

2019 年 3 月実施
問題 1 電気工学
(1 頁目/3 頁中)

- (1) Fig. 1(a)のような制御系を考える. 同図において, $r(t)$, $e(t)$, $y(t)$ はそれぞれ目標値, 偏差, 制御量を表す. 次の問に答えよ. ただし, K は定数 ($K > 0$) である.
- (a) 目標値 $r(t)$ から制御量 $y(t)$ への伝達関数 $G(s)$ を考える. $G(s)$ を求めよ.
 - (b) 開ループ伝達関数 $G_o(s)$ を求めよ.
 - (c) 問(1)(b)を用いて, 位相交差角周波数 ω_{cp} を求めよ.
 - (d) 問(1)(b)と問(1)(c)を用いて, $-\infty < \omega < \infty$ の範囲でナイキスト線図の概略図を描け.
 - (e) 問(1)(d)の結果を用いて制御系が安定である K の値の範囲を求めよ.
 - (f) ラウス・フルビッツの安定判別法を用いて問(1)(e)で求めた K の値の範囲を確かめよ.
- (2) Fig. 1(b)のような制御系を考える. 同図において, $r(t)$, $e(t)$, $y(t)$ はそれぞれ目標値, 偏差, 制御量を表す. 次の問に答えよ. ただし, K は定数 ($K > 0$) である.
- (a) ナイキスト線図を示せ. ただし, $-\infty < \omega < \infty$, $K=0.5$ とする. また, この制御系が安定であるかどうかを説明せよ.
 - (b) 制御系が安定である K の範囲をナイキストの安定判別法で求めよ.

2019 年 3 月実施
問題 1 電気工学
(2 頁目/3 頁中)

- (1) Consider the control system shown in Fig. 1(a), where $r(t)$, $e(t)$, and $y(t)$ denote the reference input, error, and controlled variable, respectively. Answer the following questions. Here, K is a constant ($K > 0$).
- (a) Consider the transfer function $G(s)$ from the reference input $r(t)$ to the controlled variable $y(t)$. Find the transfer function $G(s)$.
 - (b) Derive the open-loop transfer function $G_o(s)$.
 - (c) Find the phase crossover frequency ω_{cp} using question (1)(b).
 - (d) Illustrate the Nyquist diagram in the range of $-\infty < \omega < \infty$ using questions (1)(b) and (1)(c).
 - (e) Find the range of K so that the control system is stable using question (1)(d).
 - (f) Confirm the range of K derived in question (1)(e) using the Routh–Hurwitz stability criterion.
- (2) Consider the control system shown in Fig. 1(b), where $r(t)$, $e(t)$, and $y(t)$ denote the reference input, error, and controlled variable, respectively. Answer the following questions. Here, K is a constant ($K > 0$).
- (a) Illustrate the Nyquist diagram. Let $-\infty < \omega < \infty$, and $K = 0.5$. Explain whether this control system is stable or not.
 - (b) Find the range of K so that the control system is stable using the Nyquist stability criterion.

2019 年 3 月実施
問題 1 電気工学
(3 頁目／3 頁中)

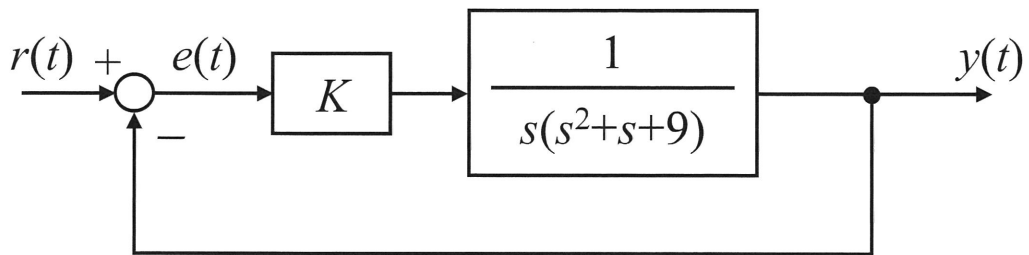


Fig. 1(a)

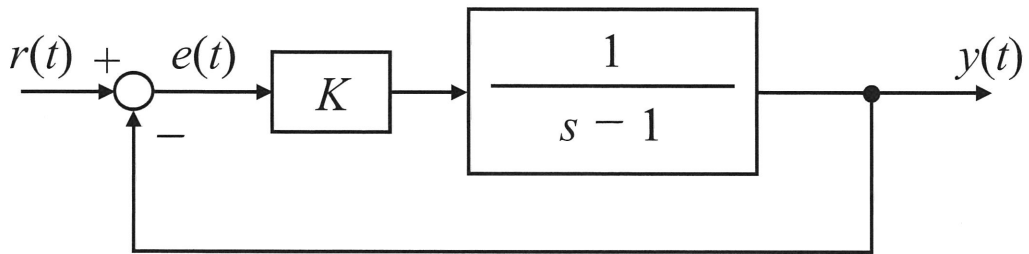


Fig. 1(b)

2019 年 3 月実施
問題 2 通信工学
(1 頁目 / 2 頁中)

変調信号を $s(t)$ とし, 搬送波 $A_c \cos(2\pi f_c t)$ により生成される角度変調波

$$g(t) = A_c \cos\{\theta(t)\}$$

を考える. ただし, $s(t)$ の最大周波数を f_s とすると $0 < f_s < f_c$ であり, $|s(t)| \leq 1$ であるものとする. 以下の問に答えよ.

- (1) 搬送波を位相変調する. ただし, 最大位相偏移を $\Delta\theta$ とする ($0 < \Delta\theta \ll 1$).
 - (a) 位相変調波 $g_{PM}(t)$ の式を書け.
 - (b) $s(t) = \sin(2\pi f_s t)$ とする. $g_{PM}(t)$ をフーリエ変換し, その振幅スペクトルを図示せよ.
- (2) 搬送波を周波数変調する. ただし, 最大周波数偏移を Δf とする ($0 < \Delta f \ll f_c$).
 - (a) 瞬時周波数 $f_i(t)$ を求め, 周波数変調波 $g_{FM}(t)$ を導け.
 - (b) $g_{FM}(t)$ の式を用い, 微分を用いた周波数変調波の復調原理を説明せよ.

2019 年 3 月実施
問題 2 通信工学
(2 頁目 / 2 頁中)

Consider an angle modulation wave

$$g(t) = A_c \cos\{\theta(t)\},$$

generated by a modulation signal $s(t)$ and a carrier wave $A_c \cos(2\pi f_c t)$, where $|s(t)| \leq 1$. The maximum frequency f_s of $s(t)$ satisfies $0 < f_s < f_c$. Answer the following questions.

- (1) The carrier wave is phase-modulated, where the maximum phase deviation is $\Delta\theta$ ($0 < \Delta\theta \ll 1$).
 - (a) Find the phase-modulated waveform $g_{PM}(t)$.
 - (b) Let $s(t) = \sin(2\pi f_s t)$. Find the Fourier transform of $g_{PM}(t)$ and sketch its amplitude spectrum.
- (2) The carrier wave is frequency-modulated, where the maximum frequency deviation is Δf ($0 < \Delta f \ll f_c$).
 - (a) Find the instantaneous frequency $f_i(t)$ and derive the frequency-modulated waveform $g_{FM}(t)$.
 - (b) Explain the principle of demodulating the frequency-modulated waveform by differentiation using the expression for $g_{FM}(t)$.

2019 年 3 月実施
問題 3 電子工学
(1 頁目/3 頁中)

Fig. 3(a)に示される n チャネル MOS 電界効果トランジスタを用いた RC 結合増幅回路について、以下の問に答えよ。ここで、電圧 v_i および v_o は、それぞれ入力および出力端子の微小信号交流電圧であり、出力端子は開放である。Fig. 3(b), Fig. 3(c)は、それぞれ低周波数帯から中間周波数帯、および高周波数帯におけるトランジスタの微小信号等価回路である。ここで、 g_m , r_D , v_{GS} は、それぞれトランジスタの相互コンダクタンス、ドレーン抵抗、ゲート・ソース間電圧である。 C_{GS} , C_{GD} , C_{DS} は、それぞれトランジスタのゲート・ソース間容量、ゲート・ドレーン間容量、ドレーン・ソース間容量である。

- (1) 中間周波数帯では、バイパスコンデンサ C_S のリアクタンスは無視できるほど小さい ($\frac{1}{\omega C_S} \approx 0$)。このときの電圧利得 $K_0 (= v_o/v_i)$ を求めよ。ただし、トランジスタの微小信号等価回路として Fig. 3(b)を用いること。
- (2) 低周波帯では、バイパスコンデンサ C_S の影響を考慮する必要がある。このときの電圧利得 $K_L (= v_o/v_i)$ は式(3A)のように表される。式(3A)における角周波数 ω_1 と ω_2 を求めよ。ここで、 K_0 は中間周波数帯の電圧利得である。ただし、トランジスタの微小信号等価回路として Fig. 3(b)を用いること。また、 $r_D/R_L \gg 1$ かつ $g_m r_D \gg 1$ とする。

$$K_L = K_0 \cdot \frac{1 - j \frac{\omega_2}{\omega}}{1 - j \frac{\omega_1}{\omega}} \quad (3A)$$

- (3) 高周波数帯の電圧利得 $K_H (= v_o/v_i)$ は式(3B)のように表される。式(3B)における角周波数 ω_3 を求めよ。ここで、 K_0 は中間周波数帯の電圧利得である。ただし、トランジスタの微小信号等価回路として Fig. 3(c)を用いること。また、 C_{GD} のリアクタンスが R_L に比べ十分大きいとして、 C_{GD} を通って入力側から出力側に流れる電流の影響は無視してよい。

$$K_H = K_0 \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_3}} \quad (3B)$$

- (4) Fig. 3(a)に示される RC 結合増幅回路に対する電圧利得の振幅の周波数特性の概形を描け。

2019 年 3 月実施
問題 3 電子工学
(2 頁目/3 頁中)

Answer the following questions on an RC-coupled amplifier circuit using an n-channel MOS field-effect transistor as shown in Fig. 3(a). Here, the voltages v_i and v_o are the small-signal alternating voltages at the input and output terminals, respectively, and the output terminals are open. Figs. 3(b) and 3(c) are the small-signal equivalent circuits of the transistor in the low and middle frequency ranges and the high frequency range, respectively. Here, g_m , r_D , and v_{GS} are the transconductance, the drain resistance, and the gate-to-source voltage of the transistor, respectively. C_{GS} , C_{GD} , and C_{DS} are the gate-to-source capacitance, the gate-to-drain capacitance, and the drain-to-source capacitance of the transistor, respectively.

- (1) In the middle frequency range, the reactance of the bypass capacitor C_S is small enough to be ignored ($\frac{1}{\omega C_S} \approx 0$). Derive the voltage gain $K_0 (= v_o/v_i)$. Here, use the small-signal equivalent circuit of transistor shown in Fig. 3(b).
- (2) In the low frequency range, it is necessary to consider the effect of the bypass capacitor C_S . The voltage gain $K_L (= v_o/v_i)$ is expressed as Eq. (3A). Derive the angular frequencies ω_1 and ω_2 in Eq. (3A). Here, K_0 is the voltage gain in the middle frequency range. Use the small-signal equivalent circuit of transistor shown in Fig. 3(b). Assume that $r_D/R_L \gg 1$ and $g_m r_D \gg 1$.

$$K_L = K_0 \cdot \frac{1 - j \frac{\omega_2}{\omega}}{1 - j \frac{\omega_1}{\omega}}. \quad (3A)$$

- (3) In the high frequency range, the voltage gain $K_H (= v_o/v_i)$ is expressed as Eq. (3B). Derive the angular frequency ω_3 in Eq. (3B). Here, K_0 is the voltage gain in the middle frequency range. Use the small-signal equivalent circuit of transistor shown in Fig. 3(c). Ignore the effect of the current from the input port to the output port through C_{GD} , because the reactance of C_{GD} is large enough compared to R_L .

$$K_H = K_0 \cdot \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_3}}. \quad (3B)$$

- (4) Sketch the frequency characteristic of the amplitude of the voltage gain for the RC-coupled amplifier circuit shown in Fig. 3(a).

2019 年 3 月実施
問題 3 電子工学
(3 頁目 / 3 頁中)

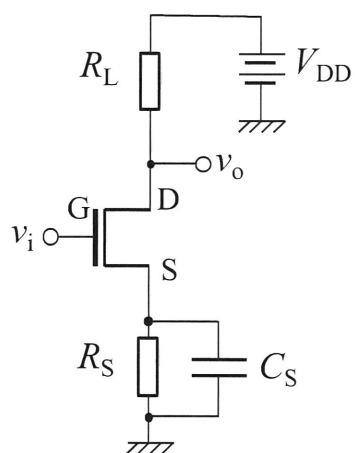


Fig. 3(a)

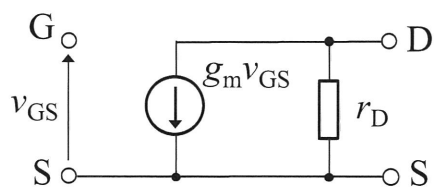


Fig. 3(b)

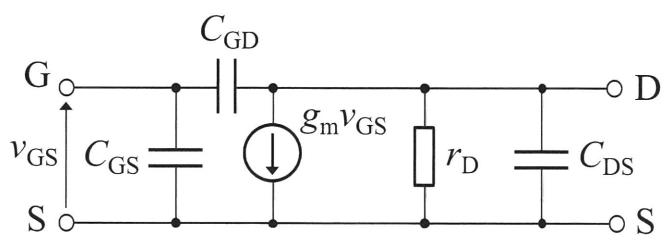


Fig. 3(c)

2019 年 3 月実施
問題 4 計算機 1
(1 頁目/2 頁中)

Fig. 4 (a) に示す順序回路形乗算回路について考える. この回路は 1 個の全加算器 (full adder; 実線四角) と 4 個の回路ブロック B_1, B_2, B_3, B_4 (破線四角) で構成され, 2 つの入力 X と Y の乗算結果 Z が出力される. この乗算において桁上げ数の系列 C が生じ, X, Y, Z, C はそれぞれ 3 ビット, 2 ビット, 5 ビット, 3 ビットの 2 進非負整数であり, $X = (x_2 x_1 x_0)_2, Y = (y_1 y_0)_2, Z = (z_4 z_3 z_2 z_1 z_0)_2, C = (c_2 c_1 c_0)_2$ とする. Fig. 4 (b) は, クロック (clock) に同期して, 各時刻 $t = 0, 1, 2, \dots$ に入出力される 1 ビット信号 p, q, u, v, s を示す. 以下の問に答えよ. ただし, 論理積 (AND), 論理和 (OR), 論理否定 (NOT) の各演算子にはそれぞれ $\cdot, +, \neg$ の記号を用いるものとする.

- (1) (a) この全加算器の 3 つの入力 (i_1, i_2, i_3) と 2 つの出力 (s, u) について, 真理値表 (組合せ表) を示せ.
- (b) 2 つの出力 (s, u) の最簡積和形論理式をそれぞれ示せ.
- (c) この全加算器に対応する回路図を NAND ゲートのみを用いて示せ. なお, 3 つ以上の入力端子を有する NAND ゲートを使用してよいものとする.
- (2) Z の各ビット z_0, z_1, z_2, z_3, z_4 の論理式を, $x_0, x_1, x_2, y_0, y_1, c_0, c_1, c_2$ を用いて表せ.
- (3) Fig. 4 (a) の 4 個の回路ブロック B_1, B_2, B_3, B_4 のそれぞれに当てはまる適切な名称を以下の中から選べ.
{ AND ゲート, OR ゲート, NOT ゲート, NAND ゲート, NOR ゲート, D フリップフロップ, シフトレジスタ, マルチプレクサ }

Consider a sequential multiplying circuit shown in Fig. 4 (a). The circuit is composed of a full adder (the solid line square) and four circuit blocks B_1, B_2, B_3 , and B_4 (the broken line squares), and outputs a multiplication result Z for two inputs X and Y . Suppose that a carry value sequence C is generated in the multiplication. Let X, Y, Z , and C be non-negative binary integers respectively of 3 bits, 2 bits, 5 bits, and 3 bits, where $X = (x_2 x_1 x_0)_2, Y = (y_1 y_0)_2, Z = (z_4 z_3 z_2 z_1 z_0)_2$, and $C = (c_2 c_1 c_0)_2$. Fig. 4 (b) shows 1-bit signals p, q, u, v , and s which are input and output at each time $t = 0, 1, 2, \dots$ in synchronization with a clock. Answer the following questions. Here, operators for the logical conjunction (AND), disjunction (OR), and negation (NOT) should be shown by $\cdot, +$, and $\neg$, respectively.

2019 年 3 月実施
問題 4 計算機 1
(2 頁目 / 2 頁中)

- (1) (a) Show the truth table (combinational table) for the three inputs (i_1 , i_2 , and i_3) and two outputs (s and u) of the full adder.
- (b) Show a logical formula for each of the two outputs (s and u) in the minimum sum-of-products form.
- (c) Draw a circuit diagram for the full adder by using only NAND gates. Here, NAND gates may have three or more inputs.
- (2) Show a logical formula for each of the bits z_0 , z_1 , z_2 , z_3 , and z_4 of Z by using x_0 , x_1 , x_2 , y_0 , y_1 , c_0 , c_1 , and c_2 .
- (3) Choose an appropriate name from the following for each of the four circuit blocks B_1 , B_2 , B_3 , and B_4 in Fig. 4 (a):
{ AND gate, OR gate, NOT gate, NAND gate, NOR gate, D flip-flop, Shift register, Multiplexer }

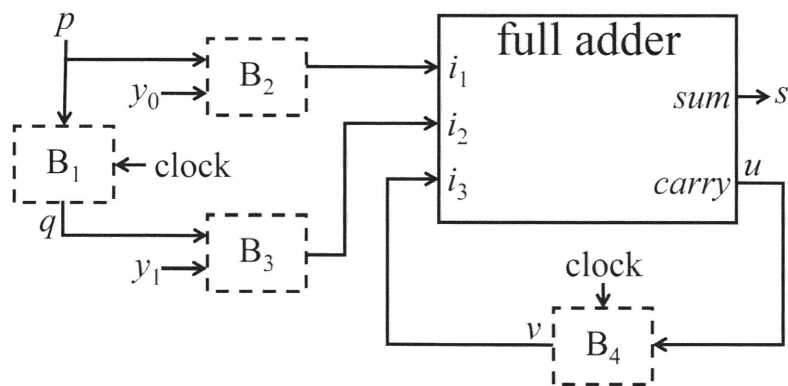


Fig. 4 (a)

t	p	q	u	v	s
0	0	0	0	0	0
1	x_0	0	0	0	z_0
2	x_1	x_0	c_0	0	z_1
3	x_2	x_1	c_1	c_0	z_2
4	0	x_2	c_2	c_1	z_3
5	0	0	0	c_2	z_4

Fig. 4 (b)

2019 年 3 月実施 問題5 計算機2 (1 頁目 / 3 頁中)

$\mathbb{Z}$ を整数の集合とする. 終端記号の集合を $\Sigma = \mathbb{Z} \cup \{+, *, (,)\}$, 非終端記号の集合を $\{A, M, P\}$, 開始記号を A , 生成規則を以下とする文法 G を考える.

$$A \rightarrow M, \quad A \rightarrow A + M, \quad M \rightarrow P, \quad M \rightarrow M * P, \quad P \rightarrow n, \quad P \rightarrow (A)$$

ここで $n \in \mathbb{Z}$ である. $\mathcal{L}(G)$ を G が生成する言語とする. $\mathcal{L}(G)$ を整数の加算と乗算の式の集合とみなす. すなわち, $+$ と $*$ は加算および乗算をそれぞれ表し, 各式の構文木は計算の順序を表す.

G で書かれた式を入力するとその値を計算するプログラムを, 以下の手続き型言語で書きたい.

$$I ::= \text{PUSH}_\alpha \mid \text{POP} \mid \text{SWAP}_i \mid \text{IF}[X \cdots X][I] \mid \text{INPUT} \mid \text{ADD} \mid \text{MUL} \mid \text{LOOP} \mid I; I$$

ここで, α は記号, X は記号の集合, i は正の整数である. 単一集合 $\{\alpha\}$ を $\underline{\alpha}$ と書く. この言語のインタプリタはスタックを 1 つ持つ. スタックは最初は 1 つの記号 $\$$ だけからなる. インタプリタには Σ の記号の有限列が入力として与えられる. プログラムが終了したとき, スタックが空でなければ, インタプリタはスタックの先頭の記号を出力する. 各構文の意味は図 5 の通りである. 例えば, プログラム

$$\text{INPUT}; \text{IF}[\Sigma][\text{ADD}; \text{LOOP}]; \text{IF}[\underline{\$} \underline{\mathbb{Z}} \underline{\$}][\text{SWAP}_2]$$

は, 入力が整数だけからなるとき入力の和を, そうでないとき $\$$ を出力する. このプログラムに入力 234 を与えて実行したとき, スタックは以下のように変化し,

$$\$ \xrightarrow{\text{INPUT}} \$2 \xrightarrow{\text{ADD}} \$2 \xrightarrow{\text{INPUT}} \$23 \xrightarrow{\text{ADD}} \$5 \xrightarrow{\text{INPUT}} \$54 \xrightarrow{\text{ADD}} \$9 \xrightarrow{\text{INPUT}} \$9\$ \xrightarrow{\text{SWAP}_2} \$\$9$$

結果として出力は 9 である.

以下の問いに答えよ.

- (1) G において A から $1 * (2 + 3)$ に至る導出系列をひとつ示せ.
- (2) $123 + 4 + *$ を入力として与えた時の以下のプログラムの出力を求めよ.

$$\text{INPUT}; \text{IF}[\underline{+}][\text{POP}; \text{ADD}]; \text{IF}[\underline{*}][\text{POP}; \text{MUL}]; \text{IF}[\Sigma][\text{LOOP}]; \text{IF}[\underline{\$} \underline{\mathbb{Z}} \underline{\$}][\text{POP}]$$

- (3) G' を G から 2 つの生成規則 $M \rightarrow M * P$ および $P \rightarrow (A)$ を取り除いた文法とする. 入力が $\mathcal{L}(G')$ に属するとき与えられた式の値を, そうでないとき $\$$ を出力するプログラムを書け.
- (4) 入力が $\mathcal{L}(G)$ に属すると仮定して, 与えられた式の値を出力するプログラムを書け.

2019年 3月実施 問題5 計算機2 (2頁目／3頁中)

Let $\mathbb{Z}$ be the set of integers. Consider the grammar G such that the set of its terminal symbols is $\Sigma = \mathbb{Z} \cup \{+, *, (,)\}$, the set of its non-terminal symbols is $\{A, M, P\}$, its start symbol is A , and its production rules are the following:

$$A \rightarrow M, \quad A \rightarrow A + M, \quad M \rightarrow P, \quad M \rightarrow M * P, \quad P \rightarrow n, \quad P \rightarrow (A)$$

where $n \in \mathbb{Z}$. We write $\mathcal{L}(G)$ for the language generated by G . $\mathcal{L}(G)$ is regarded as the set of expressions of additions and multiplications on integers. Namely, $+$ and $*$ denote addition and multiplication, respectively, and the syntax tree of each expression denotes the order of the calculation.

Let us write a program that inputs an expression in G and calculates its value in the following procedural programming language

$$I ::= \text{PUSH}_\alpha \mid \text{POP} \mid \text{SWAP}_i \mid \text{IF}[X \cdots X][I] \mid \text{INPUT} \mid \text{ADD} \mid \text{MUL} \mid \text{LOOP} \mid I; I$$

where α is a symbol, X is a set of symbols, and i is a positive integer. We write $\underline{\alpha}$ for the singleton set $\{\alpha\}$. The interpreter of this language has a single stack. The stack initially consists only of a single symbol $\$$. The interpreter is given as its input a finite sequence of symbols in Σ . When the program terminates, if the stack is not empty, the interpreter outputs the topmost symbol of the stack. The semantics of each syntax is shown in Fig 5. For example, the program

$$\text{INPUT}; \text{IF}[\Sigma][\text{ADD}; \text{LOOP}]; \text{IF}[\underline{\$ \mathbb{Z} \$}][\text{SWAP}_2]$$

outputs the sum of the input if the input consists only of integers, or $\$$ otherwise. When the program is executed with the input 2 3 4 given, the stack changes as follows:

$$\$ \xrightarrow{\text{INPUT}} \$2 \xrightarrow{\text{ADD}} \$2 \xrightarrow{\text{INPUT}} \$23 \xrightarrow{\text{ADD}} \$5 \xrightarrow{\text{INPUT}} \$54 \xrightarrow{\text{ADD}} \$9 \xrightarrow{\text{INPUT}} \$9\$ \xrightarrow{\text{SWAP}_2} \$\$9$$

and consequently the output is 9.

Answer the following questions.

- (1) Give a derivation sequence from A to $1 * (2 + 3)$ in G .
- (2) Give the output of the following program when 1 2 3 + 4 + * is given as its input.

$$\text{INPUT}; \text{IF}[+][\text{POP}; \text{ADD}]; \text{IF}[*][\text{POP}; \text{MUL}]; \text{IF}[\Sigma][\text{LOOP}]; \text{IF}[\underline{\$ \mathbb{Z} \$}][\text{POP}]$$

- (3) Let G' be the grammar obtained by eliminating the two production rules $M \rightarrow M * P$ and $P \rightarrow (A)$ from G . Write a program that outputs the value of the given expression if the input is in $\mathcal{L}(G')$, or $\$$ otherwise.
- (4) Under the assumption that the input is in $\mathcal{L}(G)$, write a program that outputs the value of the given expression.

2019年 3月実施
問題5 計算機2
(3頁目／3頁中)

PUSH_α	α をスタックにプッシュする.
POP	スタックから記号を1つポップして捨てる. スタックが空ならば何もしない.
SWAP_i	スタックの1番目(先頭)と i 番目の記号を交換する. スタックが i より短い場合は何もしない.
$\text{IF}[X_i \cdots X_1][I]$	i 個の記号 $\alpha_i, \dots, \alpha_1$ がスタックの先頭にこの順 (α_1 が先頭) に存在し, かつ任意の $k \in \{i, \dots, 1\}$ について $\alpha_k \in X_k$ ならば, I を実行する. そうでなければ何もしない.
INPUT	入力から1つ記号を読み込みスタックにプッシュする. 入力が残っていないならば\$をプッシュする.
ADD	2つの整数をスタックからポップし, それらの和を求め, 結果をスタックにプッシュする. 2つの整数がスタックの先頭になければ何もしない.
MUL	積を求めることを除いて ADD に同じ.
LOOP	プログラムの先頭にジャンプする.
$I_1; I_2$	I_1 を実行してから I_2 を実行する.

図 5 各構文の意味

PUSH_α	Push α to the stack.
POP	Pop a symbol from the stack and discard it. If the stack is empty, it performs nothing.
SWAP_i	Swap the first (topmost) and i -th symbols of the stack. If the stack is shorter than i , it performs nothing.
$\text{IF}[X_i \cdots X_1][I]$	If there are i symbols $\alpha_i, \dots, \alpha_1$ at the top of the stack in this order (α_1 is the topmost) and $\alpha_k \in X_k$ for any $k \in \{i, \dots, 1\}$, execute I . Otherwise, it performs nothing.
INPUT	Read a symbol from the input and push it to the stack. If no input is left, it pushes \$.
ADD	Pop two integers from the stack, compute their addition, and push the result to the stack. Unless there are two integers at the top of the stack, it performs nothing.
MUL	Similar to ADD except that it computes multiplication.
LOOP	Go to the beginning of the program.
$I_1; I_2$	Execute I_1 and then execute I_2 .

Fig 5 The semantics of each syntax

2019 年 3 月実施 問題6 物理専門 (1 頁目 / 2 頁中)

x 軸上のポテンシャル $V(x)$ の中の質量 m の粒子の量子状態を考える. ここで, 粒子はエネルギー ϵ の定常状態にあるものとする. 以下の問に答えよ. 以下において, i は虚数単位, a, k, α, κ は正の実数, A, B, C, D, F は複素数とする. $\delta(x)$ はディラックのデルタ関数であり, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h はプランク定数) である.

(1) ポテンシャル

$$V(x) = -\alpha\delta(x) \quad (6A)$$

を考える.

(a) $x = 0$ において, 定常状態の波動関数 $\psi(x)$ は連続であるが, その導関数 $\frac{d\psi}{dx}$ は不連続である. $x = 0$ の近傍で時間に依存しないシュレーディンガー方程式を積分することにより, 次の関係を導出せよ.

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=+0} - \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=-0} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0) \quad (6B)$$

(b) 一般に, $\epsilon > 0$ のときの定常状態の波動関数 $\psi_1(x)$ は

$$\psi_1(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x \leq 0) \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & (x > 0) \end{cases} \quad (6C)$$

と書ける. ここで, 粒子が領域 $x < 0$ から領域 $x > 0$ に透過する場合を考え, $D = 0$ とする. $\frac{B}{A}$ と $\frac{C}{A}$ を $i, k, m, \alpha, \hbar$ を用いて表せ.

(2) ポテンシャル

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)] \quad (6D)$$

を考える. $\epsilon < 0$ のときの定常状態の波動関数 $\psi_2(x)$ (束縛解) は

$$\psi_2(x) = \begin{cases} Ae^{\kappa x} & (x \leq -a) \\ Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} & (-a < x < a) \\ Fe^{-\kappa x} & (x \geq a) \end{cases} \quad (6E)$$

と書ける.

(a) C と D の関係を導出せよ.

(b) 2つの束縛解が存在するための条件を $a, m, \alpha, \hbar$ を用いて表せ.

2019 年 3 月実施
問題6 物理専門
(2 頁目 / 2 頁中)

Consider the quantum state of a particle of mass m in a potential $V(x)$ along the x -axis. Here, the particle is in a stationary state with energy ϵ . Answer the following questions. In the following, i is the imaginary unit, a, k, α , and κ are real positive numbers, and A, B, C, D , and F are complex numbers. $\delta(x)$ is the Dirac delta function and $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ (h : Planck constant).

(1) Consider the potential

$$V(x) = -\alpha\delta(x). \quad (6A)$$

(a) At $x = 0$, the stationary wave function $\psi(x)$ is continuous, while its derivative $\frac{d\psi}{dx}$ is discontinuous. By integrating the time-independent Schrödinger equation around $x = 0$, derive the following relation:

$$\left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=+0} - \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x=-0} = -\frac{2m\alpha}{\hbar^2} \psi(0). \quad (6B)$$

(b) In general, the stationary wave function $\psi_1(x)$ for $\epsilon > 0$ can be written as

$$\psi_1(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & (x \leq 0) \\ Ce^{ikx} + De^{-ikx} & (x > 0) \end{cases}. \quad (6C)$$

Here, we assume the case that the particle is transmitted from the region $x < 0$ to the region $x > 0$ and let $D = 0$. Obtain $\frac{B}{A}$ and $\frac{C}{A}$ in terms of i, k, m, α , and $\hbar$.

(2) Consider the potential

$$V(x) = -\alpha[\delta(x+a) + \delta(x-a)]. \quad (6D)$$

The stationary wave function $\psi_2(x)$ (bound solution) for $\epsilon < 0$ can be written as

$$\psi_2(x) = \begin{cases} Ae^{\kappa x} & (x \leq -a) \\ Ce^{\kappa x} + De^{-\kappa x} & (-a < x < a) \\ Fe^{-\kappa x} & (x \geq a) \end{cases}. \quad (6E)$$

(a) Derive the relation between C and D .

(b) Obtain the condition for the existence of two bound solutions in terms of a, m, α , and $\hbar$.