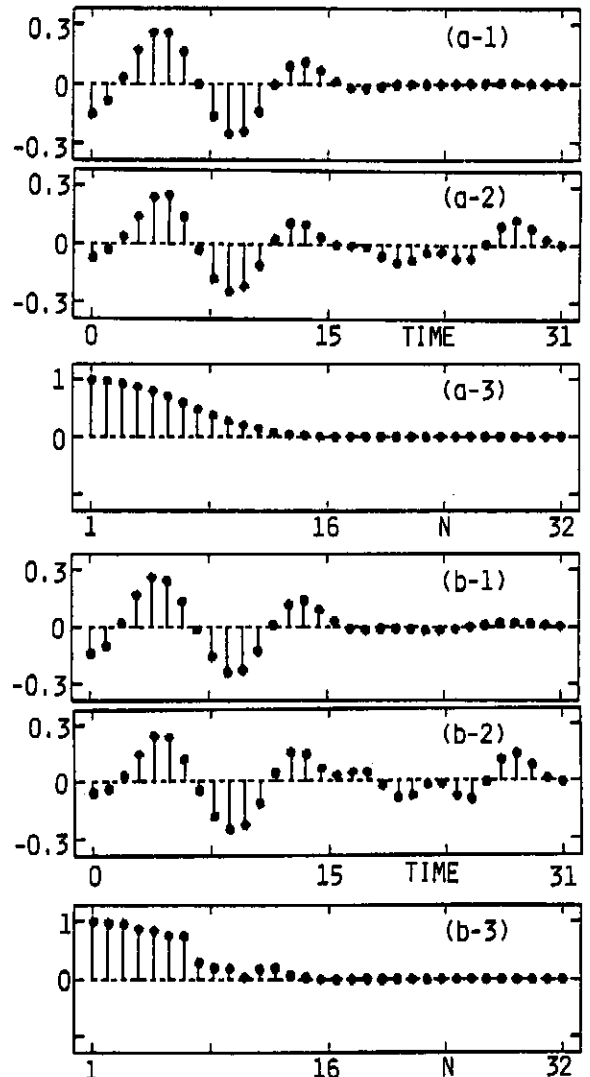


図7 行列 Σ の固有値 $|\sigma_i|$ の分布

ルスの推定精度・打ち切り次数 R の関係を図9に示す。Taper 窓を掛けることにより、裾野の部分が減少している。式(24)の評価によれば、(a), (b)両方の窓設計法ともに、 $T_0=90\%$ において、約3~5 dBの改善が得られた。したがって、特異値分解・固有値展開により発生する裾野を抑制する効果のあることが確かめられた。

4. 結 論

付加雑音がある場合に、マルチパルス系列によって駆動された全極モデルの応答系列から、駆動パルス系

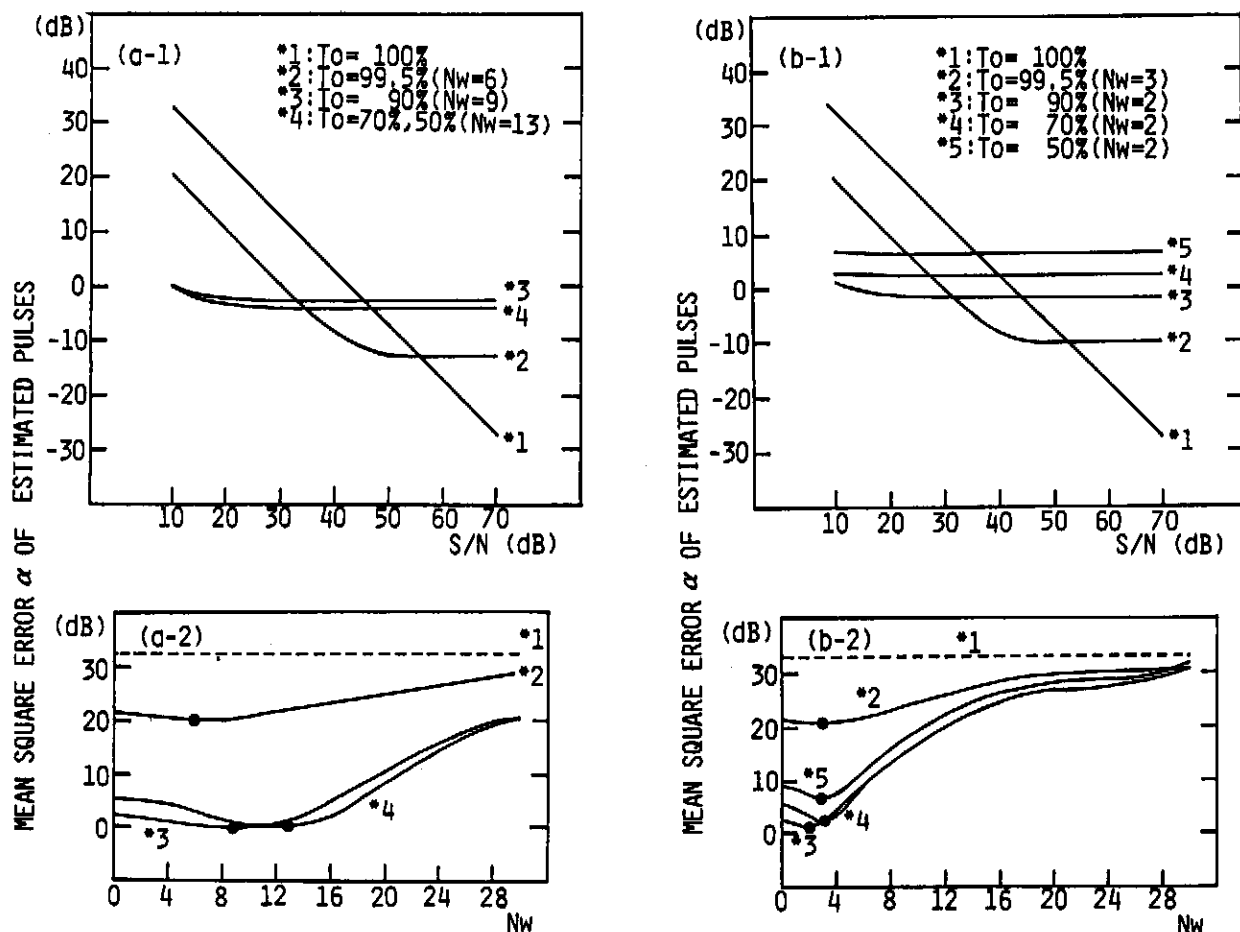


(a) 窓関数と Δ_n の対角成分の畳み込みによるフィルタ (窓幅 $N_w=9$)

(b) フィルタ係数の最小二乗設計法 (窓幅 $N_w=2$)

(1) $S/N = \infty$, (2) $S/N = 10$ dB, (3) Δ_n の $\{\sigma_n\}$ の特性

図8 Taper 窓を用いる方法〔式(13)′〕に基づいて推定したパルス $\hat{d}(T_0=90\%)$



- (1) Taper 窓を用いる方法〔式(13')〕に基づいて推定したパルスの推定精度と S/N の関係 (各々の T_0 に関して 10 dB における最適な窓幅を選択)
- (2) $S/N = 10$ dB における窓幅 N_w と推定精度の関係 (図左端 $N_w = 0$ のときは、いずれも tapering を施さない式(13)の推定値と同一、●印は同一 T_0 に関する最小点)
- (a) 窓関数と Δ_n の対角成分の畳み込みによるフィルタ
- (b) フィルタ係数の最小二乗設計法

図 9

列を推定するための信頼性の高い方法を提案した。最後に、計算機シミュレーションによって、この理論の有効性を確かめた。

従来、全極形伝達系の同定には線形予測分析が広く用いられてきた。しかし、機械系で発生される多くの振動のように駆動信号がマルチパルス状である場合、駆動信号がスペクトル零を有するために、系の応答にも零点が存在し、線形予測分析⁽⁵⁾を利用できない。さらに例え入力パルス数が二つであってもパルスの入力時間間隔に相当する数のスペクトル零が発生するために、従来の極零モデル分析⁽⁷⁾も利用できない。そこで著者らは駆動系列のパワーの最小化ではなく、駆動系列のパルス数を最小化するための手法を提案し⁽⁸⁾、さらに観測端に雑音を重ねる場合において全極形伝達

系とパルス駆動時刻を最尤推定するための定式化を行った⁽⁹⁾。しかし最尤推定は非線形最適化が必要であり、特にパルス位置に関するパラメータの初期値の設定が重要となる。本論文で提案した方法は、 S/N が悪い場合においてもパルス位置を精度高く推定できる非反復的な方法であり、今後、上記の最尤推定法と組合せ、実際の振動・音響信号の分析へ応用する予定である。

日頃からご討論いただく東北大学応用情報学研究センター・牧野正三助教授、安倍正人博士および、お世話になる東北大学情報処理教育センター・川添良幸助教授に感謝する。

文 献

- (1) Kanai, H., Abe, M. and Kido, K., Detection of Slight

- Defects in Ball Bearings by Non-Periodic Analysis, *J. Acoust. Soc. Jpn.*, (E)7-4, (1986), 219-228.
- (2) Kanai, H., Abe, M. and Kido, K., Estimation of the Surface Roughness on the Race or Balls of Ball Bearings by Vibration Analysis, *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress Reliab. Des.*, 109 (1987), 60-68.
- (3) Markel, J. D. and Gray, A. H. Jr., *Linear Prediction of Speech*, (1987), 18-59, Springer-Verlag.
- (4) Atal, B. S. and Remde, J. R., A New Model of LPC Excitation for Producing Natural Sounding Speech at Low Bit Rates, *Proc. of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, (1982-5), S 5. 10.
- (5) Lancaster, P. and Tismenetsky, M., *The Theory of Matrices*, (1985), 190, Academic Press.
- (6) Kanai, H., Abe, M. and Kido, K., Accurate Auto-Regressive Spectrum Estimation at Low Signal-to-Noise Ratio Using A Phase Matching Technique, *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, ASSP 35-9, (1987), 1264-1272.
- (7) Box, G. E. P. and Jenkins, G. M., *Time Series Analysis*, (1976), 208-284, Holden-Day.
- (8) 金井・安倍・牧野・城戸, マルチパルス駆動自己回帰過程からの全極形伝達関数と駆動パルス列の同時推定法, 日本音響学会誌, 44-7 (昭63), 503-509.
- (9) 金井・城戸, 付加雑音のある場合のマルチパルス駆動ARモデルの全極モデルと駆動パルス系列の同時最適化による推定, 電子情報通信学会技術研究報告, No. EA 87-34 (昭62-8).

討 論

〔質問〕 渡辺 嘉二郎〔法政大学工学部〕

全極形線形系において雑音で乱された出力より入力パルス系列の推定の一方法として、興味深く読まさせていただきました。次の諸点についてお教え願いたい。

(1) 特異値分解・固有値展開〔式(13), (14)〕によりパルス系列を推定するとき、固有値 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_N$ の大小と一般化されたフィルタの関係のより具体的な物理的意味はどのようなものか。

固有値の低次項を残すとどのような低域通過フィルタになるのか。

(2) この論文は信号の長さ N と、入力パルスの個数 N_p が異なってもよいことが前提になっているようである。式(5)の行列 H は $N > N_p$ の場合、下三角行列になるのか。他にも $N = N_p$ であれば理解しやすいが、 $N > N_p$ の場合、理解しにくい点がある。

〔回答〕 (1) 式(14)の正規直交行列 U^T の列ベクトル $\{u_i\}$ が N 点離散的フーリエ変換の正規直交基底ベクトルと等しい場合の意味を考える。固有値展開は、固有値の最大値から最小値へ Σ の対角成分を順に並べるように正規直交基底ベクトルを決める。したがって、スペクトル上パワーの最も大きい周波数成分を抽出するフーリエ変換の基底ベクトルが第1列ベクトル u_1 となり、パワーの最も小さい周波数成分に対応する基底ベクトルが第 N 列ベクトル u_N となる。そのスペクトル上で、パワーが小さく雑音の影響を受けやすい高次の周波数成分を切り捨て、低次のパワーの大きい成分、すなわち、元々のパワースペクトル上

での共振周波数付近の S/N の良好な周波数成分のみ取り出して、その逆特性を求める操作と等価となる。ここでは、フーリエ変換ではなく、固有値展開を用いて一般的な基底ベクトルを得ているが、固有振動の中心周波数付近は、フーリエ関数と類似した直交関数が得られる。

(2) $N > N_p$ が成立するのは、伝達系の出力である観測信号が N 点長得られ、その区間の中で、あらかじめ何らかの情報によってある時刻には駆動パルスが入力していなかったという制限が付けられる場合である。このとき H は、 $N \times N_p$ 行列となる。例えば、 $N = 5$ で時刻 $n = 0, 1, \dots, 4$ の区間の観測信号が得られており、そのうち、パルスが $n = 2$ と 4 には入力していなかったとわかっている場合、 $N_p = 3$ となって、 H は次の $N \times N_p$ 下三角行列（下台形行列）で記述できる。

$$H = \begin{bmatrix} h_0 & 0 & 0 \\ h_1 & h_0 & 0 \\ h_2 & h_1 & 0 \\ h_3 & h_2 & h_0 \\ h_4 & h_3 & h_1 \end{bmatrix}$$

しかし、一般にはパルスの入力時刻をあらかじめ制限することはできない場合が多く、 $N_p = N$ の場合が実際上重要となることと、 $N_p = N$ の場合には、 $H = H_N$ の固有値展開は、 $H = JU\Sigma U^T$ と簡潔に記述できることから、 $N_p = N$ の場合を中心に本論文では、式(11)以降を記述している。なお、処理自体は、 $N_p = N$, $N_p < N$ の場合とも同様に行うことができる。