2025 年 3 月 4 日　9:40－12:10

大学院工学研究科　　電気エネルギーシステム専攻
　　　　　　　　　　通信工学専攻
　　　　　　　　　　電子工学専攻
大学院医工学研究科　工学系コース電気・情報系

大学院入学試験問題

基 礎 専 門 科 目
Basic and Specialized Subjects

注意：　問題１～６の中から３問題を選んで，答案用紙（問題ごとに１枚）に解答せよ．答案用紙が不足する場合は裏面を使って良い．問題は和文と英文を併記してある．

Attention:　Choose three questions out of Questions No. 1–6 and answer each of them on a separate answer sheet. You may use the backside.　Questions are written in both Japanese and English.

2025 年 3 月 4 日 9:40—11:20

大学院情報科学研究科　情報・生命系群

大学院入学試験問題

基 礎 専 門 科 目
Basic and Specialized Subjects

注意: 問題１〜６の中から２問題を選んで，答案用紙（問題ごとに１枚）に解答せよ．答案用紙が不足する場合は裏面を使って良い．問題は和文と英文を併記してある．

Attention: Choose two questions out of Questions No. 1–6 and answer each of them on a separate answer sheet. You may use the backside. Questions are written in both Japanese and English.

2025 年 3 月実施
問題 1　電磁気学
(1 頁目／3 頁中)

(1) Fig. 1(a)に示すように，半径aの無限長円柱導体 1，2 を真空中に間隔d（$d \gg a$）で平行に配置する．導体 2 の中心軸をy軸とし，導体 1 の中心軸の座標を$x = 0$，$z = d$とする．以下の問に答えよ．ただし，真空の透磁率をμ_0，誘電率をε_0とする．

(a) 導体 1 に定常電流Iがy軸の正の向きに，導体 2 に定常電流Iがy軸の負の向きに流れている．電流は導体断面内を一様に流れているものとする．

(i) 導体の間の点 P$(0, 0, z)$ $(a \le z \le d - a)$における磁束密度$\boldsymbol{B}$の大きさと向きを求めよ．

(ii) 導体 1，2 からなる往復線路のy軸方向単位長さあたりの自己インダクタンスLを求めよ．ただし，導体内部の磁束は無視せよ．

(b) 導体 1 および 2 にy軸方向単位長さあたり$+\lambda$および $-\lambda$（$\lambda > 0$）の静電荷がそれぞれ一様に分布している．各導体内の電荷分布は中心軸対称とする．

(i) 導体の間の点 P$(0, 0, z)$ $(a < z < d - a)$ における電界$\boldsymbol{E}$の大きさと向きを求めよ．

(ii) 導体間のy軸方向単位長さあたりの静電容量C_{12}を求めよ．

(2) Fig. 1(b)に示すように，真空中で，y 軸と平行な半径aの無限長円柱導体 3 を，xy 平面に平行な接地された無限平板導体の表面から距離h（$h \gg a$）の位置に配置する．導体 3 の中心軸の座標を$x = 0$，$z = h$とする．導体 3 にy軸方向単位長さあたり$+\lambda$（$\lambda > 0$）の静電荷が一様に分布しているとき，以下の問に答えよ．ただし，真空の誘電率をε_0とし，円柱導体内の電荷分布は中心軸対称とする．

(a) Fig. 1(b)に示すように導体 3 と無限平板導体の断面を描き，電気力線を示せ．

(b) 導体 3 と無限平板導体の間のy軸方向単位長さあたりの静電容量C_3を求めよ．

(c) 導体 3 に加え，y 軸と平行な別の半径aの無限長円柱導体を$x = 2h$, $z = h$に設置した．このとき導体 3 と無限平板導体の間のy軸方向単位長さあたりの静電容量C_3'を求めよ．

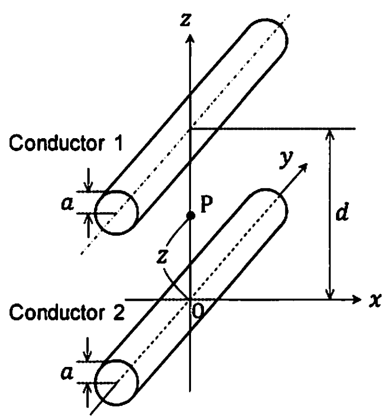

Fig. 1(a)

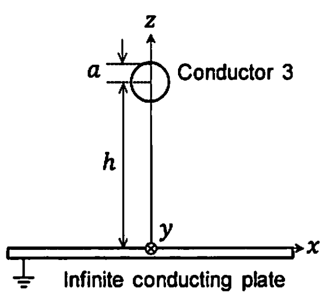

Fig. 1(b)

(1) As shown in Fig. 1(a), infinitely long cylindrical conductors 1 and 2 of radius a are located in parallel, separated by a distance d $(d \gg a)$ in vacuum. The central axis of conductor 2 is set along the y axis and the coordinates of the central axis of conductor 1 are $x = 0$ and $z = d$. Answer the following questions. Here the permeability and permittivity of the vacuum are μ_0 and ε_0, respectively.

(a) A constant current I flows in conductor 1 towards the positive y direction and a constant current I flows in conductor 2 towards the negative y direction. The current flow is uniform through the cross-section of each conductor.

(i) Find the magnitude and direction of the magnetic flux density $\boldsymbol{B}$ at point P (0, 0, z) between the conductors ($a \leq z \leq d - a$).

(ii) Find the self-inductance per unit length in the y direction L of the round-trip line consisting of conductors 1 and 2. Here ignore the magnetic flux inside both conductors.

(b) Static charges per unit length in the y direction of $+\lambda$ and $-\lambda$ $(\lambda > 0)$ are uniformly distributed in conductors 1 and 2, respectively. The charge distribution within each conductor is symmetrical with respect to the central axis.

(i) Find the magnitude and direction of the electric field $\boldsymbol{E}$ at point P (0, 0, z) between the conductors ($a < z < d - a$).

(ii) Find the electrostatic capacitance per unit length in the y direction C_{12} between the conductors.

(2) As shown in Fig. 1(b), an infinitely long cylindrical conductor 3 of radius a parallel to the y-axis is located at a distance h $(h \gg a)$ from the surface of a grounded infinite conducting plate parallel to the xy plane in vacuum. The coordinates of the central axis of conductor 3 are $x = 0$ and $z = h$. When conductor 3 is uniformly charged with a charge density per unit length in the y direction of $+\lambda$ $(\lambda > 0)$, answer the following questions. Here the permittivity of the vacuum is ε_0 and charge distribution within cylindrical conductors is symmetrical with respect to the central axes.

(a) Draw the cross section of conductor 3 and the conducting plate as shown in Fig. 1(b) and show the electric lines of force.

(b) Find the capacitance per unit length in the y direction C_3 between conductor 3 and the conducting plate.

(c) In addition to conductor 3, another infinitely long cylindrical conductor of radius a parallel to the y-axis is located at $x = 2h$, $z = h$. Find the capacitance per unit length in the y direction

C_3' between conductor 3 and the conducting plate.

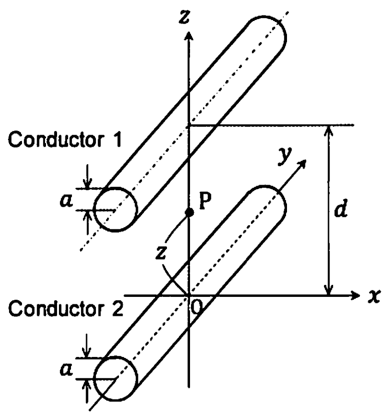

Fig. 1(a)

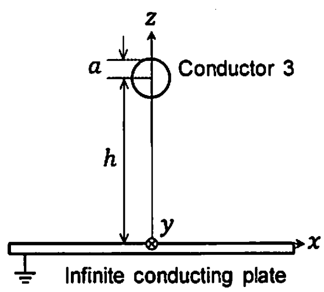

Fig. 1(b)

2025 年 3 月実施
問題 2　電気回路
（1 頁目／4 頁中）

Fig. 2(a)に示すように，無損失線路の送電端と受電端に，角周波数 ω [rad/s] の正弦波交流電源とインピーダンス Z [Ω] の負荷をそれぞれ接続した．線路の二次定数 (伝送定数と特性インピーダンス) は (γ, Z_c)である．時刻 t [s] および線路上の位置 x [m]における線間電圧，線路電流をそれぞれ $v(x,t) = V_x e^{j\omega t}$, $i(x,t) = I_x e^{j\omega t}$で表したとき，複素振幅 V_x, I_xは次式で与えられる．

$$V_x = V^+ e^{\gamma x} + V^- e^{-\gamma x},$$

$$I_x = \frac{1}{Z_c}(V^+ e^{\gamma x} - V^- e^{-\gamma x}),$$

$$\gamma = \alpha + j\beta.$$

ここで，V^+とV^-はそれぞれ受電端における入射電圧波と反射電圧波の複素振幅を表し，α, β, j はそれぞれ減衰定数 [Np/m]，位相定数 [rad/m]，虚数単位である．$x = 0$ は線路の受電端の位置とする．電源の出力インピーダンスはZ_cとする．以下の問に答えよ．

(1) Fig. 2(a)において，$x = 0$ における線間電圧の複素振幅をV_0，線路電流の複素振幅をI_0とする．
  - (a) V^+とV^-を，V_0, I_0, Z_c, γ のうち必要な変数を用いて表せ．
  - (b) V_xとI_xを，V_0, I_0, Z_c, γ のうち必要な変数を用いて表せ．

(2) Fig. 2(a)において $Z = Z_c$ としたとき，線路上の任意の位置から受電端側を見たインピーダンスがZ_cとなることを証明せよ．

(3) Fig. 2(a)において，単位長さあたりの線路インダクタンスを $L = 0.25$ [μH/m], 単位長さあたりの線間容量を $C = 100$ [pF/m], 角周波数を $\omega = 10^9$ [rad/s]とする．
  - (a) 線路の特性インピーダンス Z_c, 減衰定数 α, 位相定数 β を求めよ．
  - (b) $Z = 50 + j100$ [Ω]のとき，$x = 0$ における電圧の反射係数と電圧定在波比を求めよ．
  - (c) 受電端を短絡したとき，線路内で $|V_x|$ が最大となる点のうち，最も受電端に近い点の位置を求めよ．

(4) Fig. 2(b)に示すように，受電端に接続する負荷を，二次定数が (γ_1, Z_{c1}) の線路とインピーダンス Z_{c1} の負荷で置き換えた．$x = 0$ における電圧の反射係数と透過係数を Z_c, Z_{c1} を用いて表せ．

2025 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(2 頁目／4 頁中)

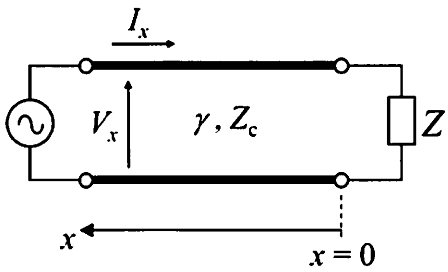

Fig. 2(a)

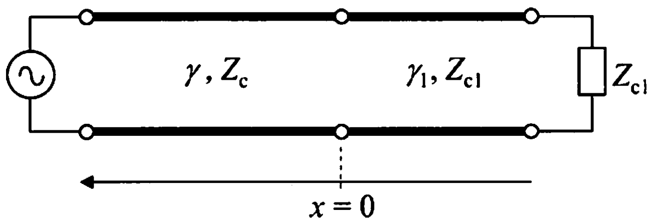

Fig. 2(b)

A sinusoidal AC power supply of angular frequency ω [rad/s] and a load of impedance Z [Ω] are connected to the transmission and receiving ends of a lossless transmission line, respectively, as shown in Fig. 2(a). Secondary constants (the propagation constant and the characteristic impedance) of the transmission line are (γ, Z_c). The line voltage and current at time t [s] and position x [m] on the line can be expressed as $v(x,t) = V_x e^{j\omega t}$ and $i(x,t) = I_x e^{j\omega t}$, respectively. The complex amplitudes V_x and I_x are given by

$$V_x = V^+ e^{\gamma x} + V^- e^{-\gamma x},$$

$$I_x = \frac{1}{Z_c}(V^+ e^{\gamma x} - V^- e^{-\gamma x}),$$

$$\gamma = \alpha + j\beta.$$

Here, V^+ and V^- are the complex amplitudes of the forward and reflected voltage waves at the receiving end, and α, β, and j are the attenuation constant [Np/m], the phase constant [rad/m], and the imaginary unit, respectively. $x = 0$ is defined as the position of the receiving end. Assume that the output impedance of the power supply is Z_c. Answer the following questions.

(1) The complex amplitudes of the line voltage and current at $x = 0$ in Fig. 2(a) are given by V_0 and I_0.

  (a) Express V^+ and V^- in terms of V_0, I_0, Z_c, and γ as necessary.

  (b) Express V_x and I_x in terms of V_0, I_0, Z_c, and γ as necessary.

(2) For $Z = Z_c$ in Fig. 2(a), prove that the impedance viewed from an arbitrary position on the line towards the receiving end is equal to Z_c.

(3) Let the line inductance per unit length be $L = 0.25$ [μH/m], the line capacitance per unit length be $C = 100$ [pF/m], and the angular frequency be $\omega = 10^9$ [rad/s] in Fig. 2(a).

  (a) Find the characteristic impedance Z_c, the attenuation constant α, and the phase constant β of the transmission line.

  (b) For $Z = 50 + j100$ [Ω], find both the voltage reflection coefficient at $x = 0$ and the voltage standing wave ratio.

  (c) When shorting the receiving end, find the position closest to the receiving end, at which $|V_x|$ on the transmission line is maximum.

(4) The load connected to the receiving end is replaced by a transmission line of secondary constants (γ_1, Z_{c1}) and a load of impedance Z_{c1} as shown in Fig. 2(b). Express both the voltage reflection and transmission coefficients at $x = 0$ in terms of Z_c and Z_{c1}.

2025 年 3 月実施
問題 2　電気回路
(4 頁目／4 頁中)

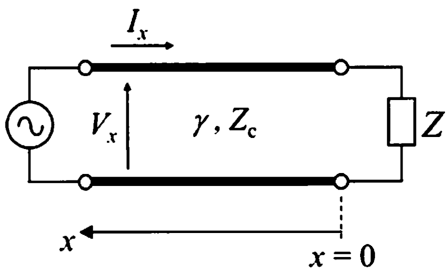

Fig. 2(a)

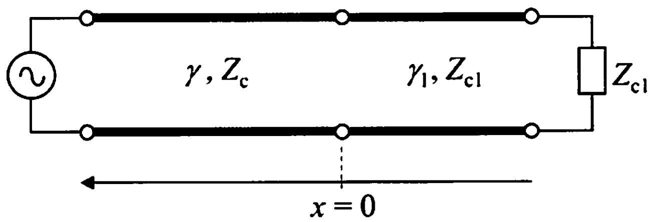

Fig. 2(b)

2025 年 3 月実施
問題 3　計算機ハードウェア
（1 頁目／4 頁中）

nを正整数とし，n変数 3 値入力 2 値出力関数$F:\{0,1,2\}^n \to \{0,1\}$を考える．$X_1, X_2, \ldots, X_n$は 0，1，または2 を値としてとる入力変数である．入力変数X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ならびに入力値集合の部分集合$S \subseteq \{0,1,2\}$に対し，$X_i \in S$のとき$X_i{}^S = 1$，および $X_i \notin S$のとき$X_i{}^S = 0$と定義する．任意の $S_1, S_2, \ldots, S_n \subseteq \{0,1,2\}$ に対して$X_1{}^{S_1} X_2{}^{S_2} \cdots X_n{}^{S_n}$を論理積項と呼ぶ．論理積項の論理和を積和形と呼ぶ．論理積項$X_1{}^{S_1} X_2{}^{S_2} \cdots X_n{}^{S_n}$が全ての$i = 1, 2, \ldots, n$について$|S_i| = 1$を満たすとき，これを最小項と呼ぶ．同じ関数$F$を表現する積和形のうち論理積項の数が最小のものを最小積和形と呼ぶ．例えば，X_1およびX_2を入力変数とする関数Fが Fig. 3(a)のように定義される場合，Fの最小項のみからなる積和形と最小積和形はそれぞれ以下のようになる．

$$F(X_1, X_2) = X_1{}^{\{0\}} X_2{}^{\{2\}} \vee X_1{}^{\{2\}} X_2{}^{\{0\}} \vee X_1{}^{\{2\}} X_2{}^{\{1\}} \quad \text{(最小項のみからなる積和形)}$$

$$F(X_1, X_2) = X_1{}^{\{0\}} X_2{}^{\{2\}} \vee X_1{}^{\{2\}} X_2{}^{\{0,1\}} \quad \text{(最小積和形)}$$

(1) X_1およびX_2を入力変数とする 2 変数 3 値入力 2 値出力関数Fは次のように定義される．

$$F(X_1, X_2) = X_1{}^{\{1\}} X_2{}^{\{0\}} \vee X_1{}^{\{1\}} X_2{}^{\{2\}} \vee X_1{}^{\{2\}} X_2{}^{\{0\}} \vee X_1{}^{\{2\}} X_2{}^{\{2\}}$$

以下の問に答えよ．

(a) 全入力に対する関数Fの出力を示すように Fig. 3(b)の空欄を埋めよ．解答には Fig. 3(b)を転記して使用すること．

(b) 関数Fの最小積和形を求めよ．導出過程も示すこと．

(2) 関数FはX_1，X_2，およびX_3を入力変数とする 3 変数 3 値入力 2 値出力関数であり，全入力に対する関数Fの出力は Fig. 3(c)のように定義される．以下の問に答えよ．

(a) 関数Fを表す最小項のみからなる積和形を示せ．

(b) 関数Fの最小積和形を求めよ．導出過程も示すこと．

2025 年 3 月実施
問題 3　計算機ハードウェア
（2頁目／4 頁中）

X_1	X_2	F
0	0	0
0	1	0
0	2	1
1	0	0
1	1	0
1	2	0
2	0	1
2	1	1
2	2	0

Fig. 3(a)

X_1	X_2	F
0	0	
0	1	
0	2	
1	0	
1	1	
1	2	
2	0	
2	1	
2	2	

Fig. 3(b)

X_1	X_2	X_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	2	1
0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	2	0
0	2	0	0
0	2	1	1
0	2	2	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	2	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	2	1
1	2	0	0
1	2	1	1
1	2	2	0
2	0	0	0
2	0	1	0
2	0	2	1
2	1	0	0
2	1	1	0
2	1	2	0
2	2	0	0
2	2	1	1
2	2	2	0

Fig. 3(c)

Let n be a positive integer, and consider an n-variable, 3-valued input, and 2-valued output function $F: \{0,1,2\}^n \rightarrow \{0,1\}$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ are input variables that take 0, 1, or 2 as values. For input variables X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) and a subset $S \subseteq \{0,1,2\}$ of the input value set, it is defined that $X_i{}^S = 1$ if $X_i \in S$, and $X_i{}^S = 0$ if $X_i \notin S$. For any $S_1, S_2, \dots, S_n \subseteq \{0,1,2\}$, $X_1{}^{S_1} X_2{}^{S_2} \cdots X_n{}^{S_n}$ is called a logical product term. A logical sum of logical product terms is called a sum-of-products form. When a logical product term $X_1{}^{S_1} X_2{}^{S_2} \cdots X_n{}^{S_n}$ satisfies $|S_i| = 1$ for every $i = 1, 2, \dots, n$, it is called a minterm. Among the sum-of-products forms representing the same function F, one with the minimum number of logical product terms is called a minimum sum-of-products form. For example, when a function F with input variables X_1 and X_2 is defined as in Fig. 3(a), a sum-of-products form consisting of minterms only, and a minimum sum-of-products form, of F are as follows:

$$F(X_1, X_2) = X_1{}^{\{0\}} X_2{}^{\{2\}} \vee X_1{}^{\{2\}} X_2{}^{\{0\}} \vee X_1{}^{\{2\}} X_2{}^{\{1\}} \quad \text{(sum-of-products form consisting of minterms only)}$$

$$F(X_1, X_2) = X_1{}^{\{0\}} X_2{}^{\{2\}} \vee X_1{}^{\{2\}} X_2{}^{\{0,1\}} \quad \text{(minimum sum-of-products form)}$$

(1) The 2-variable, 3-valued input, and 2-valued output function F with input variables X_1 and X_2 is defined as follows:

$$F(X_1, X_2) = X_1{}^{\{1\}} X_2{}^{\{0\}} \vee X_1{}^{\{1\}} X_2{}^{\{2\}} \vee X_1{}^{\{2\}} X_2{}^{\{0\}} \vee X_1{}^{\{2\}} X_2{}^{\{2\}}$$

Answer the following questions.

(a) Fill in Fig. 3(b) so that it shows the output of the function F for all inputs. Copy Fig. 3(b) and use it for your answer.

(b) Find a minimum sum-of-products form of the function F. Also show the derivation process.

(2) The function F is a 3-variable, 3-valued input, and 2-valued output function with input variables X_1, X_2, and X_3, and Fig. 3(c) defines the output of F for all inputs. Answer the following questions.

(a) Show a sum-of-products form consisting of minterms only that represents the function F.

(b) Find a minimum sum-of-products form of the function F. Also show the derivation process.

2025 年 3 月実施
問題 3　計算機ハードウェア
(4頁目／4 頁中)

X_1	X_2	F
0	0	0
0	1	0
0	2	1
1	0	0
1	1	0
1	2	0
2	0	1
2	1	1
2	2	0

Fig. 3(a)

X_1	X_2	F
0	0	
0	1	
0	2	
1	0	
1	1	
1	2	
2	0	
2	1	
2	2	

Fig. 3(b)

X_1	X_2	X_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	2	1
0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	2	0
0	2	0	0
0	2	1	1
0	2	2	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	0	2	1
1	1	0	1
1	1	1	0
1	1	2	1
1	2	0	0
1	2	1	1
1	2	2	0
2	0	0	0
2	0	1	0
2	0	2	1
2	1	0	0
2	1	1	0
2	1	2	0
2	2	0	0
2	2	1	1
2	2	2	0

Fig. 3(c)

2025年3月実施
問題4 計算機ソフトウェア
(1頁目／2頁中)

次のC言語風の関数 f と g を考える．ただし u は整数定数，op は2つの整数を受け取り1つの整数を返す関数とする．また，整数の大きさに制限はないとする．n/2 および n%2 はそれぞれ n を2で割ったときの商および余りを表す．

```
int f(int m, int n) {
  if (n == 0) return u;
  else return op(m,f(m,n-1));
}

int g(int m, int n) {
  if (n == 0) return u;
  else if (n%2 == 0) return g(op(m,m),n/2);
  else return op(m,g(m,n-1));
}
```

任意の整数 m と非負整数 n に対し，f(m,n) および g(m,n) を計算する際に op が呼ばれる回数をそれぞれ A_n および B_n とする．以下の問に答えよ．

(1) u を0とし，任意の整数 x と y に対し op(x,y) は x+y に等しいとする．f(2,3) および A_3 を求めよ．途中の計算も書くこと．

(2) u を1とし，任意の整数 x と y に対し op(x,y) は x*y に等しいとする．g(3,5) および B_5 を求めよ．途中の計算も書くこと．

(3) $n \geq 2$ ならば $\log_2 n < B_n \leq 2\log_2 n$ となることを n に関する帰納法で示せ．

(4) u と op が与えられ，任意の整数 x と非負整数 y に対し，op(x,x) は f(x,2) と等しく，f(f(x,2),y) は f(x,2*y) と等しいとする．任意の整数 m と非負整数 n に対し f(m,n) と g(m,n) は等しいことを n に関する帰納法で示せ．

2025年3月実施
問題4 計算機ソフトウェア
(2頁目／2頁中)

Consider the following functions f and g in a C-like language, where u is a constant integer, op is a function that takes two integers and returns an integer, and the size of integers is unlimited. n/2 and n%2 respectively denote the quotient and remainder of n when divided by 2.

```
int f(int m, int n) {
  if (n == 0) return u;
  else return op(m,f(m,n-1));
}

int g(int m, int n) {
  if (n == 0) return u;
  else if (n%2 == 0) return g(op(m,m),n/2);
  else return op(m,g(m,n-1));
}
```

For any integer m and non-negative integer n, let $A_{\mathtt{n}}$ and $B_{\mathtt{n}}$ respectively be the numbers of calls to op when f(m,n) and g(m,n) are computed. Answer the following questions.

(1) Let u be 0 and op(x,y) equal x+y for any integers x and y. Find f(2,3) and A_3. Show also the intermediate calculation.

(2) Let u be 1 and op(x,y) equal x*y for any integers x and y. Find g(3,5) and B_5. Show also the intermediate calculation.

(3) Show by induction on n that $\log_2 \mathtt{n} < B_{\mathtt{n}} \leq 2\log_2 \mathtt{n}$ if $\mathtt{n} \geq 2$.

(4) Suppose that u and op are given, and that for any integer x and non-negative integer y, op(x,x) equals f(x,2), and f(f(x,2),y) equals f(x,2*y). Show that f(m,n) equals g(m,n) for any integer m and non-negative integer n by induction on n.

2025 年 3 月実施
問題 5　物理
(1 頁目／2 頁中)

N 個の独立した粒子で構成され，温度 T の熱浴との間で熱平衡状態にある系を考える．ここで，この系における粒子の出入りはなく，粒子数の変化はないものとする．また，各々の粒子は二つのエネルギー $\varepsilon_1 = 0$ と $\varepsilon_2 = E_{\mathrm{A}}$ のいずれかの状態を取り，粒子間の相互作用はないものとする．一定体積下において系は外界に仕事をすることはないものとする．系の分配関数は Z_N，ボルツマン定数は k_{B}，ヘルムホルツの自由エネルギー F_N は $-k_{\mathrm{B}}T\log Z_N$ で表されるものとする．

(1) $N = 1$ の系を考える．ここで，この系の分配関数 Z_1 は $\displaystyle\sum_{i=1}^{2}\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$，粒子が ε_i の状態を取る確率 p_i は $\dfrac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k_{\mathrm{B}}T}\right)}{Z_1}$ で表され，$p_1 + p_2 = 1$ である．以下の問に答えよ．

(a) Z_1，p_1，p_2 を T，E_{A}，k_{B} のうちから必要なものを用いて表せ．

(b) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F_1を T，E_{A}，k_{B} のうちから必要なものを用いて表せ．

(2) $N > 1$ の系を考える．ここで，この系の分配関数 Z_N は $(Z_1)^N$，エントロピー S_N は $-\dfrac{\partial F_N}{\partial T}$，内部エネルギー U_N は $F_N + TS_N$で表される．以下の問に答えよ．

(a) この系のヘルムホルツの自由エネルギー F_N を T，N，E_{A}，k_{B} のうちから必要なものを用いて表せ．

(b) S_N と U_N を T，N，E_{A}，k_{B} のうちから必要なものを用いて表せ．さらに，縦軸を $\dfrac{U_N}{NE_{\mathrm{A}}}$，横軸を $\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{E_{\mathrm{A}}}$ とするグラフの概形を描け．

(c) この系の一定体積下での熱容量（系の温度を 1 K 上昇させるために必要な熱量）C_N を T，N，E_{A}，k_{B} のうちから必要なものを用いて表せ．

2025 年 3 月実施
問題 5　物理
（2 頁目／2 頁中）

Consider a system composed of N independent particles in thermal equilibrium with a thermal reservoir at temperature T. Here, assume that no particle enters or leaves the system, and there is no change in the number of particles. Moreover, assume that each particle takes one of two states with either energy $\varepsilon_1 = 0$ or $\varepsilon_2 = E_{\mathrm{A}}$ and there is no interaction between particles. Suppose that no external work is done when the system volume is constant. Suppose that the partition function for the system is Z_N, and the Boltzmann constant is k_{B}, and the Helmholtz free energy F_N is expressed as $-k_{\mathrm{B}}T \log Z_N$.

(1) Consider a system with $N = 1$. Here, for this system, the partition function Z_1 is expressed as $\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k_{\mathrm{B}}T}\right)$, the probability p_i that the particle takes the state with energy ε_i is expressed as $\dfrac{\exp\left(-\frac{\varepsilon_i}{k_{\mathrm{B}}T}\right)}{Z_1}$, and $p_1 + p_2 = 1$. Answer the following questions.

- (a) Write expressions for Z_1, p_1, and p_2 using the necessary terms from T, E_{A}, and k_{B}.
- (b) Write an expression for the Helmholtz free energy F_1 of the system using the necessary terms from T, E_{A}, and k_{B}.

(2) Consider a system with $N > 1$. Here, for this system, the partition function Z_N is expressed as $(Z_1)^N$, the entropy S_N is expressed as $-\dfrac{\partial F_N}{\partial T}$, and the internal energy U_N is expressed as $F_N + TS_N$. Answer the following questions.

- (a) Write an expression for the Helmholtz free energy F_N of the system using the necessary terms from T, N, E_{A}, and k_{B}.
- (b) Write expressions for S_N and U_N using the necessary terms from T, N, E_{A}, and k_{B}. Moreover, sketch a graph with $\dfrac{U_N}{NE_{\mathrm{A}}}$ as the vertical axis and $\dfrac{k_{\mathrm{B}}T}{E_{\mathrm{A}}}$ as the horizontal axis.
- (c) Write an expression for the heat capacity (the amount of heat needed for a temperature increase of 1 K) C_N at constant volume of the system using the necessary terms from T, N, E_{A}, and k_{B}.

2025 年 3 月実施
問題 6　数学基礎
(1 頁目／2 頁中)

(1) 複素平面上の領域 $|z|<1$ の任意の複素数 z に対して，以下の問に答えよ.

(a) 有限の任意の正の整数 N に対して，$1+\sum_{n=1}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$ が成り立つことを示せ.

(b) $1+\sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ が成り立つことを示せ.

(c) $1+\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$ が成り立つことを示せ.

(d) $f(z) = \frac{\exp(z)}{(1-z)^2}$ の $z=0$ のまわりのテイラー展開 $a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ の $a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3$ までの項を求めよ.

(2) 正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$ を考える. 以下の問に答えよ.

(a) A の転置行列 ${}^tA$ を書け.

(b) ${}^tAA$ を求めよ.

(c) A の行列式 $|A|$ の値を求めよ.

2025 年 3 月実施
問題 6　数学基礎
(2 頁目／2 頁中)

(1) Answer the following questions for any complex number z of a region $|z|<1$ in the complex plane.

(a) For any finite positive integer N, show that $1+\sum_{n=1}^{N} z^n = \frac{1-z^{N+1}}{1-z}$.

(b) Show that $1+\sum_{n=1}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

(c) Show that $1+\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) z^n = \frac{1}{(1-z)^2}$.

(d) Find the Taylor expansion $a_0+\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ of $f(z)=\frac{\exp(z)}{(1-z)^2}$ around $z=0$ up to $a_0+a_1 z+a_2 z^2+a_3 z^3$.

(2) Consider the square matrix $A=\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$. Answer the following questions.

(a) Write the transpose matrix ${}^{t}\!A$ of A.

(b) Calculate ${}^{t}\!AA$.

(c) Find the determinant $|A|$ of A.