2015 年 8 月実施
問題１　電磁気学
（１頁目／２頁中）

Fig.1(a)に示すように，半径 a の無限長円柱 1 と半径 b の無限長円柱 2 を真空中で間隔 d ($\gg b > a$)で平行に配置する．円柱 1 の中心軸上の一点を原点 O にとり，原点 O から円柱 2 の中心軸に垂直に向かう方向を x 軸，円柱 1 の中心軸に沿う方向を y 軸，x 軸と y 軸に垂直な方向を z 軸とする．円柱 2 の内部には，半径 c ($< b/2$)で中心を $(x, z) = (d-c, 0)$ とした無限に長い円柱状の空洞がある．x 軸上で原点 O から距離 x にある点を P とし，$0 < x < d$ の範囲で考えるものとする．また，円柱 1 と円柱 2 の内側および外側の空間の透磁率はいずれも μ_0 とする．

（１） Fig.1(a)に示すように，円柱 1，円柱 2（空洞以外）にそれぞれ直流電流 I_1，I_2 が y 軸の負および正の向きに一様に流れている場合を考える．アンペールの法則を用いて，直流電流 I_1，I_2 が点 P につくる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の大きさと向きをそれぞれ求めよ．また，それらを重ね合わせることによって得られる磁束密度 $\boldsymbol{B}$ について，距離 x に対する磁束密度 $\boldsymbol{B}$ の概形を図示せよ．

（２） Fig.1(b)に示すように，円柱 1，円柱 2（空洞以外）にそれぞれ直流電流 I_1，I_2 が y 軸の正の向きに一様に流れている場合を考える．また正方形コイルが $z = 0$ の x-y 平面上に置かれている．ただし，コイルの各辺は x 軸または y 軸に平行である．そのコイルの一辺の長さは s ($\ll d$)であり，コイル中心の x 軸方向の位置は $x = d/2$ である．このコイルに直流電流 I_c が流れている場合，直流電流 I_1，I_2 がつくる磁束密度によってコイルに働く力 $\boldsymbol{F}$ の大きさと向きをそれぞれ求めよ．

As shown in Fig.1(a), one infinitely long solid cylinder of radius a (cylinder 1) and another infinitely long solid cylinder of radius b (cylinder 2) are located in parallel, separated by a distance d ($\gg b > a$) in vacuum. The origin O is set at a point on the central axis of cylinder 1. The direction perpendicular to the central axis of cylinder 2 from the origin O is defined as the x axis and that along the central axis of cylinder 1 is defined as the y axis. Moreover, the direction perpendicular to the x and y axes is defined as the z axis. Cylinder 2 has an infinitely long cylindrical cavity with radius c ($< b/2$) and center $(x, z) = (d-c, 0)$. A point P is set on the x axis and the distance from the origin O is x. In this problem, only consider the segment $0 < x < d$. The permeability of the space both within and outside cylinder 1 and cylinder 2 is μ_0.

（１） As shown in Fig.1(a), the direct currents I_1 and I_2 flow uniformly in cylinder 1 and cylinder 2 (except the cavity region) toward the negative and positive y direction, respectively. Find the magnitude and direction of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ which is formed at the point P by the

2015 年 8 月実施
問題１　電磁気学
（２頁目／２頁中）

direct currents I_1 and I_2, respectively, using Ampere's law. Then, sketch the superimposed magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ as a function of the distance x.

（２） As shown in Fig.1(b), the direct currents I_1 and I_2 flow uniformly in cylinder 1 and cylinder 2 (except the cavity region) toward the positive y direction. A square coil is located in the x-y plane at $z = 0$. Here, each side of the coil is parallel to either the x or y axis. The one side length of the coil is s ($<< d$) and the center position of the coil in the x-axis direction is set at $x = d/2$. A direct current I_c flows in the coil. Find the magnitude and direction of the force $\boldsymbol{F}$ acting on the coil, which is formed by the magnetic flux density generated by the direct currents I_1 and I_2.

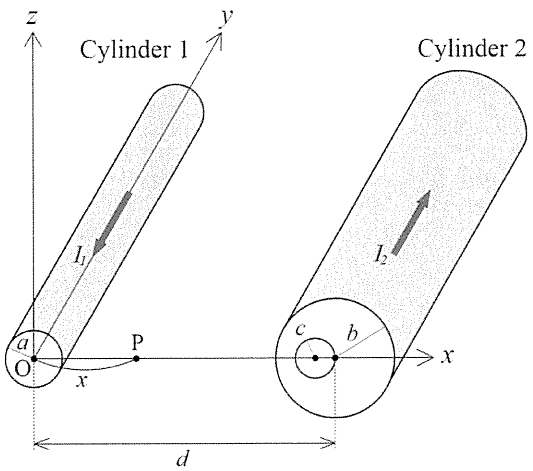

Fig. 1(a)

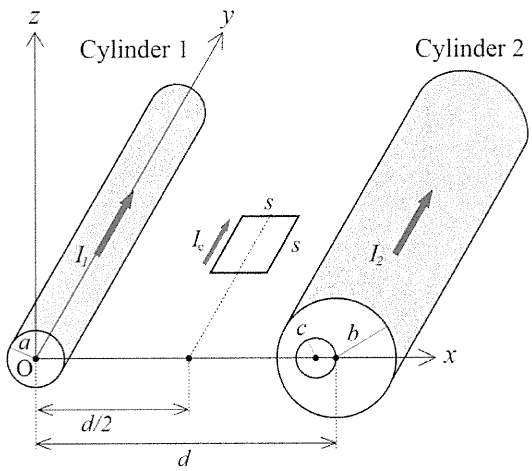

Fig. 1(b)

Question No. 2:　Electrical circuits（1/1）

2015 年 8 月実施
問題 2　電気回路
（1 頁目／1 頁中）

(1) Fig. 2 (a)の回路において，端子 A-B 間のインピーダンス Z を $R+jX$ の形で表せ．

(2) 長さℓの伝送線路の特性インピーダンスと伝搬定数がそれぞれ Z_0 と γ である．Fig. 2 (b)の T 形回路が伝送線路と等価になるように，Z_1 と Z_2 を Z_0，γ，ℓ を用いて表せ．

(3) 無損失線路の単位長あたりのインダクタンスと容量は，それぞれ L_0 と C_0 である．この無損失伝送線路は Fig. 2 (a)の回路で終端されている．反射波を生じないための Fig. 2 (a)の回路定数 R_1，L_1，C_1 を求めよ．

(1) In the circuit of Fig. 2 (a), express the impedance Z between the terminals A and B in the form $R + jX$.

(2) The characteristic impedance and propagation constant for a transmission line of length ℓ are Z_0 and γ, respectively. Express Z_1 and Z_2 using Z_0, γ, and ℓ to make the T-shape circuit of Fig. 2 (b) equivalent to the transmission line.

(3) The inductance and capacitance per unit length for a lossless transmission line are L_0 and C_0, respectively. This lossless transmission line is terminated with the circuit of Fig. 2 (a). Give the circuit parameters R_1, L_1, and C_1 in Fig. 2 (a) that do not produce a reflection wave.

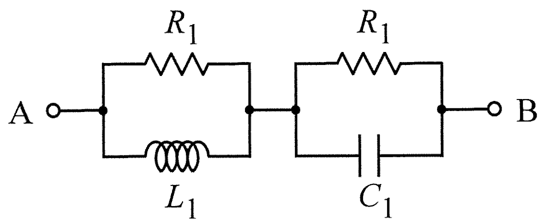

Fig. 2 (a)

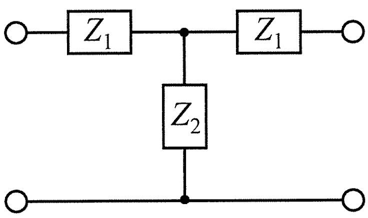

Fig. 2 (b)

2015年 8月実施
問題3 情報基礎1
(1頁目／1頁中)

$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \{0,1\}$ とし，$^{-}$ を否定演算とする．このとき n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ に関して，

$$f^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})}$$

で定義される f^* を論理関数 f の双対関数という．また，$f^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が成り立つときに f は自己双対であるといい，$f^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$ が成り立つときには，f は自己反双対であるという．双対関数に関して，以下の問に答えよ．

(1) $F(x,y)$ を $x = y$ のときに 0，$x \neq y$ のときに 1 となる 2 変数論理関数とする．このとき，$F(x,y)$ は自己反双対であることを示せ．

(2) 3 変数の論理関数 $M(x,y,z)$ は，x, y, z のうち，1 の個数が 2 以上のときに 1 となり，それ以外の場合には 0 とする．このとき，$M(x,y,z)$ は自己双対であることを示せ．

(3) 自己双対である 2 変数論理関数をすべて挙げよ．

(4) n 変数論理関数 f_1, f_2 が，自己反双対であるとき，$f_1 \bigoplus f_2$ は，自己反双対であることを示せ．ただし，$\bigoplus$ は排他的論理和演算を表す．

Consider $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \{0,1\}$, and let $^{-}$ denote the NOT operator. An n-variable logic function $f^*(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ is defined as a dual function of f, if

$$f^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n})}.$$

In addition, f is called self-dual if $f^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, and f is called self-anti-dual if $f^*(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \overline{f(x_1, x_2, \cdots, x_n)}$. Regarding to dual functions, answer the following questions.

(1) We define a 2-variable logic function $F(x,y)$ such that $F(x,y) = 1$ if $x \neq y$, and $F(x,y) = 0$ if $x = y$. Show that $F(x,y)$ is self-anti-dual.

(2) We define a 3-variable logic function $M(x,y,z)$ such that $M(x,y,z) = 1$ if the number of 1s among x, y and z is two or more, and $M(x,y,z) = 0$ otherwise. Show that $M(x,y,z)$ is self-dual.

(3) Enumerate all 2-variable self-dual logic functions.

(4) Show that $f_1 \bigoplus f_2$ is a self-anti-dual function if the n-variable logic functions f_1 and f_2 are self-anti-dual, where $\bigoplus$ denotes the Exclusive-OR operator.

2015 年 8 月実施
問題 4　情報基礎 2
（1 頁目／2 頁中）

下記の条件を満たす２分木を，２分探索木と呼ぶ.

（条件）各節点uに対し，uの要素をxとするとき，uの左部分木内の要素はすべてxより小さく，uの右部分木内の要素はすべてxより大きい.

各節点の要素xは重複しない整数であるとし，以下の問に答えよ.

(1) Fig. 4 は空の２分探索木に 10, 12, 11, 5, 8, 6, 2, 15 を順に挿入して得られた２分探索木Tを表している．要素(a), (b), (c), (d)の値を示せ.

(2) Fig. 4 のTから要素 10 を持つ節点を削除し，得られる２分探索木を示せ. なお, 要素(a), (b), (c), (d)について，問(1)で示した具体的な値を用いてよい.

(3) ある２分探索木から節点pを削除するアルゴリズムを与えよ.

(4) ある２分探索木のすべての要素を昇順に列挙する効率のよいアルゴリズムを示せ.

A binary tree that satisfies the following condition is called a binary search tree.

(Condition) For each node u, let x be the element of u, each element stored in the left sub-tree of u is smaller than x, and each element stored in the right sub-tree of u is greater than x.

Assume that the element x of each node is a unique integer. Answer the following questions.

(1) Fig. 4 shows a binary search tree T obtained by inserting integers 10, 12, 11, 5, 8, 6, 2, 15 to an empty binary search tree in this order. Show the values of elements (a), (b), (c) and (d).

(2) Delete the node which stores the element 10 from T in Fig. 4, and show the obtained binary search tree. For the elements (a), (b), (c) and (d), you can use the concrete values you give in question (1).

(3) Give an algorithm to delete a node p from a binary search tree.

(4) Describe an efficient algorithm to enumerate all elements of a binary search tree in ascending order.

2015 年 8 月実施
問題 4　情報基礎 2
（2 頁目／2 頁中）

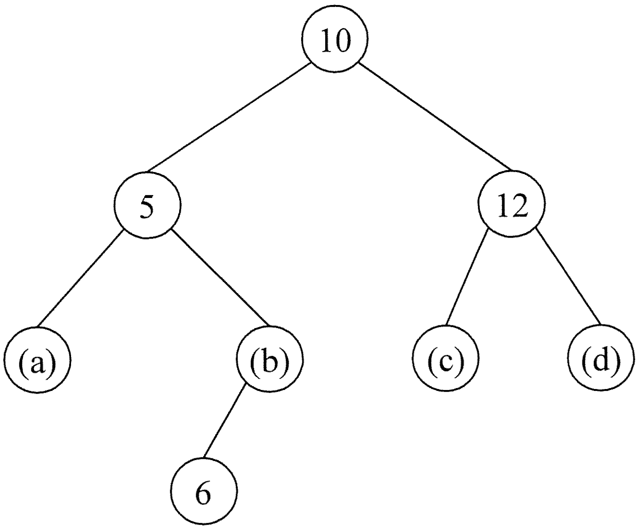

Fig. 4

Question No. 5:　Basic physics 1 (1/3)

2015 年８月実施
問題５　物理基礎１
（１頁目／３頁中）

中心力ポテンシャル $V(|\boldsymbol{r}|)$ 中の質点の運動においてエネルギー $E=\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(|\boldsymbol{r}|)$ や角運動量 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ は運動の定数となる．すなわち，それらの値は運動の間一定である．ここで，m，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$\boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z)$ は，それぞれ質点の質量，x–y–z 直交座標系の原点から測った位置ベクトル，運動量である．$|\boldsymbol{r}|$ は $\boldsymbol{r}$ の長さである．以下の問に答えよ．

(1) $V(|\boldsymbol{r}|)=\begin{cases} 0 & |\boldsymbol{r}|>a \\ -U & |\boldsymbol{r}|\le a \end{cases}$ $(U>0, a>0)$ で定義されたポテンシャル中での初期条件

$\boldsymbol{r}=(0,-b,d)$，$\boldsymbol{p}=(0,p_o,0)$ に対する運動を考える．ここで，$b>a>d>0$ であり，$p_o>0$ である．Fig. 5(a)の点線はこの運動の軌道の概略図である．

(a) 質点のエネルギー E と角運動量 $\boldsymbol{l}$ を求めよ．

(b) Fig. 5(a)中の角度 α と β を求めよ．

(2) $V(|\boldsymbol{r}|)=\dfrac{\delta}{|\boldsymbol{r}|}$ $(\delta>0)$ で定義されたポテンシャル中での初期条件 $\boldsymbol{r}=(0,-c,d)$，

$\boldsymbol{p}=(0,p_o,0)$ に対する運動を考える．ここで，$p_o>0$ であり，c は，$\boldsymbol{r}=(0,-c,d)$ で $V(|\boldsymbol{r}|)\Big/\left(\dfrac{p_o{}^2}{2m}\right)=0$ と仮定をすることができる程十分に大きい正の数である．

Fig. 5(b)の点線と一点鎖線は，それぞれこの運動の、軌道と軌道の漸近線の概略図である．

(a) Fig. 5(b)中の力の中心と軌道の間の最近接距離 $r_{\min}$ を求めよ．

(b) $\dfrac{\boldsymbol{p}}{m}\times\boldsymbol{l}+\delta\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ が運動の定数であることを示せ．

(c) Fig. 5(b)中の散乱角 θ を求めよ．

2015 年８月実施
問題５　物理基礎１
（２頁目／３頁中）

In the motion of a particle in a central force potential $V(|\boldsymbol{r}|)$, the energy $E=\dfrac{\boldsymbol{p}^2}{2m}+V(|\boldsymbol{r}|)$ and the angular momentum $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ become constants of motion, i.e., their values remain constant during motion. Here, m, $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$, and $\boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z)$ are the mass, position vector measured from the origin of the x–y–z Cartesian coordinate system, and momentum of the particle, respectively. $|\boldsymbol{r}|$ is the length of $\boldsymbol{r}$. Answer the following questions.

(1) Consider the motion of the particle in the potential defined by $V(|\boldsymbol{r}|)=\begin{cases} 0 & |\boldsymbol{r}|>a \\ -U & |\boldsymbol{r}|\le a \end{cases}$ $(U>0, a>0)$ for an initial condition $\boldsymbol{r}=(0,-b,d)$ and $\boldsymbol{p}=(0,p_o,0)$. Here, $b>a>d>0$ and $p_o>0$. The dotted line in Fig. 5(a) is a schematic of the trajectory of the motion.

(a) Obtain the energy E and the angular momentum $\boldsymbol{l}$ of the particle.

(b) Obtain the angles α and β in Fig. 5(a).

(b) Consider the motion of the particle in the potential defined by $V(|\boldsymbol{r}|)=\dfrac{\delta}{|\boldsymbol{r}|}$ $(\delta>0)$ for an initial condition $\boldsymbol{r}=(0,-c,d)$ and $\boldsymbol{p}=(0,p_o,0)$. Here, $p_o>0$ and c is a sufficiently large and positive number that we can assume $V(|\boldsymbol{r}|)\Big/\left(\dfrac{p_o^2}{2m}\right)=0$ at $\boldsymbol{r}=(0,-c,d)$. The dotted curve and dash–dot lines in Fig. 5(b) are schematics of the trajectory of the motion and the asymptotes of the trajectory, respectively.

(a) Obtain the closest distance $r_{\min}$ between the center of the force and the trajectory in Fig. 5(b).

(b) Show that the vector $\dfrac{\boldsymbol{p}}{m}\times\boldsymbol{l}+\delta\dfrac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ is a constant of motion.

(c) Obtain the scattering angle θ in Fig. 5(b).

2015 年８月実施
問題５　物理基礎１
（３頁目／３頁中）

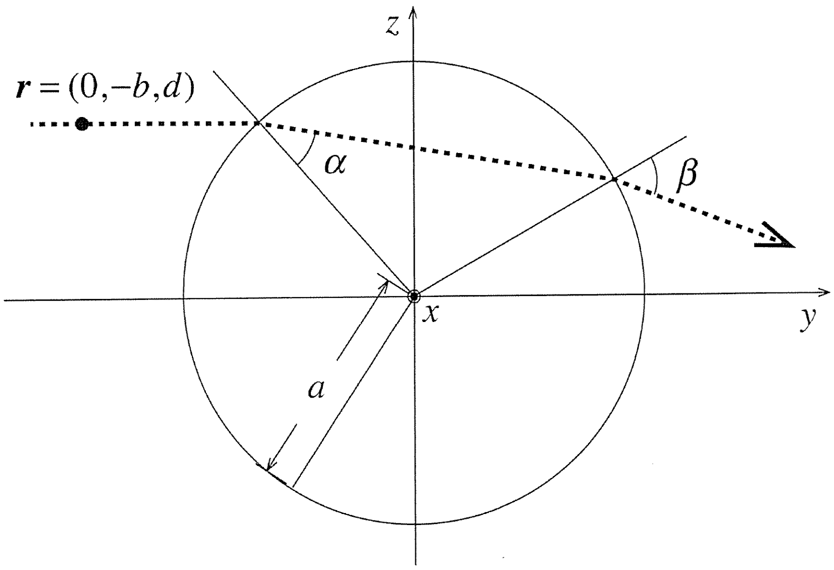

Fig. 5(a)

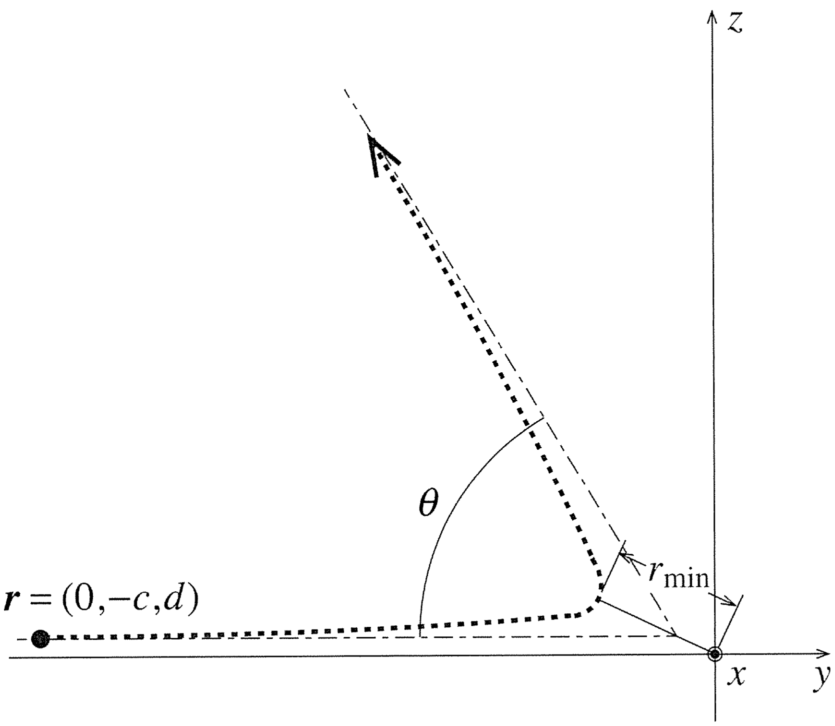

Fig. 5(b)

Question No. 6: Basic physics 2 (1/2)

2015 年 8 月実施
問題 6 物理基礎 2
(１頁目／２頁中)

パウリ行列 $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ に関して,以下の問に答えよ. i は虚数単位である.

(1) σ_x の固有値と対応する固有ベクトルを全て求めよ.

(2) $\sigma_j \sigma_k = -\sigma_k \sigma_j$ $(j, k = x, y, z, j \neq k)$を示せ.

(3) $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})^2 = I$ を示せ. 但し, I は単位行列であり, $\vec{\sigma} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z)$は$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$を成分とするベクトルであり, $\vec{n} = (n_x \quad n_y \quad n_z)$は実数 n_x, n_y, n_z を成分とする単位ベクトルであり, $\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$である.

(4) 次の関係式を証明せよ:

$$\exp\left(-i\frac{\vec{n}\cdot\vec{\sigma}}{2}\theta\right) = I\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

ここで, θ は任意の実数である. 但し, 行列の指数関数は次のように定義される:

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}X^n .$$

ここで, X は任意の正方行列であり, X^0 は単位行列 I を表すものとする.

(5) $(U_1)^{-1}(\vec{n}_1\cdot\vec{\sigma})U_1$ と $(U_2)^{-1}(\vec{n}_1\cdot\vec{\sigma})U_2$ をパウリ行列の線形結合で表せ. ここで,

$U_l = \exp\left(-i\frac{\vec{n}_l\cdot\vec{\sigma}}{2}\theta\right)$ $(l = 1, 2)$, $\vec{n}_1 = (0 \quad 0 \quad 1)$, $\vec{n}_2 = (1 \quad 0 \quad 0)$ である. 但し, $(U_l)^{-1}$ は U_l の逆行列である.

2015 年 8 月実施
問題 6　物理基礎 2

Answer the following questions on the Pauli matrices $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, and $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Here i denotes the imaginary unit.

(1) Find all the eigenvalues and the corresponding eigenvectors of the matrix σ_x.

(2) Show $\sigma_j \sigma_k = -\sigma_k \sigma_j$ $(j, k = x, y, z, j \neq k)$.

(3) Show $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = I$. Here I is the identity matrix, $\vec{\sigma} = (\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z)$ is the vector whose components are $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, $\vec{n} = (n_x \quad n_y \quad n_z)$ is the unit (identity) vector whose components, n_x, n_y, n_z, are real, and $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z$.

(4) Prove the following relation:

$$\exp\left(-i \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2} \theta \right) = I \cos\left(\frac{\theta}{2} \right) - i(\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \sin\left(\frac{\theta}{2} \right),$$

where θ is an arbitrary real number. Here the exponential function of the matrix is defined as follows:

$$\exp(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n ,$$

where X is an arbitrary square matrix and X^0 denotes the identity matrix I.

(5) Express $(U_1)^{-1}(\vec{n}_1 \cdot \vec{\sigma})U_1$ and $(U_2)^{-1}(\vec{n}_1 \cdot \vec{\sigma})U_2$ as a linear combination of the Pauli matrices, where $U_l = \exp\left(-i \frac{\vec{n}_l \cdot \vec{\sigma}}{2} \theta \right)$ $(l = 1, 2)$, $\vec{n}_1 = (0 \quad 0 \quad 1)$, and $\vec{n}_2 = (1 \quad 0 \quad 0)$. Here $(U_l)^{-1}$ is the inverse matrix of U_l.