2024 年 8 月 27 日　9：40－12：10

大学院工学研究科	電気エネルギーシステム専攻 通信工学専攻 電子工学専攻
大学院医工学研究科	工学系コース電気・情報系

大学院入学試験問題

基礎専門科目
Basic and Specialized Subjects

注意：　６設問中，３問題を選んで，答案用紙（問題ごとに１枚）に解答せよ．答案用紙が不足する場合は裏面を使って良い．問題は和文と英文を併記してある．

Attention:　Choose 3 questions out of the following 6 questions and answer each of them on a separate answer sheet.　You may use the backside.　Questions are written in both Japanese and English.

2024年8月27日 9:40－11:20

大学院情報科学研究科　情報・生命系群

大学院入学試験問題

基礎専門科目
Basic and Specialized Subjects

注意：　６設問中，２問題を選んで，答案用紙（問題ごとに１枚）に解答せよ．答案用紙が不足する場合は裏面を使って良い．問題は和文と英文を併記してある．

Attention:　Choose 2 questions out of the following 6 questions and answer each of them on a separate answer sheet. You may use the backside. Questions are written in both Japanese and English.

2024 年 8 月実施
問題 1　電磁気学
(1 頁目／3 頁中)

真空の誘電率をε_0とし，以下の問に答えよ．

(1) 電界$\boldsymbol{E}$，電荷Qを用い，真空中における静電界に関するガウスの法則を積分形で記述し，その物理的意味を説明せよ．

(2) Fig. 1(a)に示すような同軸構造が真空中に置かれており，導体 I は半径aの円柱導体，導体 II は内半径b（$b > a$）の円筒導体である．導体 I と導体 II は十分に長く，端部効果は無視できるものとする．以下の問に答えよ．

(a) 導体 I と導体 II に単位長さあたり$+\lambda$，$-\lambda$の電荷をそれぞれ与えた．中心軸から距離r（$a < r < b$）の位置における電界の大きさを，ガウスの法則を用いて求めよ．さらに，導体 I, 導体 II 間に蓄積されている単位長さ当たりの静電エネルギーを求めよ．

(b) 導体 I，導体 II 間の単位長さ当たりの静電容量を求めよ．

(c) 導体 I を接地し，導体 II に電位Uを与えた．Uおよびbが一定のもとで，導体 I 表面における電界の大きさが最小となるようなaを求めよ．

(3) Fig. 1(b)のように，導体からなる巻き数 1 回，半径Rの円形コイルが真空中に置かれている．コイルの静電容量はCである．コイルはxy平面に平行であり，コイルの中心Oは原点$(0,0,0)$にある．またコイルの導体の太さは無視できる．いま，コイルを接地し，位置 P $(0,0,h)$ に点電荷Q_1（$Q_1 > 0$）を置いたところ，コイル全体に$-Q_2$（$Q_2 > 0$）の電荷が誘起された．以下の問に答えよ．

(a) 点電荷がコイル上につくる電位を求めよ．

(b) コイルの静電容量Cを，ε_0，R，h，Q_1，Q_2を用いて表せ．

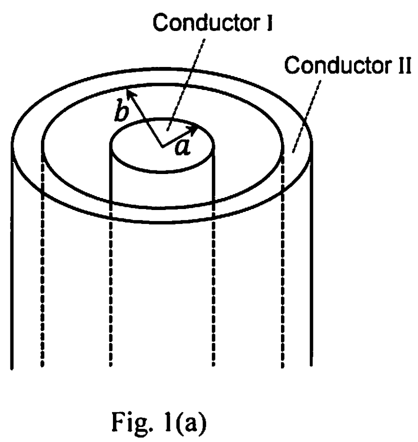

Fig. 1(a)

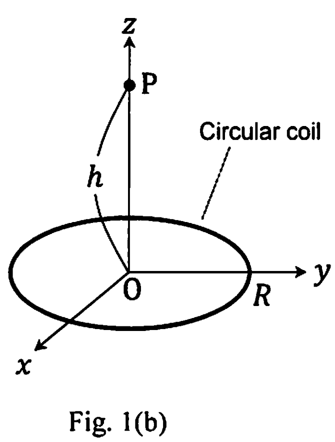

Fig. 1(b)

Answer the following questions. The permittivity of vacuum is ε_0.

(1) Using an electric field $\boldsymbol{E}$ and an electric charge Q, show the equation of Gauss's law in integral form for the electrostatic field in vacuum and explain its physical meaning.

(2) The coaxial structure shown in Fig. 1(a) is placed in a vacuum. Conductor I is a conducting cylinder of radius a and conductor II is a conducting hollow cylinder of inner radius b $(b > a)$. Conductor I and conductor II are sufficiently long such that edge effects are negligible. Answer the following questions.

(a) Electric charges per unit length of $+\lambda$ and $-\lambda$ are given to conductor I and conductor II, respectively. Find the magnitude of the electric field at a distance r from the central axis $(a < r < b)$ using Gauss's law. In addition, find the electrostatic energy per unit length stored between conductor I and conductor II.

(b) Find the capacitance per unit length between conductor I and conductor II.

(c) Conductor I is grounded and an electric potential U is applied to conductor II. Find a that minimizes the magnitude of the electric field on the surface of conductor I when U and b are constant.

(3) As shown in Fig. 1(b), a single-turn circular coil of radius R made of a conductor is placed in a vacuum. The capacitance of the coil is C. The coil is parallel to the xy-plane and the center O of the coil is located at the origin $(0, 0, 0)$. The thickness of the conductor of the coil can be neglected. When the coil is grounded and a point electric charge Q_1 $(Q_1 > 0)$ is placed at position P $(0, 0, h)$, an electric charge of $-Q_2$ $(Q_2 > 0)$ is induced in the entire coil. Answer the following questions.

(a) Find the electric potential on the coil created by the point electric charge.

(b) Express the capacitance of the coil C in terms of ε_0, R, h, Q_1, and Q_2.

2024 年 8 月実施
問題 1　電磁気学
(3 頁目／3 頁中)

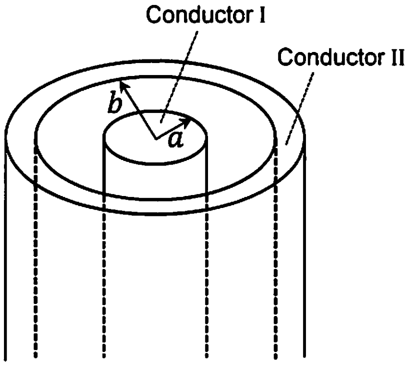

Fig. 1(a)

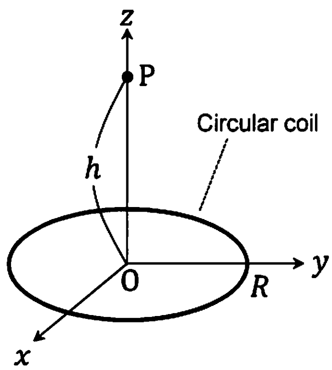

Fig. 1(b)

2024 年 8 月実施
問題 2　電気回路
(1 頁目／2 頁中)

(1) 抵抗 $R\,[\Omega]$，インダクタンス $L\,[\mathrm{H}]$，キャパシタンス $C\,[\mathrm{F}]$，変圧器，角周波数 $\omega\,[\mathrm{rad/s}]$ の交流電圧源 $V\,[\mathrm{V}]$ からなる Fig. 2(a) および Fig. 2(b) の回路を考える．変圧器の一次側自己インダクタンス，二次側自己インダクタンスはそれぞれ $L_1\,[\mathrm{H}]$，$L_2\,[\mathrm{H}]$ であり，相互インダクタンスは $M\,[\mathrm{H}]$ である．虚数単位を j とし，以下の問に答えよ．

(a) Fig. 2(a)の端子 a-b 間から見た入力インピーダンスを求めよ．

(b) Fig. 2(a)の回路に流れる電流 $I\,[\mathrm{A}]$ のフェーザの大きさが最大となる角周波数 ω_0 [rad/s] を求めよ．また，$\omega = \omega_0$ のときインダクタンス L とキャパシタンス C に発生する電圧 $V_L\,[\mathrm{V}]$ と $V_C\,[\mathrm{V}]$を R, L, C, V を用いてそれぞれ表せ．

(c) Fig. 2(b)の回路が Fig. 2(c)の回路と等価であるとき，インピーダンス $Z\,[\Omega]$ を求めよ．

(d) $\omega = \omega_0$ かつ $R = 0$ のとき，Fig. 2(b)の端子 c-d 間から見た入力インピーダンスが 0 となるための，変圧器の結合係数を求めよ．ここで，ω_0 は問(1)(b)で求めた角周波数である．

(2) インダクタンス $L\,[\mathrm{H}]$，キャパシタンス $C\,[\mathrm{F}]$，直流電圧源 $E\,[\mathrm{V}]$ からなる Fig. 2(d)の回路において，時刻 $t = 0$ でスイッチ S を閉じた場合を考える．回路に流れる電流を $i(t)\,[\mathrm{A}]$，キャパシタンスに蓄えられる電荷を $q(t)\,[\mathrm{C}]$ とし，$t=0$ における電流と電荷の初期値はそれぞれ $i(0) = 0, q(0) = 0$ とする．以下の問に答えよ．

(a) $t > 0$ における $i(t)$ および $q(t)$ を求めよ．

(b) キャパシタンス C に発生する電圧の最大値 $v_{max}\,[\mathrm{V}]$と，その電圧が最大となる時刻のうち最小の値 $t_m\,[\mathrm{s}]$を求めよ．

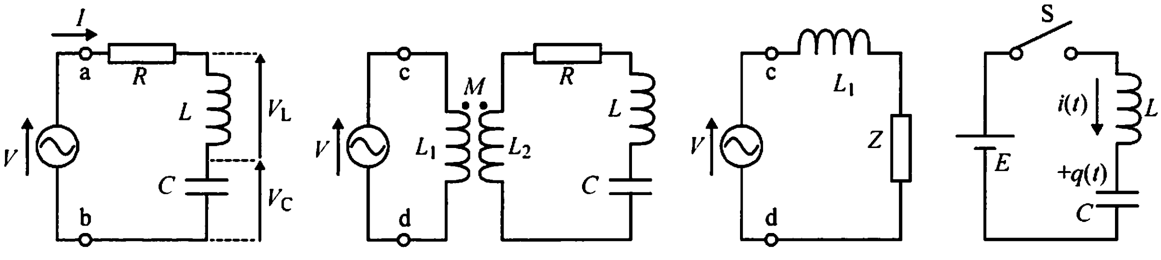

Fig. 2(a)　Fig. 2(b)　Fig. 2(c)　Fig. 2(d)

2024 年 8 月実施
問題 2　電気回路
(2 頁目／2 頁中)

(1) Consider the circuits shown in Figs. 2(a) and 2(b), which consist of a resistance R [Ω], an inductance L [H], a capacitance C [F], a transformer, and an AC power supply V [V] operating at an angular frequency ω [rad/s]. The self inductances of the primary and secondary sides of the transformer are L_1 [H] and L_2 [H], respectively, and the mutual inductance is M [H]. Let j be the imaginary unit and answer the following questions.

(a) Find the input impedance between the terminals a-b in Fig. 2(a).

(b) Find the angular frequency ω_0 [rad/s] giving the maximum magnitude of the phasor for the current I [A] in Fig. 2(a). Furthermore, express the voltages V_L [V] and V_C [V] across the inductance L and the capacitance C, respectively, for $\omega = \omega_0$ in terms of R, L, C, and V.

(c) When the circuit in Fig. 2(b) is equivalent to that in Fig. 2(c), find the impedance Z [Ω].

(d) For $\omega = \omega_0$ and $R = 0$, find the coupling coefficient of the transformer, for which the input impedance between the terminals c-d in Fig. 2(b) is zero. Here ω_0 is the angular frequency obtained in question (1)(b).

(2) Consider the case that the switch S is closed at the time $t = 0$ for the circuit consisting of an inductance L [H], a capacitance C [F], and a DC power supply E [V] as in Fig. 2(d). The current flowing through the circuit and the charge stored in the capacitor are labeled as $i(t)$ [A] and $q(t)$ [C], respectively; the initial values of the current and the charge at $t = 0$ are $i(0) = 0$ and $q(0) = 0$, respectively. Answer the following questions.

(a) Find $i(t)$ and $q(t)$ for $t > 0$.

(b) Find both the maximum voltage v_{max} [V] across the capacitance C and the minimum value t_m [s] of the time at which the voltage is a maximum.

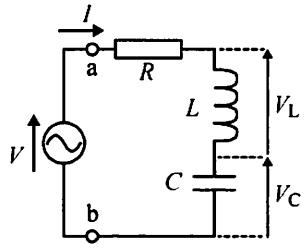

Fig. 2(a)

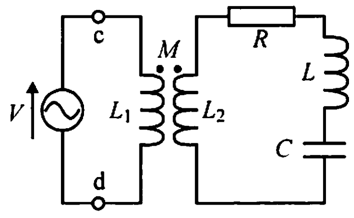

Fig. 2(b)

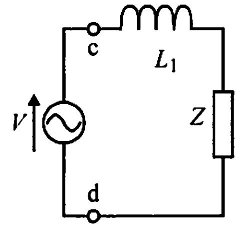

Fig. 2(c)

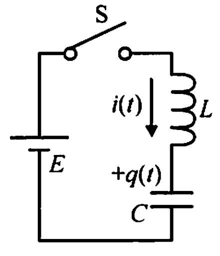

Fig. 2(d)

2024 年 8 月実施
問題 3　計算機ハードウェア
(1頁目／2 頁中)

x_1, x_2, x_3, x_4, x, y, $z \in \{0,1\}$であり，$\cdot$, $+$, $\overline{\ }$ は，それぞれ論理積演算，論理和演算，否定演算を表すとする．また，これらの論理演算は Fig. 3 に示す公理を満たし，$\cdot$ は $+$ より優先順位が高いとする．以下の問に答えよ．

(1) Fig. 3 の公理を用いて等式 $x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) + x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3) = x_1 \cdot \overline{x_2}$ を導け．

(2) カルノー図を使用し $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot (\overline{x_3} + x_4)$ を簡単化せよ．使用したカルノー図も示すこと．

(3) 入力 x_1, x_2, x_3, x_4 に対し $\overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$ の値を出力する論理回路を構成せよ．NOT ゲート，2 入力 OR ゲート，2 入力 AND ゲートのみをいくつか用い，ゲート数の合計を最小とすること．回路の導出過程も示すこと．

$x \cdot 1 = x$	$x + 0 = x$
$x \cdot 0 = 0$	$x + 1 = 1$
$x \cdot x = x$	$x + x = x$
$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
$x \cdot (x + y) = x$	$x + (x \cdot y) = x$
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
$x \cdot \bar{x} = 0$	$x + \bar{x} = 1$
$\bar{\bar{x}} = x$	
$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$	$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Fig. 3

Question No. 3: Computer hardware (2/2)

2024 年 8 月実施
問題 3　計算機ハードウェア
(2頁目／2 頁中)

Suppose that x_1, x_2, x_3, x_4, x, y, $z \in \{0,1\}$ and that $\cdot$, $+$, and $^{-}$ denote AND, OR, and NOT operations, respectively. Suppose also that these logical operations satisfy the axioms shown in Fig. 3 and that $\cdot$ has higher priority than $+$. Answer the following questions.

(1) Derive the equation $x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot \overline{x_3}) + x_1 \cdot (\overline{x_2} \cdot x_3) = x_1 \cdot \overline{x_2}$ by using the axioms in Fig. 3.

(2) Simplify $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot (\overline{x_3} + x_4)$ by using a Karnaugh map. Also show the Karnaugh map you used.

(3) Construct a logical circuit that outputs the value of $\overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$ for inputs x_1, x_2, x_3, and x_4. You should use only a number of NOT gates, 2-input OR gates, and 2-input AND gates, and you should minimize the total number of gates. Also, show the process of deriving the circuit.

$x \cdot 1 = x$	$x + 0 = x$
$x \cdot 0 = 0$	$x + 1 = 1$
$x \cdot x = x$	$x + x = x$
$x \cdot y = y \cdot x$	$x + y = y + x$
$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
$x \cdot (x + y) = x$	$x + (x \cdot y) = x$
$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$	$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
$x \cdot \bar{x} = 0$	$x + \bar{x} = 1$
$\bar{\bar{x}} = x$	
$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$	$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$

Fig. 3

2024 年 8 月実施
問題4　計算機ソフトウェア
（1頁目／2頁中）

整数を要素とし，各節点の要素は左部分木の各要素より大きく，右部分木の各要素以下であるような2分探索木を考える．空の木に整数 4, 5, 2, 3, 1, 6 のそれぞれをこの順に葉として挿入して得られる2分探索木を T とする．以下ではC言語風の疑似コードを用いる．次の問に答えよ．

(1) T を木構造として図示せよ．空の部分木は省略してよい．

(2) 2分探索木 t を引数とする以下の再帰関数 $f(t)$ を T に適用して出力される整数列を書け．数行程度の文章で理由も説明せよ．

```
f(t){
  t が空ならば何もせず return する;
  t の根の要素を出力する;
  t の左部分木に f を適用する;
  t の右部分木に f を適用する;
}
```

(3) T に対して以下のプログラムを実行して出力される整数列を書け．数行程度の文章で理由も説明せよ．

```
q を空の待ち行列とする;
q に T を挿入する;
/* 3行目 */ q が空ならばプログラムを終了する;
q から木を一つ取り出し t とする; /* t は q から削除される */
t が空ならば上の「3行目」に戻る;
t の根の要素を出力する;
t の左部分木を q に挿入する;
t の右部分木を q に挿入する;
上の「3行目」に戻る;
```

(4) 任意の2分探索木 t に対して問 (2) の $f(t)$ と同じ出力列を与える，再帰的でない関数 $g(t)$ をスタックを用いて書け．

2024 年 8 月実施
問題4　計算機ソフトウェア
(2頁目／2頁中)

Consider binary search trees where the elements are integers, and the element of each node is greater than each element of the left subtree and less than or equal to each element of the right subtree. Let T be the binary search tree obtained by inserting into an empty tree each of the integers 4, 5, 2, 3, 1, 6 in this order as a leaf. In what follows, we use pseudo-code resembling the C language. Answer the following questions.

(1) Draw T as a tree structure. You may omit empty subtrees.

(2) Write the sequence of integers that is output by applying to T the following recursive function $f(t)$ that takes a binary search tree t as an argument. Also, explain the reason in several lines of text.

```
f(t){
  If t is empty, do nothing but return;
  Output the element of the root of t;
  Apply f to the left subtree of t;
  Apply f to the right subtree of t;
}
```

(3) Write the sequence of integers that is output by executing the following program for T. Also, explain the reason in several lines of text.

```
Let q be an empty queue;
Enqueue T to q;
/* line 3 */ If q is empty, terminate the program;
Dequeue a tree t from q; /* t is removed from q */
If t is empty, go back to "line 3" above;
Output the element of the root of t;
Enqueue the left subtree of t into q;
Enqueue the right subtree of t into q;
Go back to "line 3" above;
```

(4) Write a non-recursive function $g(t)$ that gives the same output sequence as $f(t)$ in question (2) for any binary search tree t by using a stack.

2024 年 8 月実施
問題 5　物理
(1 頁目／4 頁中)

磁場 $\boldsymbol{B} = (0,\ 0,\ B_z)$ 中に置かれた Fig. 5 で示されるような金属板(幅 W, 厚さ D, 長さ L, $W \ll L$, $D \ll L$)の中で, 多数の自由電子の集団の流れによって電流が生じ, 格子欠陥や格子振動との衝突による自由電子の散乱が平均時間間隔 τ で生じている現象について考える. ここで, 金属板中の各自由電子は, 電荷 $-e$, 有効質量 m をもつものとする. 自由電子の集団については, 自由電子数 N 個, 平均速度 $\boldsymbol{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$, 各運動量成分の総和 $\boldsymbol{P} = (P_x,\ P_y,\ P_z)$ であるものとする. 金属板中において, 電場は $\boldsymbol{E} = (E_x,\ E_y,\ E_z)$, 電流密度は $\boldsymbol{J} = (J_x,\ J_y,\ J_z)$ とする. 端子1 を通して流入した電流は端子2 から流出するが, 端子3 と端子4 からは流出していないものと考える.

この現象において, 1 個の自由電子について短い時間 dt の間に散乱が生じる確率は $\dfrac{dt}{\tau}$ で表され, 自由電子は散乱する度にすべての運動量を失うものとする. また, 電場と磁場から 1 個の自由電子が受ける力を $\boldsymbol{F} = (F_x,\ F_y,\ F_z)$ とするとき, dt の間に生じる $\boldsymbol{P}$ の変化は $d\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{F}dt - \boldsymbol{P}\dfrac{dt}{\tau}$ のように表され, 定常状態においては $\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt} = (0,\ 0,\ 0)$ であるものとする.

(1) $B_z = 0$ であるとき, 以下の問に答えよ:

(a) $\boldsymbol{F}$ を e, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$ のうちから必要なものを用いて表せ.

(b) 定常状態における J_x を e, m, τ, N, L, D, W, E_x, E_y, E_z のうちから必要なものを用いて表せ.

(c) この金属の導電率 σ を e, m, τ, N, L, D, W のうちから必要なものを用いて表せ.

(2) $B_z > 0$ であるとき, 以下の問に答えよ:

(a) $\boldsymbol{F}$ を e, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ のうちから必要なものを用いて表せ.

(b) 定常状態における電場 E_x, E_y, E_z を e, m, τ, N, L, D, W, J_x, J_y, J_z, B_z のうちから必要なものを用いて表せ.

(c) 定常状態における端子3 と端子4 の間に生じる電圧 $V_4 - V_3$ を e, m, τ, N, L, D, W, J_x, J_y, J_z, B_z のうちから必要なものを用いて表せ.

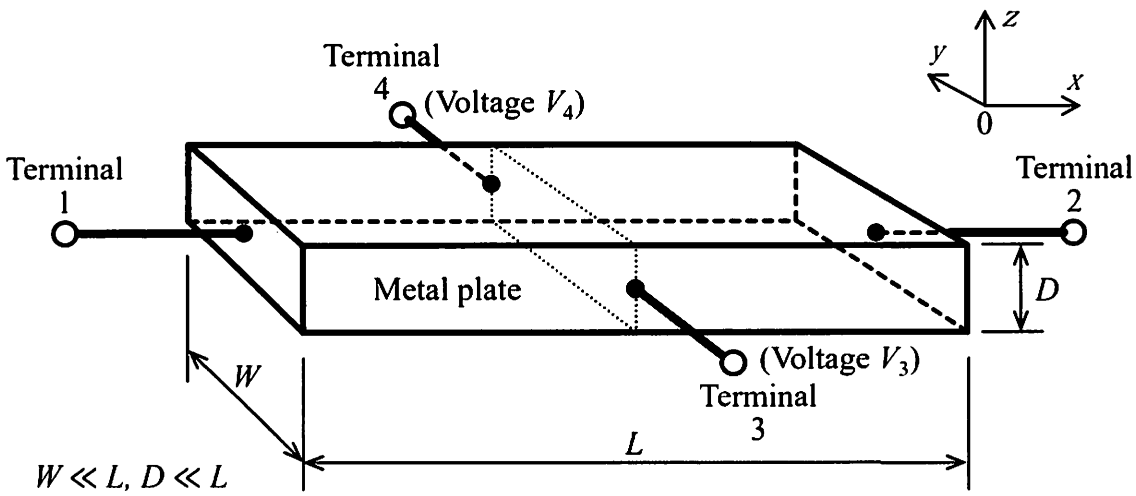
Terminal
4
(Voltage V_4)
Terminal
1
Terminal
2
Metal plate
D
(Voltage V_3)
Terminal
3
W
L
$W \ll L$, $D \ll L$
z
y
x
0

Fig. 5

Consider a phenomenon in which the flow of a group of many free electrons generates an electric current, and scattering of the free electrons by collisions with lattice defects or lattice vibrations occurs at a mean time interval τ, in the metal plate (width W, thickness D, length L, $W \ll L$, $D \ll L$) shown in Fig. 5 placed in a magnetic field $\boldsymbol{B} = (0,\ 0,\ B_z)$. Here, each free electron in the metal plate has electric charge $-e$ and effective mass m. For the group of free electrons, suppose that the number of free electrons is N, the mean velocity is $\boldsymbol{v} = (v_x,\ v_y,\ v_z)$, and the sum of each momentum component is $\boldsymbol{P} = (P_x,\ P_y,\ P_z)$. In the metal plate, suppose that the electric field is $\boldsymbol{E} = (E_x,\ E_y,\ E_z)$ and the electric current density is $\boldsymbol{J} = (J_x,\ J_y,\ J_z)$. Suppose that the electric current entering through terminal 1 flows out through terminal 2 but not through terminals 3 and 4.

In this phenomenon, suppose that, for each free electron, the probability of scattering in a short period of time dt is expressed by $\dfrac{dt}{\tau}$ and that the free electron loses all its momentum every time scattering occurs. Moreover, when the force that the free electron receives from the electric field and magnetic field is $\boldsymbol{F} = (F_x,\ F_y,\ F_z)$, suppose that the change of $\boldsymbol{P}$ that occurs in dt is expressed as $d\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{F}dt - \boldsymbol{P}\dfrac{dt}{\tau}$ and let $\dfrac{d\boldsymbol{P}}{dt} = (0,\ 0,\ 0)$ in the steady state.

(1) In the case $B_z = 0$, answer the following questions:

(a) Write an expression for $\boldsymbol{F}$ using the necessary terms from e, $\boldsymbol{v}$, and $\boldsymbol{E}$.

(b) In the steady state, write an expression for J_x using the necessary terms from e, m, τ, N, L, D, W, E_x, E_y, and E_z.

(c) Write an expression for the conductivity σ of this metal using the necessary terms from e, m, τ, N, L, D, and W.

(2) In the case $B_z > 0$, answer the following questions:

(a) Write an expression for $\boldsymbol{F}$ using the necessary terms from e, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{E}$, and $\boldsymbol{B}$.

(b) In the steady state, write an expression for E_x, E_y, and E_z using the necessary terms from e, m, τ, N, L, D, W, J_x, J_y, J_z, and B_z.

(c) In the steady state, write an expression for the voltage $V_4 - V_3$ which is generated between terminals 3 and 4 using the necessary terms from e, m, τ, N, L, D, W, J_x, J_y, J_z, and B_z.

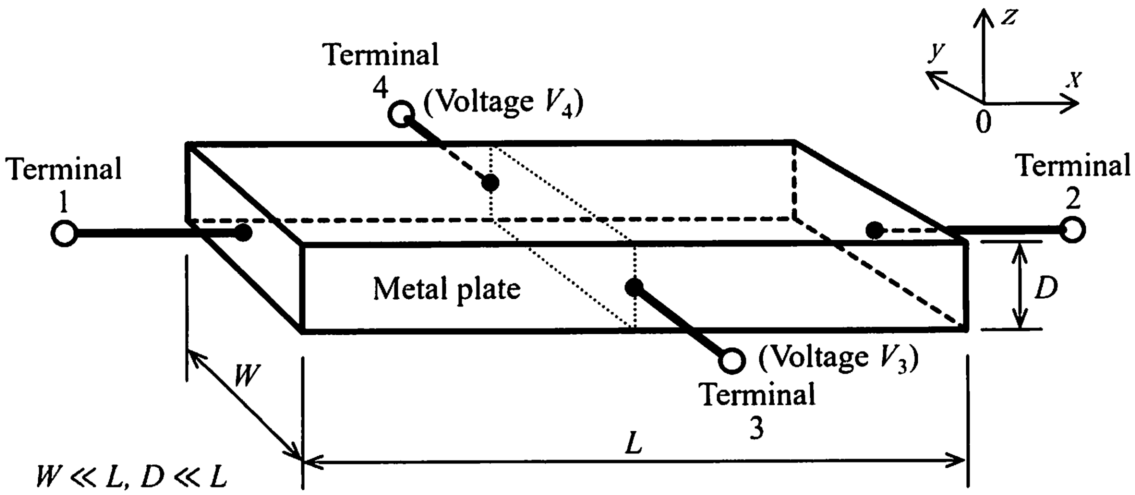
Terminal
4
(Voltage V_4)
Terminal
1
Terminal
2
Metal plate
D
(Voltage V_3)
Terminal
3
W
L
$W \ll L$, $D \ll L$
z
y
x
0

Fig. 5

2024 年 8 月実施
問題 6　数学基礎
(1 頁目／2 頁中)

(1) 次の定理を用いて，以下の問に答えよ．ただし i は虚数単位とする．

【定理】複素数 z と複素関数 $f(z)$ に対して，$z=x+iy$，$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ とおく．ただし，x と y はそれぞれ複素数 z の実部と虚部，$u(x,y)$ と $v(x,y)$ はそれぞれ $f(z)$ の実部と虚部とする．$f(z)$ が領域 D で正則であるための必要十分条件は以下である．

① $u(x,y)$ および $v(x,y)$ が領域 D で偏微分可能であり，その偏導関数が連続であること．

② コーシー・リーマンの関係式 $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ を領域 D で満たすこと．

このとき，領域 D において $f(z)$ の導関数は次の式で与えられる．

$$\frac{df(z)}{dz}=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

(a) 関数 $f(z)=\sin(z)$ が $z=\infty$ を除く任意の複素数 z について正則であり，その導関数が $\dfrac{df(z)}{dz}=\cos(z)$ により表されることを示せ．

(b) 正則関数 $f(z)$ の実部が $u(x,y)=x^3-3xy^2$ で与えられる $f(z)$ を求めよ．

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 4 & -6\end{pmatrix}$ について考える．以下の問に答えよ．

(a) A のすべての固有値とそれらに対応する固有ベクトルを求めよ．

(b) $P^{-1}AP$ が対角行列として与えられるような正則行列 P を用いて，$P^{-1}AP$ を求めよ．

(c) A^n を求めよ．ここで，n は正の整数である．

2024 年 8 月実施
問題 6　数学基礎
(2 頁目／2 頁中)

(1) Answer the following questions by using the following theorem. Here, i is the imaginary unit.

【Theorem】 Let $z = x + iy$ for the function $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, where x and y are the real part and the imaginary part of the complex number z while $u(x, y)$ and $v(x, y)$ are the real part and the imaginary part of $f(z)$, respectively. The necessary and sufficient conditions so that $f(z)$ is an analytic function in a region D are as follows.

① It is possible to partially differentiate $u(x, y)$ and $v(x, y)$ in the region D, and their partial derivative functions are continuous.

② The Cauchy-Riemann relations $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ are satisfied in the region D.

In this case, the derivative function of $f(z)$ in the region D is expressed as follows.

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

(a) Show that the function $f(z) = \sin(z)$ is an analytic function for any complex number z except for $z = \infty$, and that the derivative function can be expressed as $\dfrac{df(z)}{dz} = \cos(z)$.

(b) Find the function $f(z)$ so that the real part of the analytic function $f(z)$ is given by $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

(2) Consider the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$. Answer the following questions.

(a) Find all the eigenvalues and their corresponding eigenvectors of A.

(b) Find $P^{-1}AP$ by using an invertible matrix P so that $P^{-1}AP$ becomes a diagonal matrix.

(c) Find A^n. Here, n is a positive integer.