

2025 年 8 月 26 日 9:40－12:10

大学院工学研究科

電気エネルギーシステム専攻

通信工学専攻

電子工学専攻

大学院医工学研究科

工学系コース電気・情報系

大学院入学試験問題

基 礎 専 門 科 目

Basic and Specialized Subjects

注意： 問題 1～6 の中から 3 問題を選んで、答案用紙（問題ごとに 1 枚）に解答せよ。答案用紙が不足する場合は裏面を使って良い。問題は和文と英文を併記してある。

Attention: Choose three questions out of Questions No. 1–6 and answer each of them on a separate answer sheet. You may use the backside. Questions are written in both Japanese and English.

2025 年 8 月 26 日 9:40—11:20

大学院情報科学研究科 情報・生命系群

大学院入学試験問題

基 礎 専 門 科 目

Basic and Specialized Subjects

注意： 問題 1～6の中から2問題を選んで、答案用紙（問題ごとに1枚）に解答せよ。答案用紙が不足する場合は裏面を使って良い。問題は和文と英文を併記してある。

Attention: Choose two questions out of Questions No. 1–6 and answer each of them on a separate answer sheet. You may use the backside. Questions are written in both Japanese and English.

2025 年 8 月実施
問題 1 電磁気学
(1 頁目/3 頁中)

平面電磁波について以下の問に答えよ. $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ は xyz 空間における位置ベクトル, $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ はそれぞれ x, y, z 軸方向の基底ベクトル, k_0, ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空中における電磁波の波数, 誘電率, 透磁率である.

- (1) Fig. 1(a) に示すように, x 方向の電界成分をもつ平面電磁波が, 導体表面の法線からの角度 θ_1 で真空中から完全導体に入射し, 角度 θ_2 で完全に反射した. 完全導体表面を $z = 0$ にとる. 入射波と反射波の複素電界をそれぞれ $\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}}E_1e^{-jk_0\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{r}}, \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}}E_2e^{-jk_0\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{r}}$ と表す. ここで \mathbf{a}_1 および \mathbf{a}_2 は入射波および反射波の伝搬方向を示す単位ベクトルで, 例えば \mathbf{a}_1 は $\mathbf{a}_1 = \hat{\mathbf{y}}\sin\theta_1 - \hat{\mathbf{z}}\cos\theta_1$ と書くことができる. 次の問に答えよ.
- (a) \mathbf{E}_1 を, $E_1, k_0, \theta_1, y, z, \hat{\mathbf{x}}$ を用いて表せ.
- (b) 完全導体表面における電界の接線成分の境界条件を述べよ.
- (c) 問(1)(b)の条件を用い, $\theta_1 = \theta_2$ であることを導け.

- (2) Fig. 1(b) に示すように, x 方向の電界成分をもつ平面電磁波が, 真空中から, 比誘電率 ϵ_r , 比透磁率 1 の無損失誘電体媒質に, 誘電体表面の法線からの角度 θ で入射した. 誘電体表面を $z = 0$ にとる. 入射波, 反射波, 透過波の複素電界をそれぞれ $\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}}E_1e^{-jk_0\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{r}}, \mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}}E_2e^{-jk_0\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{r}}, \mathbf{E}_3 = \hat{\mathbf{x}}E_3e^{-jn k_0\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{r}}$ と表す. ここで $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ はそれぞれ入射波, 反射波, 透過波の伝搬方向を示す単位ベクトル, $n = \sqrt{\epsilon_r}$ は誘電体の屈折率である. 誘電体表面の法線からの反射波の角度を θ , 透過波の角度を ϕ とし, 次の問に答えよ.
- (a) 異なる誘電体媒質の境界面における電界の接線成分の境界条件を述べよ.
- (b) 問(2)(a)の条件を用いて θ, ϕ, n の関係を導け.
- (c) 入射波の複素磁界 \mathbf{H}_1 を, $E_1, k_0, \epsilon_0, \mu_0, \theta, y, z, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ を用いて表せ.
- (d) 電界の反射係数 E_2/E_1 を, θ, ϕ, n を用いて表せ.

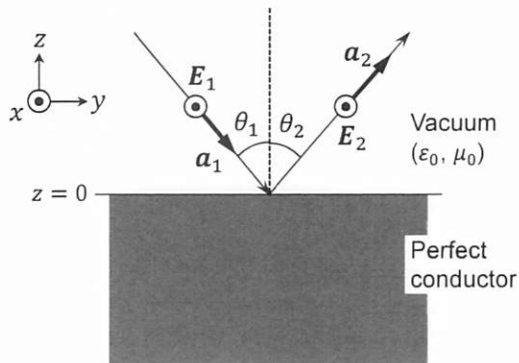


Fig. 1(a)

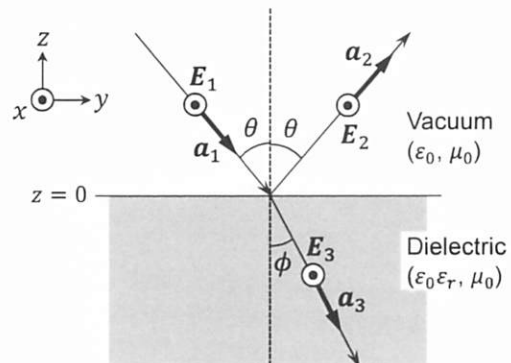


Fig. 1(b)

2025 年 8 月実施
問題 1 電磁気学
(2 頁目 / 3 頁中)

Answer the following questions about a plane electromagnetic wave. $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ is the position vector in xyz -space, and $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, and $\hat{\mathbf{z}}$ are the basis vectors in the directions of the x -, y -, and z -axes, respectively. k_0 , ϵ_0 , and μ_0 are the wavenumber of the electromagnetic wave, the permittivity, and the permeability in a vacuum, respectively.

(1) As shown in Fig. 1(a), a plane electromagnetic wave with an electric field component in the x direction is incident from vacuum on a perfect conductor at an angle θ_1 from the normal to the conductor's surface and is completely reflected at an angle θ_2 . The surface of the perfect conductor is at $z = 0$. The complex electric fields of the incident and reflected waves are represented as $\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}}E_1e^{-jk_0\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{r}}$ and $\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}}E_2e^{-jk_0\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{r}}$, respectively. Here, \mathbf{a}_1 and \mathbf{a}_2 are unit vectors indicating the propagation directions of the incident and reflected waves, respectively; for example, \mathbf{a}_1 can be written as $\mathbf{a}_1 = \hat{\mathbf{y}}\sin\theta_1 - \hat{\mathbf{z}}\cos\theta_1$. Answer the following questions.

- (a) Express \mathbf{E}_1 in terms of E_1 , k_0 , θ_1 , y , z , and $\hat{\mathbf{x}}$.
- (b) State the boundary condition for the tangential component of the electric field on the surface of a perfect conductor.
- (c) Using the condition in question (1)(b), derive that $\theta_1 = \theta_2$.

(2) As shown in Fig. 1(b), a plane electromagnetic wave with an electric field component in the x direction is incident from vacuum on a lossless dielectric medium with relative permittivity ϵ_r and relative permeability 1, at an angle θ from the normal to the dielectric's surface. The surface of the dielectric medium is at $z = 0$. The complex electric fields of the incident, reflected, and transmitted waves are represented as $\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{x}}E_1e^{-jk_0\mathbf{a}_1\cdot\mathbf{r}}$, $\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{x}}E_2e^{-jk_0\mathbf{a}_2\cdot\mathbf{r}}$, and $\mathbf{E}_3 = \hat{\mathbf{x}}E_3e^{-jn k_0\mathbf{a}_3\cdot\mathbf{r}}$, respectively. Here, \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 , and \mathbf{a}_3 are unit vectors indicating the propagation directions of the incident, reflected, and transmitted waves, respectively, and $n = \sqrt{\epsilon_r}$ is the refractive index of the dielectric. Let the angles of the reflected and transmitted waves from the normal to the dielectric's surface be θ and ϕ , respectively, and answer the following questions.

- (a) State the boundary condition for the tangential component of the electric field at the interface between different dielectric media.
- (b) Using the condition in question (2)(a), derive the relationship between θ , ϕ , and n .
- (c) Express the complex magnetic field of the incident wave \mathbf{H}_1 in terms of E_1 , k_0 , ϵ_0 , μ_0 , θ , y , z , $\hat{\mathbf{y}}$, and $\hat{\mathbf{z}}$.
- (d) Express the reflection coefficient of the electric field E_2/E_1 in terms of θ , ϕ , and n .

2025 年 8 月 実施
問題 1 電磁気学
(3 頁目 / 3 頁中)

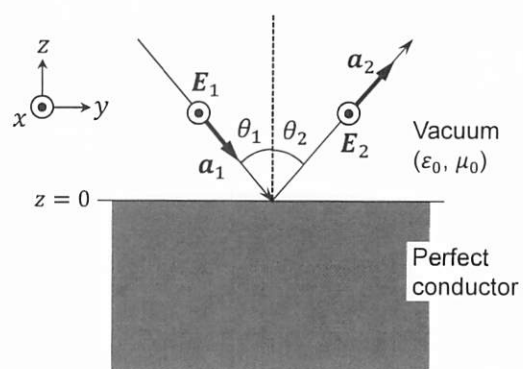


Fig. 1(a)

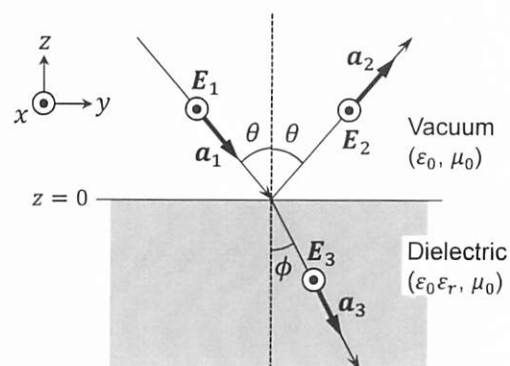


Fig. 1(b)

2025 年 8 月実施
問題 2 電気回路
(1 頁目/2 頁中)

インダクタンス L [H], キャパシタンス C [F], 抵抗 R [Ω] からなる負荷を考える. 虚数単位を j として, 以下の問に答えよ.

- (1) Fig. 2(a)に示すように, 特性インピーダンス Z_c [Ω] の無損失線路の送電端と受電端に, 角周波数 ω [rad/s] の正弦波交流電源と負荷をそれぞれ接続した.
- (a) 受電端から右を見た負荷のインピーダンスを求めよ.
- (b) 受電端の電圧が V [V] で与えられるとき, キャパシタンスおよび抵抗を流れる電流 I_C [A], I_R [A]をそれぞれ求めよ.
- (c) 負荷の力率が 1 になるための抵抗 R の値を ω, L, C を用いて表し, そのような抵抗 R が存在するための角周波数 ω の条件を求めよ. また, このときの負荷のインピーダンスを L, C, R を用いて表せ.
- (d) 負荷の力率が 1 のとき, 受電端における反射係数と透過係数をそれぞれ求めよ.
- (2) Fig. 2(b)に示すように, 負荷に直流電圧源 E [V]とスイッチ S を接続し, 十分時間が経った後に, 時刻 $t=0$ においてスイッチ S を閉じた. 抵抗を流れる電流 $i_R(t)$ [A] が振動するための L, C, R の条件を求めよ. また, そのときの $i_R(t)$ を求めよ.

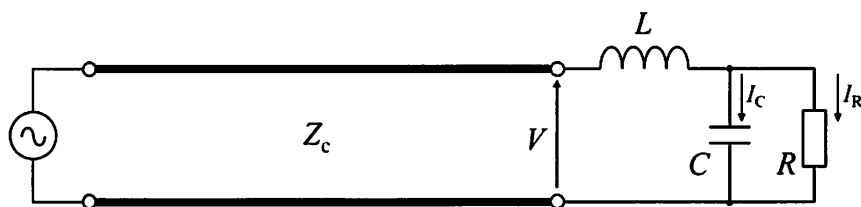


Fig. 2(a)

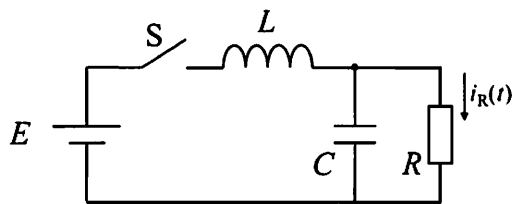


Fig. 2(b)

2025 年 8 月実施
問題 2 電気回路
(2 頁目/2 頁中)

Consider a load consisting of an inductance L [H], a capacitance C [F], and a resistance R [Ω]. Using the imaginary unit j , answer the following questions.

- (1) A sinusoidal AC power supply of angular frequency ω [rad/s] and the load are connected to the transmitting and receiving ends of a lossless transmission line with a characteristic impedance Z_c [Ω], respectively, as shown in Fig. 2(a).
- (a) Find the load impedance viewed from the receiving end towards the right-hand side.
- (b) When the voltage at the receiving end is given by V [V], find both currents I_C [A] and I_R [A] flowing through the capacitance and the resistance.
- (c) Express the value of the resistance R in terms of ω , L , and C that makes the load power factor equal to 1 and determine the condition on the angular frequency ω for such a resistance R to exist. Furthermore, express the impedance of the load in terms of L , C , and R in this case.
- (d) When the load power factor is equal to 1, find both the reflection and transmission coefficients at the receiving end.
- (2) A DC power supply E [V] and a switch S are connected to the load as shown in Fig. 2(b). After a sufficiently long time has passed, the switch S is closed at the time $t = 0$. Determine the condition on L , C , and R for the current $i_R(t)$ [A] flowing through the resistance to oscillate. Furthermore, find the expression for $i_R(t)$ in this case.

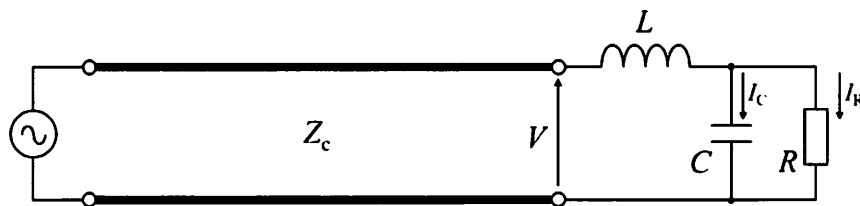


Fig. 2(a)

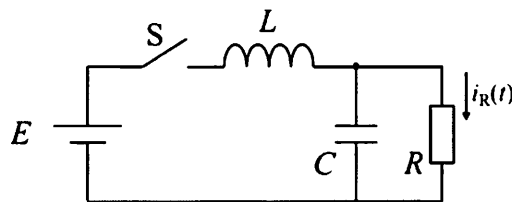


Fig. 2(b)

2025 年 8 月実施
問題 3 計算機ハードウェア
(1 頁目/4 頁中)

クロックに応じて出力が変化する JK フリップフロップを 3 個用いて、3 桁の 2 進数に対応する Q_2, Q_1, Q_0 (最下位ビットが Q_0) を出力する順序回路を考える。例えば、 $Q_2 = 0, Q_1 = 0, Q_0 = 1$ のとき、2 進数 001 を示す。 $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して、 i 番目の JK フリップフロップの入力を J_i, K_i とし、その出力は Q_i とする。以下の問に答えよ。

- (1) Fig. 3(a) は JK フリップフロップの真理値表である。ただし、 $Q(t), Q(t+1)$ は、それぞれ時刻 $t, t+1$ における出力 Q の値を示す。この真理値表から、Fig. 3(b) に示す励起表 (入力 of 駆動条件をまとめた表) を完成させよ。解答には Fig. 3(b) を転記して使用し、Don't Care 記号に * を使うこと。
- (2) Fig. 3(c) に示す順序回路において、初期値 000 から始まり、再び 000 を出力するまでの 3 出力値 Q_2, Q_1, Q_0 の遷移を示せ。遷移は、「000 \rightarrow \cdots \rightarrow 000」の形で示すこと。ただし、 V_{high} は入力 1 を意味する。
- (3) 出力を 10 進数で表現すると、 $0 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ と遷移する順序回路を作りたい。以下の問に答えよ。
 - (a) Fig. 3(d) は、クロックに応じて 3 個の JK フリップフロップの出力 Q_2, Q_1, Q_0 が変化する状態をまとめた全体の励起表である。この励起表を完成させよ。ただし、 $i \in \{0, 1, 2\}$ に対して $Q_i(t), Q_i(t+1)$ は、それぞれ時刻 $t, t+1$ における i 番目の出力 Q_i の値を示す。解答には Fig. 3(d) を転記して使用し、Don't Care 記号に * を使うこと。
 - (b) 3 個の JK フリップフロップの各入力 $J_2, J_1, J_0, K_2, K_1, K_0$ を、出力 Q_2, Q_1, Q_0 を使った論理式で表現せよ。ただし、各論理式は簡潔なものを一つ示すこと。

2025 年 8 月実施
問題 3 計算機ハードウェア
(2 頁目／4 頁中)

$Q(t)$	J	K	$Q(t+1)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

Fig. 3 (a)

$Q(t)$	$Q(t+1)$	J	K
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Fig. 3 (b)

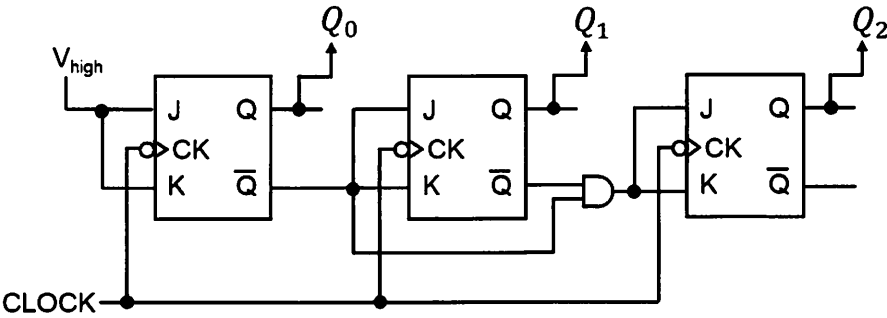


Fig. 3 (c)

t	$Q_2(t)$	$Q_1(t)$	$Q_0(t)$	$Q_2(t+1)$	$Q_1(t+1)$	$Q_0(t+1)$	J_2	K_2	J_1	K_1	J_0	K_0
0	0	0	0									
1												
2												
3												
4				0	0	0						

Fig. 3 (d)

2025 年 8 月実施
問題 3 計算機ハードウェア
(3 頁目 / 4 頁中)

Consider a sequential circuit that outputs Q_2, Q_1, Q_0 corresponding to a 3-digit binary number (the least significant bit is Q_0) using three JK flip-flops whose outputs change according to the clock. For example, if $Q_2 = 0, Q_1 = 0, Q_0 = 1$, then the output is a binary number 001. For $i \in \{0, 1, 2\}$, the inputs of the i -th JK flip-flop are J_i and K_i , and its output is Q_i . Answer the following questions.

- (1) Fig. 3(a) shows the truth table of a JK flip-flop. Here $Q(t)$ and $Q(t + 1)$ are the output Q at time t and $t + 1$, respectively. From the truth table, complete the excitation table, which summarizes the driving conditions for the inputs, shown in Fig. 3(b). Copy Fig. 3(b) and use it for your answer, and use * for the Don't Care symbol.
- (2) For the sequential circuit shown in Fig. 3(c), show the entire transition of the three output values Q_2, Q_1, Q_0 starting from the initial value of 000 and ending with the output of 000 again. The transition should be expressed in the form " $000 \rightarrow \dots \rightarrow 000$ ". Note that V_{high} means input 1.
- (3) We wish to build a sequential circuit whose output transitions from $0 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 0$ when expressed in decimal. Answer the following questions.
 - (a) Fig. 3(d) is the overall excitation table, which summarizes the transition of the outputs Q_2, Q_1, Q_0 of the three JK flip-flops according to the clock. Complete the excitation table. Here for $i \in \{0, 1, 2\}$, $Q_i(t)$ and $Q_i(t + 1)$ are the i -th output Q_i at time t and $t + 1$, respectively. Copy Fig. 3(d) and use it for your answer, and use * for the Don't Care symbol.
 - (b) Express each of the inputs J_2, J_1, J_0, K_2, K_1 , and K_0 of the three JK flip-flops as a logic formula using the outputs Q_2, Q_1 , and Q_0 . In each case the logic formula should be written in a simple form.

2025 年 8 月実施
問題 3 計算機ハードウェア
(4 頁目／4 頁中)

$Q(t)$	J	K	$Q(t+1)$
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
1	0	1	0
0	1	1	1
1	1	1	0

Fig. 3 (a)

$Q(t)$	$Q(t+1)$	J	K
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Fig. 3 (b)

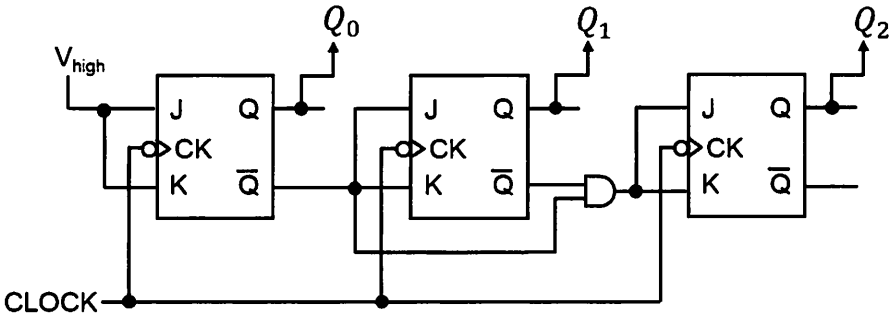


Fig. 3 (c)

t	$Q_2(t)$	$Q_1(t)$	$Q_0(t)$	$Q_2(t+1)$	$Q_1(t+1)$	$Q_0(t+1)$	J_2	K_2	J_1	K_1	J_0	K_0
0	0	0	0									
1												
2												
3												
4				0	0	0						

Fig. 3 (d)

2025 年 8 月実施
問題4 計算機ソフトウェア
(1 頁目 / 2 頁中)

開始記号が S である文脈自由文法 G の生成規則を

$$\begin{aligned} S &\rightarrow t \\ S &\rightarrow f \\ S &\rightarrow SSS\$ \end{aligned}$$

と定義する. ここで, $t, f, \$$ はいずれも終端記号である. この文法 G によって生成される言語 (文字列の集合) を L とする. また, 文字列 w を $tffft\$f\$$ と定義する. このとき, w は文法 G によって導出できるため, $w \in L$ となる. 以下の問に答えよ.

- (1) 文字列 w の導出木 (構文木) を図示せよ.
- (2) 文字列 w は三つの文字列 $w_1, w_2, w_3 \in L$ を用いて $w_1 w_2 w_3 \$$ の形で表すことができる. このとき, 文字列 w_1, w_2, w_3 をそれぞれ示せ.
- (3) 文法 G が無曖昧であることにより, t, f 以外で言語 L に含まれる文字列はすべて三つの文字列 $v_1, v_2, v_3 \in L$ を用いて $v_1 v_2 v_3 \$$ の形で一意に表すことができる. このことを利用して, L 上の二つの再帰関数 size と eval を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \text{size}(t) &= 1 & \text{size}(f) &= 1 & \text{size}(v_1 v_2 v_3 \$) &= \text{size}(v_1) + \text{size}(v_2) + \text{size}(v_3) + 2 \\ \text{eval}(t) &= \text{True} & \text{eval}(f) &= \text{False} & \text{eval}(v_1 v_2 v_3 \$) &= \begin{cases} \text{eval}(v_2) & \text{if } \text{eval}(v_1) = \text{True} \\ \text{eval}(v_3) & \text{if } \text{eval}(v_1) = \text{False} \end{cases} \end{aligned}$$

ここで, $v_1, v_2, v_3 \in L$ とし, 関数 size の出力は整数, 関数 eval の出力である True と False はそれぞれ真理値の真と偽を表す定数である. このとき, 以下の問に答えよ.

- (a) $\text{size}(w)$ と $\text{eval}(w)$ の値を求めよ.
- (b) $\text{size}(u) = 5$ かつ $\text{eval}(u) = \text{True}$ を満たすような文字列 $u \in L$ をすべて挙げよ.
- (c) 二つの文字列 $x, y \in L$ が以下の条件を満たしていると仮定する.
 - y は x を部分文字列として含む
 - $\text{size}(y)$ は $\text{size}(x) + 4$ と等しい
 - $\text{eval}(y)$ は $\text{eval}(x)$ の否定であるこのとき, 文字列 y を x を用いて表せ.
- (d) 任意の文字列 $z \in L$ に対し, $\text{size}(z) = 4k + 1$ となる整数 k が存在することを示せ.

2025 年 8 月実施
問題4 計算機ソフトウェア
(2 頁目 / 2 頁中)

The production rules of a context-free grammar G with the start symbol S are defined as

$$\begin{aligned} S &\rightarrow t \\ S &\rightarrow f \\ S &\rightarrow SSS\$ \end{aligned}$$

where t , f , and $\$$ are terminal symbols. Let L be the language (the set of strings) generated by the grammar G . Define w as the string $tfftf\$$. Then $w \in L$ holds because it can be derived by the grammar G . Answer the following questions.

- (1) Draw the derivation tree (parse tree) of the string w .
- (2) The string w can be expressed in the form $w_1 w_2 w_3 \$$ with three strings $w_1, w_2, w_3 \in L$. Find the individual strings w_1 , w_2 , and w_3 .
- (3) Every string in the language L other than t and f can be uniquely expressed in the form $v_1 v_2 v_3 \$$ with three strings $v_1, v_2, v_3 \in L$ since the grammar G is unambiguous. Using this fact, two recursive functions, size and eval , on L are defined as follows:

$$\begin{aligned} \text{size}(t) &= 1 & \text{size}(f) &= 1 & \text{size}(v_1 v_2 v_3 \$) &= \text{size}(v_1) + \text{size}(v_2) + \text{size}(v_3) + 2 \\ \text{eval}(t) &= \text{True} & \text{eval}(f) &= \text{False} & \text{eval}(v_1 v_2 v_3 \$) &= \begin{cases} \text{eval}(v_2) & \text{if } \text{eval}(v_1) = \text{True} \\ \text{eval}(v_3) & \text{if } \text{eval}(v_1) = \text{False} \end{cases} \end{aligned}$$

where $v_1, v_2, v_3 \in L$, the output of the function size is an integer, and the output of the function eval is the constant True or False representing the Boolean values true and false , respectively. Now answer the following questions.

- (a) Find the values of $\text{size}(w)$ and $\text{eval}(w)$.
- (b) Find all strings $u \in L$ such that $\text{size}(u) = 5$ and $\text{eval}(u) = \text{True}$.
- (c) Assume that two strings $x, y \in L$ satisfy the following conditions:
 - y contains x as a substring,
 - $\text{size}(y)$ is equal to $\text{size}(x) + 4$, and
 - $\text{eval}(y)$ is the negation of $\text{eval}(x)$.

Then express the string y using x .

- (d) For every string $z \in L$, prove that there exists an integer k such that $\text{size}(z) = 4k + 1$.

**2025 年 8 月実施
問題 5 物理
(1頁目/4 頁中)**

x 方向に自由度を有する一次元ポテンシャル $U(x)$ で $x < 0$ から x の正方向に電子(エネルギー E , 質量 m , 電荷 $q(< 0)$)が入射する場合を考える. $U(x)$ は電子のエネルギーが大きくなる方向を正にとる. e はネイピア数, i は虚数単位 $\sqrt{-1}$, \hbar はディラック定数である. 時間に依存しない一次元のシュレディンガー方程式は電子の波動関数の空間部分 $\psi(x)$ を用いて次のように書ける.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

(1) Fig. 5(a)に示す通り, I-III 各領域の $U(x)$ を次のように定義する.

$$\begin{cases} \text{領域 I } [x < 0]: & U(x) = 0 \\ \text{領域 II } [0 \leq x \leq a]: & U(x) = U_0 \\ \text{領域 III } [x > a]: & U(x) = 0 \end{cases}$$

ここで, 障壁エネルギー $U_0 (> E)$ は有限の定数とする.

- (a) シュレディンガー方程式を領域 I で解いた場合, $\psi(x) = e^{ikx} + re^{-ikx}$ と表すことができるとする. 同様に, 領域 III では $\psi(x) = te^{ikx}$ と表すことができるとする. r と t は複素振幅である. k は波数であり, 正の実数である. k を $\{E, \hbar, m\}$ を用いて表せ.
- (b) 領域 II において, シュレディンガー方程式を解くと, $\psi(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$ と表すことができる. A と B はそれぞれ複素振幅である. β は減衰定数であり, 正の実数である. β を $\{E, \hbar, m, U_0\}$ を用いて表せ.
- (c) $\psi(x)$ と $d\psi(x)/dx$ が, $x = a$ で連続である条件から, A と B を $\{a, \beta, k, t\}$ を用いて表し, ここから, 係数比 $|A/B|^2$ を $\{a, \beta\}$ を用いて表せ.

(2) 領域 I に対して領域 III に電圧 $V(> 0)$ を印加し, Fig. 5(b)に示すように, 領域 II でポテンシャル障壁が傾斜した. このとき, 各領域でのポテンシャルは以下の通りである.

2025 年 8 月実施
問題 5 物理
(2 頁目 / 4 頁中)

$$\begin{cases} \text{領域 I } [x < 0]: & U(x) = 0 \\ \text{領域 II } [0 \leq x \leq a]: & U(x) = U_0 + \frac{qV}{a}x \\ \text{領域 III } [x > a]: & U(x) = qV \end{cases}$$

領域 I から領域 III への透過確率 $T(E) \equiv |t(E)|^2$ は C を定数として、次式で近似されたとする。

$$T(E) = C \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{U(x) > E} \sqrt{2m(U(x) - E)} \, dx \right]$$

- (a) $E < U_0 + qV$ の場合, $0 \leq x \leq a$ の全領域で $U(x) > E$ であることに注意し, $T(E)$ を $\{a, C, E, \hbar, m, q, U_0, V\}$ を用いて示せ。
- (b) $E \geq U_0 + qV$ の場合, $0 \leq x \leq a$ のある点 $x = x_0$ において, $U(x) = E$ となる. $0 \leq x < x_0$ のみで $U(x) > E$ であることに注意し, $T(E)$ を $\{a, C, E, \hbar, m, q, U_0, V\}$ を用いて示せ。
- (c) 問(2)(a)と問(2)(b)の場合の違いを次のように定性的に説明する. (i) と (ii) に当てはまる語句を述べよ。

「 $E < U_0 + qV$ の場合, 電圧の印加により $0 \leq x \leq a$ における障壁の平均 (i) が小さくなる. 一方, $E \geq U_0 + qV$ の場合には, 障壁の実効的な (ii) が小さくなる効果が加味されている.」

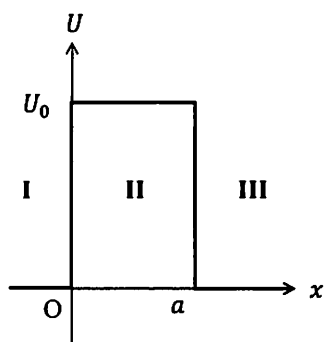


Fig. 5 (a)

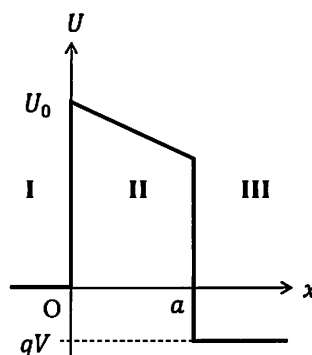


Fig. 5 (b)

2025 年 8 月実施
問題 5 物理
(3頁目／4 頁中)

An electron (energy E , mass m , and charge q (< 0)) is incident from $x < 0$ in the positive x -direction on a one-dimensional potential $U(x)$ with a degree of freedom in the x -direction. The direction of $U(x)$ is defined as positive toward increasing electron energy. Here, e is Napier's constant, i is the imaginary unit ($\sqrt{-1}$), and \hbar is Dirac's constant. Using the electron wavefunction $\psi(x)$, the time-independent one-dimensional Schrödinger equation is as follows:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x).$$

(1) As shown in Fig. 5(a), $U(x)$ in regions I to III is defined as follows:

$$\begin{cases} \text{region I } [x < 0]: & U(x) = 0, \\ \text{region II } [0 \leq x \leq a]: & U(x) = U_0, \\ \text{region III } [x > a]: & U(x) = 0. \end{cases}$$

Here, the barrier energy U_0 ($> E$) is taken as a finite constant.

- (a) When solving the Schrödinger equation in region I, the wavefunction can be expressed as $\psi(x) = e^{ikx} + re^{-ikx}$. Similarly, in region III, it can be expressed as $\psi(x) = te^{ikx}$. Here, r and t are complex amplitudes. k is the wave number which takes any positive real number. Express k in terms of $\{E, \hbar, m\}$.
- (b) Solving the Schrödinger equation in region II gives the solution $\psi(x) = Ae^{\beta x} + Be^{-\beta x}$. Here, A and B are complex amplitudes. β is the decay constant which takes any positive real number. Express β in terms of $\{E, \hbar, m, U_0\}$.
- (c) From the condition of the continuities of $\psi(x)$ and $d\psi(x)/dx$ at $x = a$, express A and B in terms of $\{a, \beta, k, t\}$, and express the coefficient ratio $|A/B|^2$ in terms of $\{a, \beta\}$.

(2) Applying a voltage V (> 0) to region III with respect to region I, as shown in Fig. 5(b), the potential

2025 年 8 月実施
問題 5 物理
(4頁目／4 頁中)

barrier in region II becomes inclined. At this time, $U(x)$ in each region is as follows:

$$\begin{cases} \text{region I } [x < 0]: & U(x) = 0, \\ \text{region II } [0 \leq x \leq a]: & U(x) = U_0 + \frac{qV}{a}x, \\ \text{region III } [x > a]: & U(x) = qV. \end{cases}$$

The transmission probability $T(E) \equiv |t(E)|^2$ from region I to region III is approximated by the following equation, with a constant C :

$$T(E) = C \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \int_{U(x) > E} \sqrt{2m(U(x) - E)} \, dx \right].$$

- (a) In the case of $E < U_0 + qV$, noting that $U(x) > E$ holds over the entire region $0 \leq x \leq a$, express $T(E)$ in terms of $\{a, C, E, \hbar, m, q, U_0, V\}$.
- (b) In the case of $E \geq U_0 + qV$, there exists a point $x = x_0$ in $0 \leq x \leq a$ satisfying $U(x) = E$. Noting that $U(x) > E$ holds only within $0 \leq x < x_0$, express $T(E)$ in terms of $\{a, C, E, \hbar, m, q, U_0, V\}$.
- (c) Describe qualitatively the difference between the two cases in the questions (2)(a) and (2)(b) by completing (i) and (ii) in the following sentences:

"In the case of $E < U_0 + qV$, applying the voltage reduces the average barrier (i) in $0 \leq x \leq a$. On the other hand, in the case of $E \geq U_0 + qV$, the effect of reducing the effective barrier (ii) is also considered."

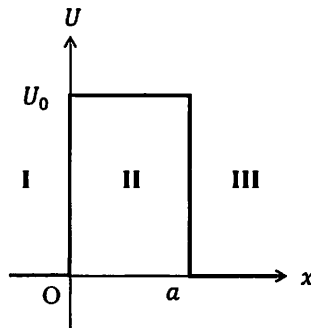


Fig. 5 (a)

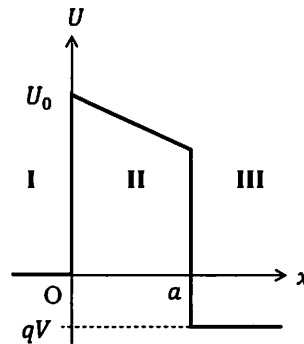


Fig. 5 (b)

2025 年 8 月実施
問題 6 数学基礎
(1 頁目/2 頁中)

- (1) $t \geq 0$ で与えられた関数 $f(t)$ に対してラプラス変換を

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-pt) dt$$

と定義する. ここで, p は実部が正の複素数である. 次の(a)~(c)の間に答えよ.

- (a) 次の関数 $f_a(t)$ に対する $\mathcal{L}[f_a(t)]$ を求めよ.

$$f_a(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < \pi), \\ 0 & (\pi \leq t). \end{cases}$$

- (b) 次の関数 $f_b(t)$ に対する $\mathcal{L}[f_b(t)]$ を求めよ.

$$f_b(t) = \sin(t) \quad (t \geq 0).$$

- (c) 関数 $g(t)$ を次式によって定義する.

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \left(t < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq t \right), \\ \sin(t) & \left(\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \right). \end{cases}$$

次の関数 $f_c(t)$ に対する $\mathcal{L}[f_c(t)]$ を求めよ.

$$f_c(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(t - 2n\pi) \quad (t \geq 0).$$

- (2) xy -平面における図形を考える. 次の(a)~(c)の間に答えよ.

- (a) 直線の方程式は実定数 a, b, c を用いて, $ax + by + c = 0$ ($[a, b] \neq [0, 0]$) と表示される.

3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ が同一直線上にあるための必要十分条件を, 行列式の形の方程式として求めよ.

- (b) 円の方程式は実定数 a, b, c, d を用いて $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ ($a \neq 0$) と表示される.

4 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$ が同一円上にあるための必要十分条件を, 行列式の形の方程式として求めよ.

- (c) 3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を頂点にもつ三角形の面積 S が次式で表されることを示せ.

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Question No. 6: Basic mathematics (2/2)

2025 年 8 月実施
問題 6 数学基礎
(2 頁目/2 頁中)

(1) For a function $f(t)$ in $t \geq 0$, the Laplace transform is defined as

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-pt) dt.$$

Here, p is a complex number with a positive real part. Answer the following questions (a) to (c).

(a) Find $\mathcal{L}[f_a(t)]$ for the following function $f_a(t)$:

$$f_a(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < \pi), \\ 0 & (\pi \leq t). \end{cases}$$

(b) Find $\mathcal{L}[f_b(t)]$ for the following function $f_b(t)$:

$$f_b(t) = \sin(t) \quad (t \geq 0).$$

(c) The function $g(t)$ is defined as the following equation:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \left(t < \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq t \right), \\ \sin(t) & \left(\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \right). \end{cases}$$

Find $\mathcal{L}[f_c(t)]$ for the following function $f_c(t)$:

$$f_c(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} g(t - 2n\pi) \quad (t \geq 0).$$

(2) For shapes on an xy -plane, answer the following questions (a) to (c).

(a) The equation for a straight line is expressed using real constants a , b , and c as $ax + by + c = 0$ ($[a, b] \neq [0, 0]$). Find, as an equation in the form of a determinant, the necessary and sufficient condition that three points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , and (x_3, y_3) are on the same straight line.

(b) The equation for a circle is expressed using real constants a , b , c , and d as $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ ($a \neq 0$). Find, as an equation in the form of a determinant, the necessary and sufficient condition that four points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) , and (x_4, y_4) are on the same circle.

(c) Show that the area of the triangle S whose three corners are (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , and (x_3, y_3) can be expressed by the following equation:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$