

知能ロボットシステム

張山昌論

張山の担当

■ ロボット制御

- 運動学・動力学
- 静力学と動力学
- 位置決め制御と力制御

■ ロボットビジョン

- 3次元計測
- 物体認識・情景解析

■ ビジュアルサーボ

授業の資料/連絡先

■授業の資料

- プリント配布

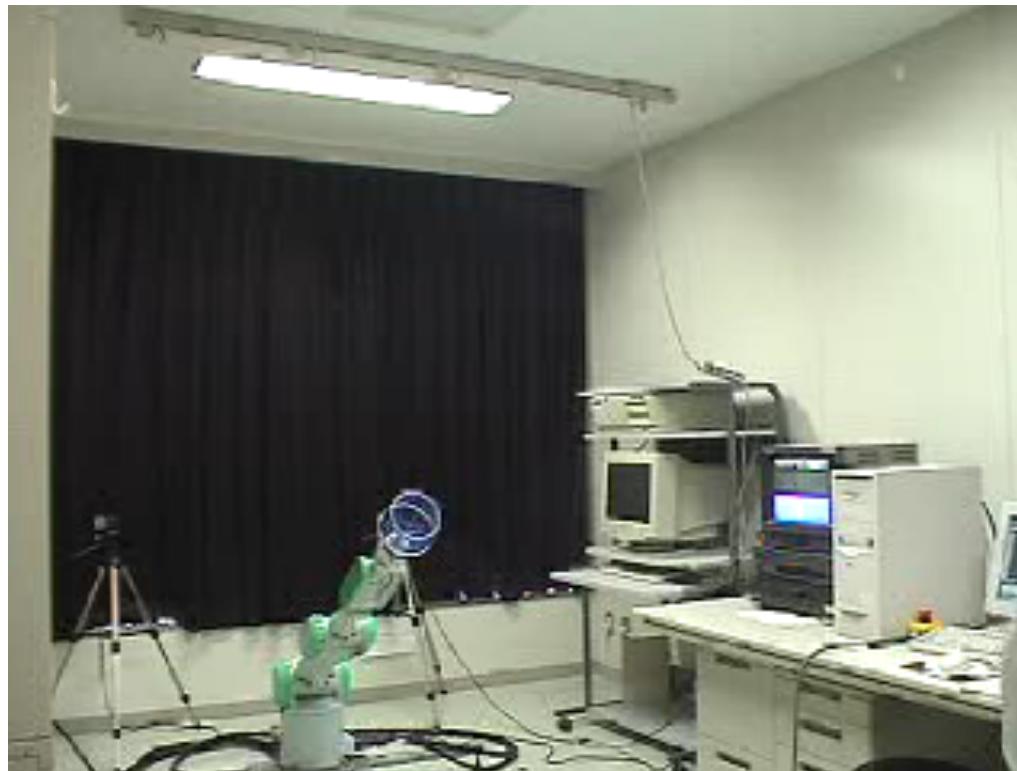
■連絡先

- 張山昌論(はりやままさのり)
- 電気情報系2号館 404号室
- E-mail: hariyama@tohoku.ac.jp
- 内線 7153 (外線からは, 022-795-7153)

ロボットの運動学・動力学の概要

ロボットマニピュレータの構造

ロボットマニピュレータ = 人間の手に相当する部分

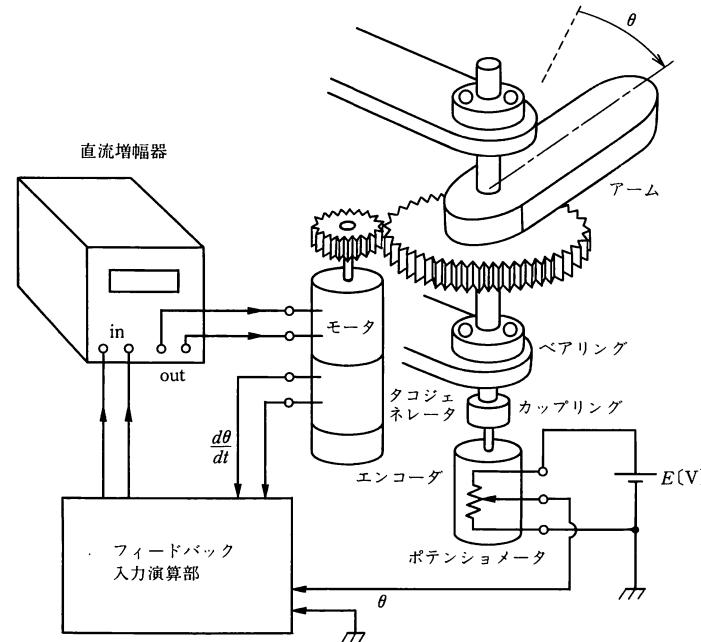


ロボットが作業する上で中心的な役割を果たす

ロボットマニピュレータの関節の種類

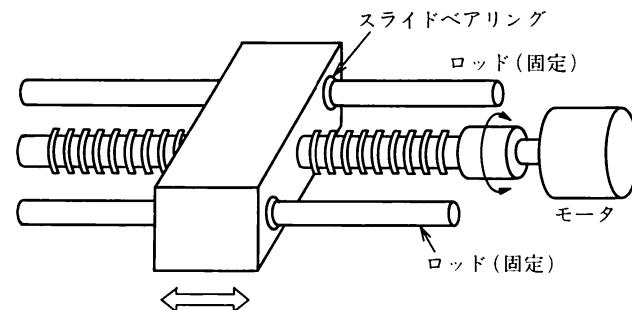
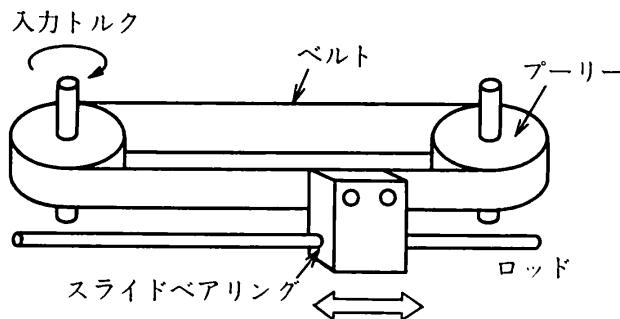
■ 回転関節

➤ 回転運動を行う



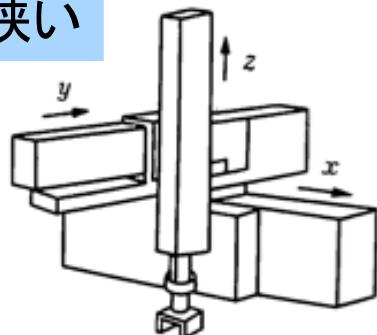
■ 直動関節

➤ 直線運動を行う

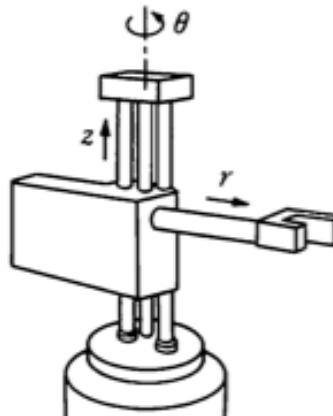


ロボット構造の種類

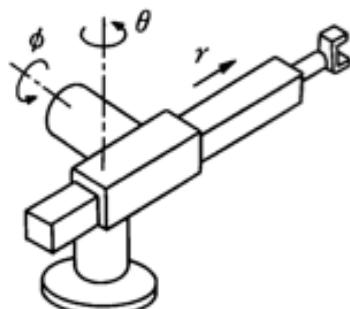
制御が簡単
作業空間狭い



(a) 直交座標ロボット
直動関節のみ



(b) 円筒座標ロボット
直動関節+回転関節



(c) 極座標ロボット
直動関節+回転関節



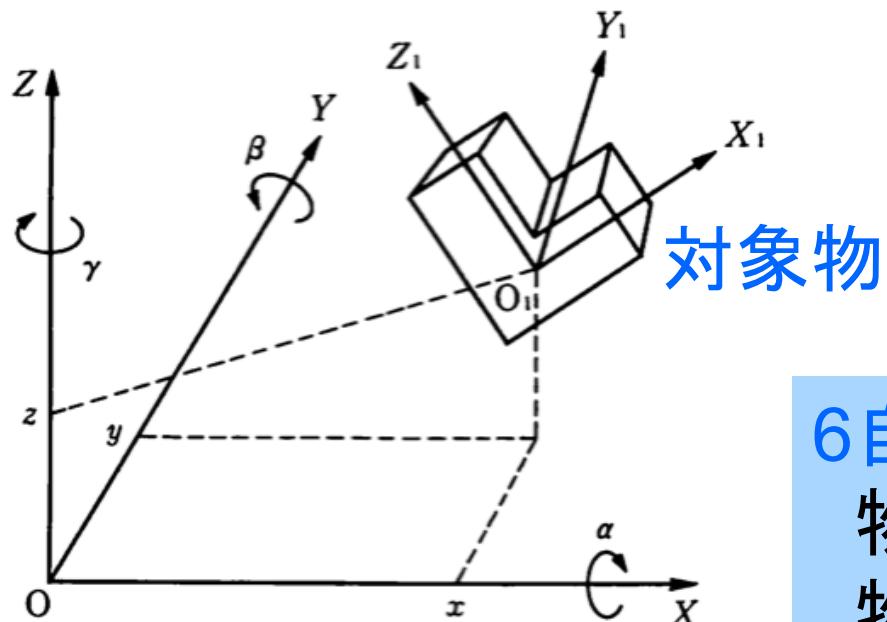
(d) 多関節ロボット
回転関節のみ

制御が複雑
作業空間広い

物体操作と「自由度」

ロボットの目的: 対象物を操作→対象物の動きを表現

$X_1Y_1Z_1$: 対象物座標系

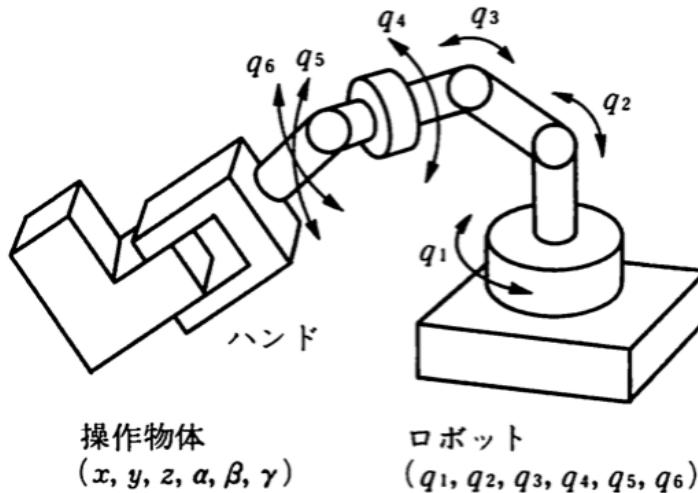


XYZ: 作業座標系

6自由度:
物体の位置: x, y, z
物体の姿勢: α, β, γ
($X_1Y_1Z_1 \rightarrow XYZ$ への変換)

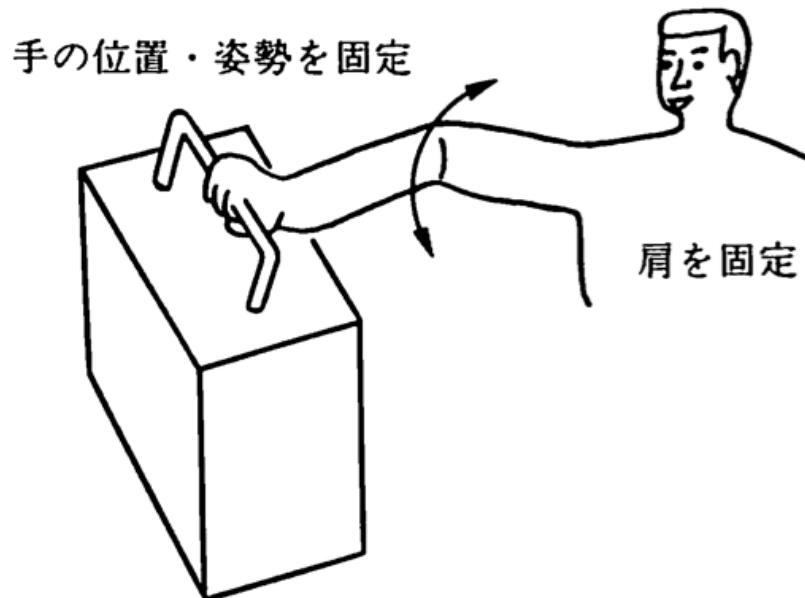
物体操作に必要なロボットの自由度

対象物の自由度6自由度
→ ロボットも(最低限) 6自由度必要



※作業によっては、6自由度が必要でない
例) ボールペンで字を書く→3自由度
2~6自由度のロボットが作業目的に応じて使い分けられる

人間の腕の自由度は?



次の選択肢の中から
選んでください

- ① 5自由度
- ② 6自由度
- ③ 7自由度

その理由は?

人間の腕の自由度 7自由度

- 肩 3自由度
- 肘 2自由度
- 手首 2自由度

運動学と動力学

■ 運動学(Kinematics)

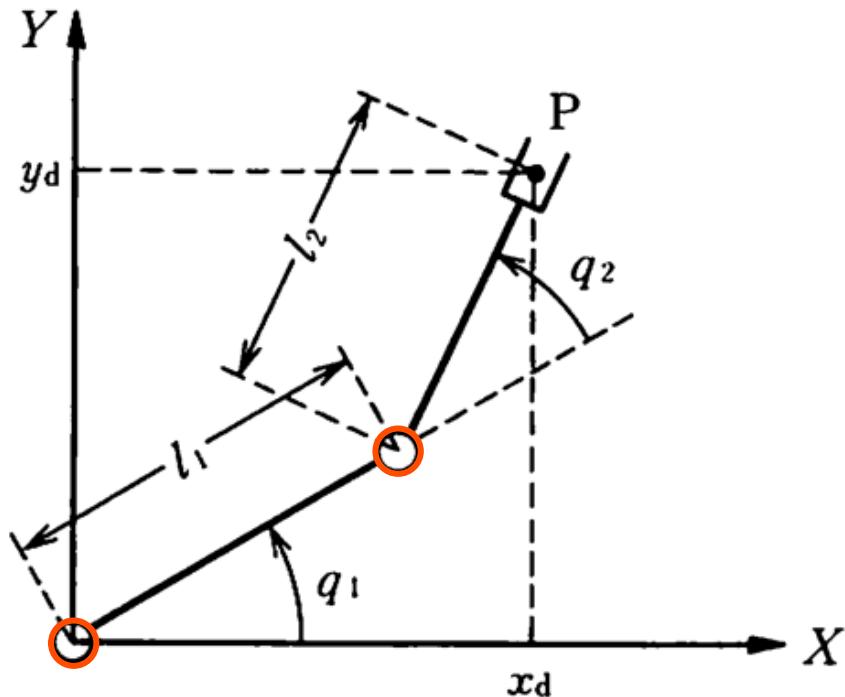
- “作業座標系”とロボットの運動を記述する座標系の幾何学的関係

■ 動力学(Dynamics)

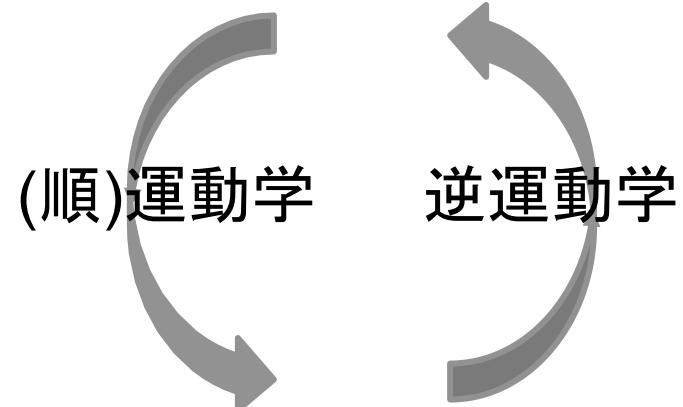
- ロボットに与える入力と運動の間の関係

順運動学(Kinematics), 逆運動学(Inverse Kinematics)

2自由度 多関節マニピュレータ

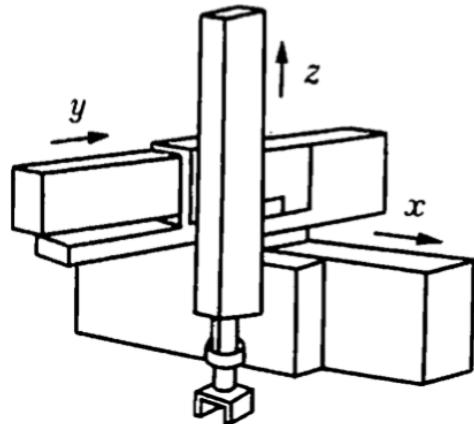


関節座標系 (q_1, q_2)
(ロボットの運動)



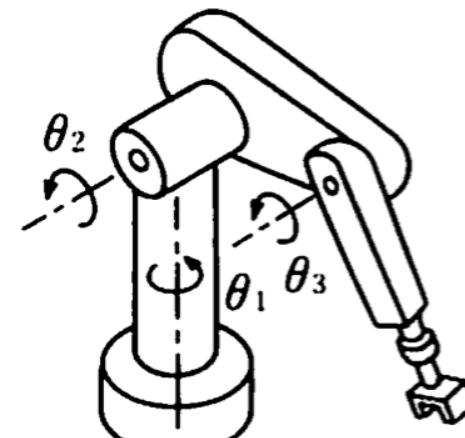
ロボットの種類と運動学

作業空間は通常“直交座標系(カーテジアン座標系)”



直行座標ロボット

運動学の計算は簡単



多関節ロボット

運動学の計算は複雑



授業ではこちらを扱う

運動学と動力学

■ 運動学(Kinematics)

- “作業座標系”とロボットの運動を記述する座標系の幾何学的関係

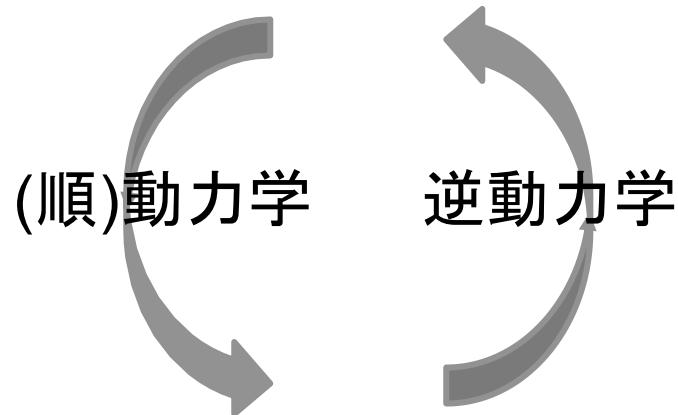
■ 動力学(Dynamics)

- ロボットに与える入力と運動の間の関係

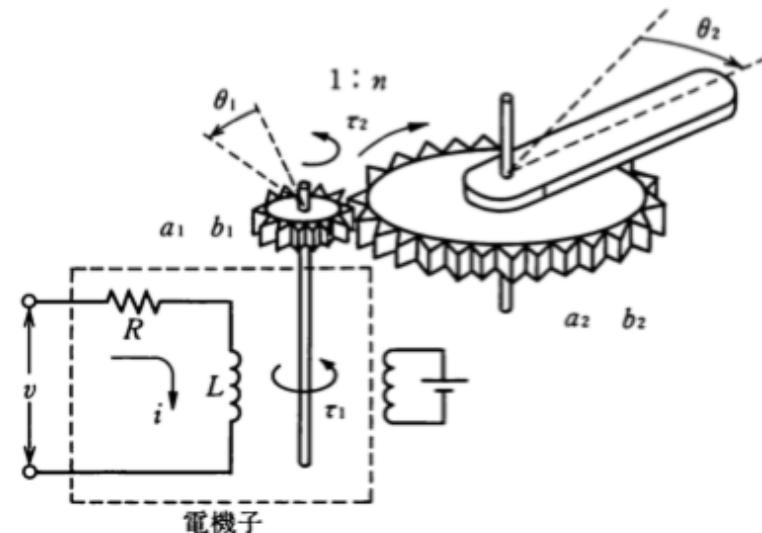
動力学(Dynamics), 逆動力学(Inverse Dynamics)

ロボットに与える入力と運動の間の関係

入力トルク $\tau(t)$



ロボットの運動($x_d(t)$, $y_d(t)$)



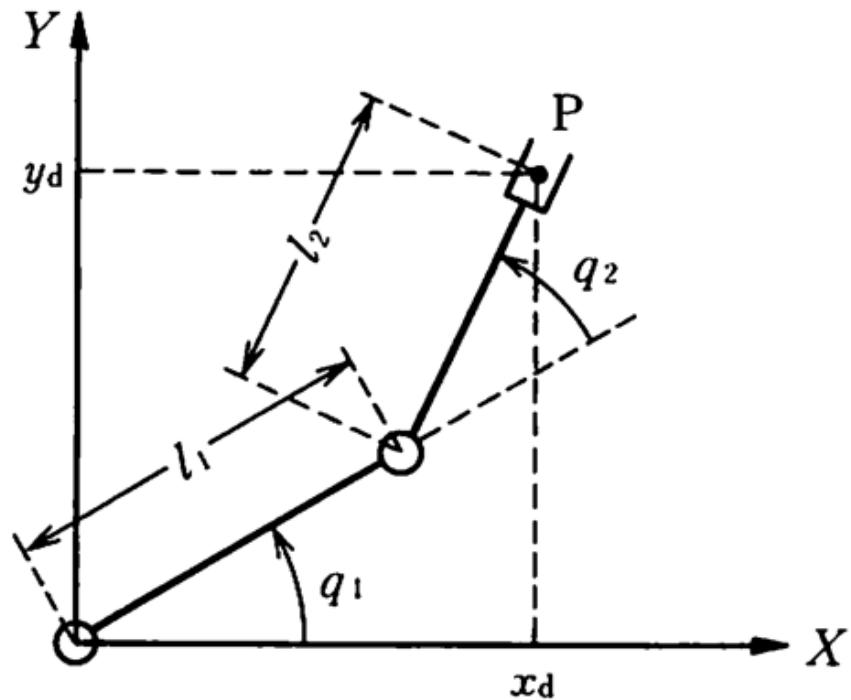
(順)動力学: 入力トルクパターン → 運動パターンシミュレーション

逆動力学: 入力トルク計算に利用

(目標運動パターンを実現するための入力トルクパターン)

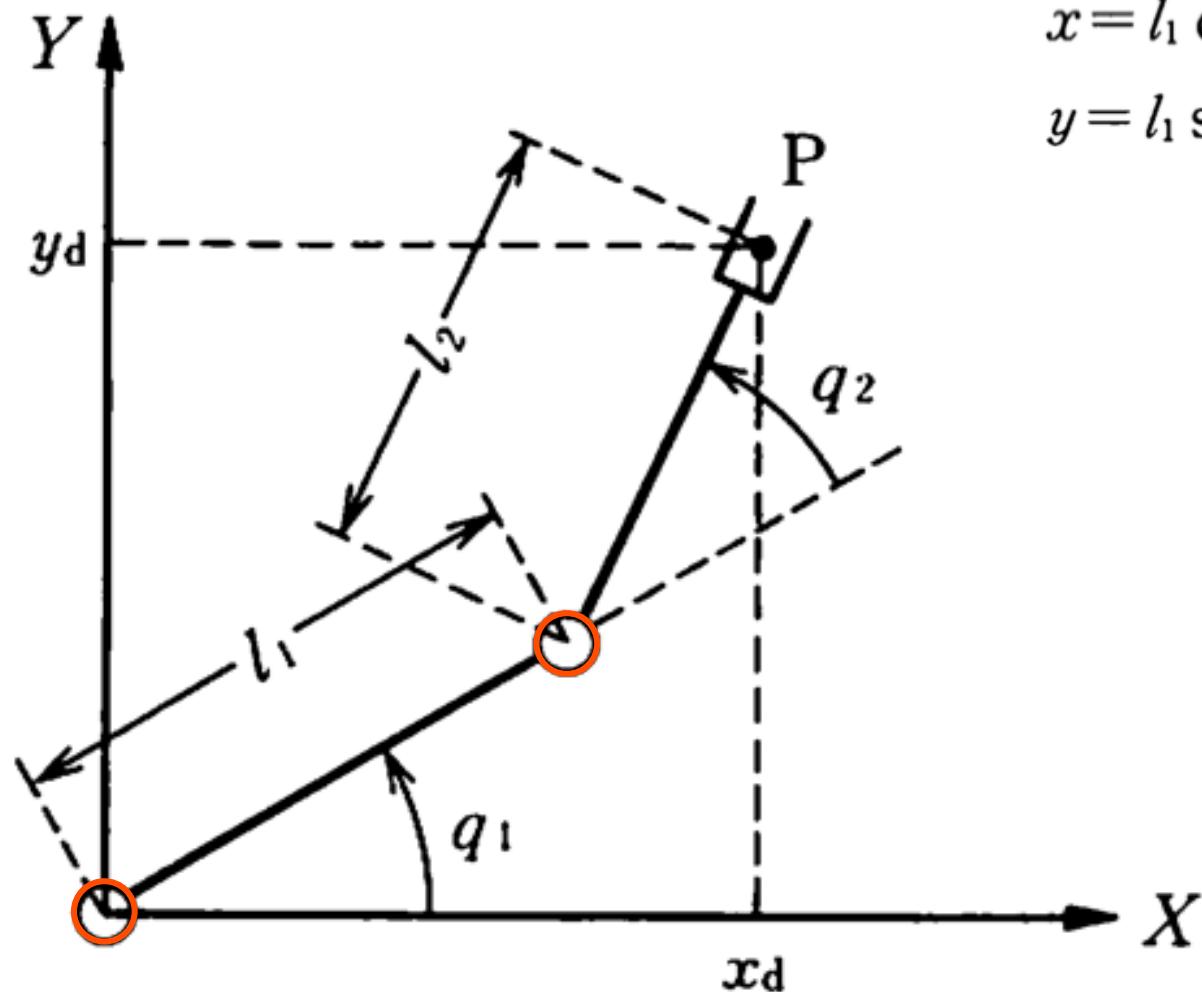
運動学

2自由度 多関節マニピュレータの順運動学



関節座標系 (q_1, q_2)
↓
作業座標系 (x_d, y_d) ?

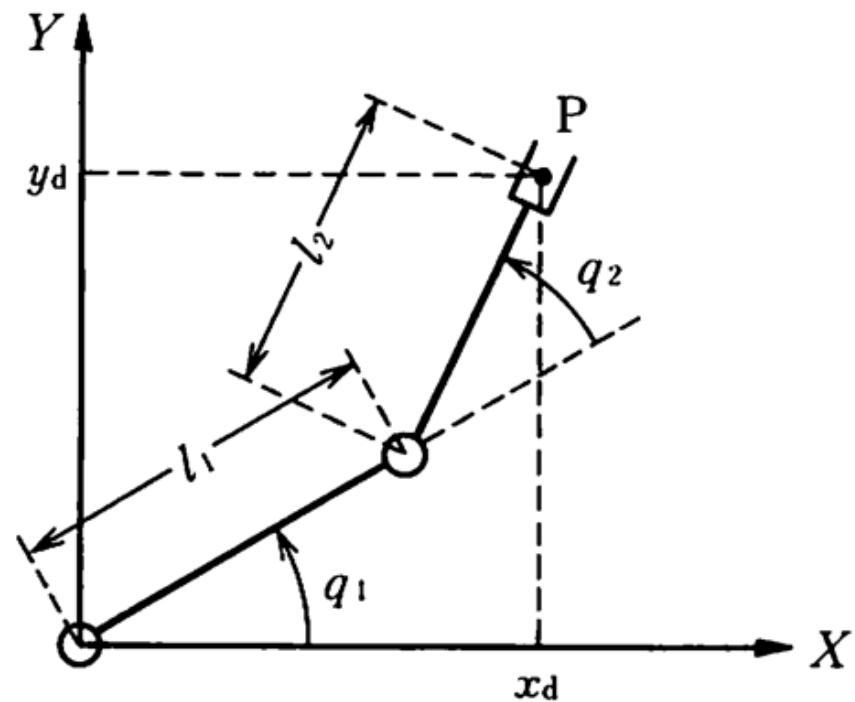
解答



$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

2自由度 多関節マニピュレータの逆運動学

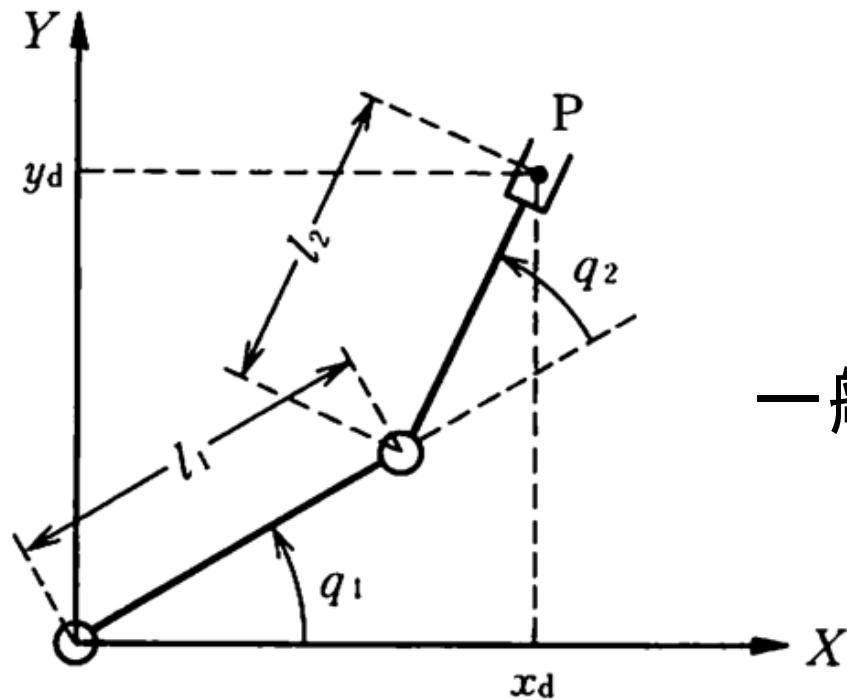


作業座標系 (x_d, y_d) ?



関節座標系 (q_1, q_2)

関節角の範囲



$$-\pi \leq q_1 < +\pi$$

$$-\pi \leq q_2 < +\pi$$

一般に,

$$-q_{lower} + n\pi \leq q < q_{upper} + n\pi$$

$$q_{lower} \in [0, \pi] \quad q_{upper} \in [0, \pi]$$

n は整数(※ただ一つの値を取る).

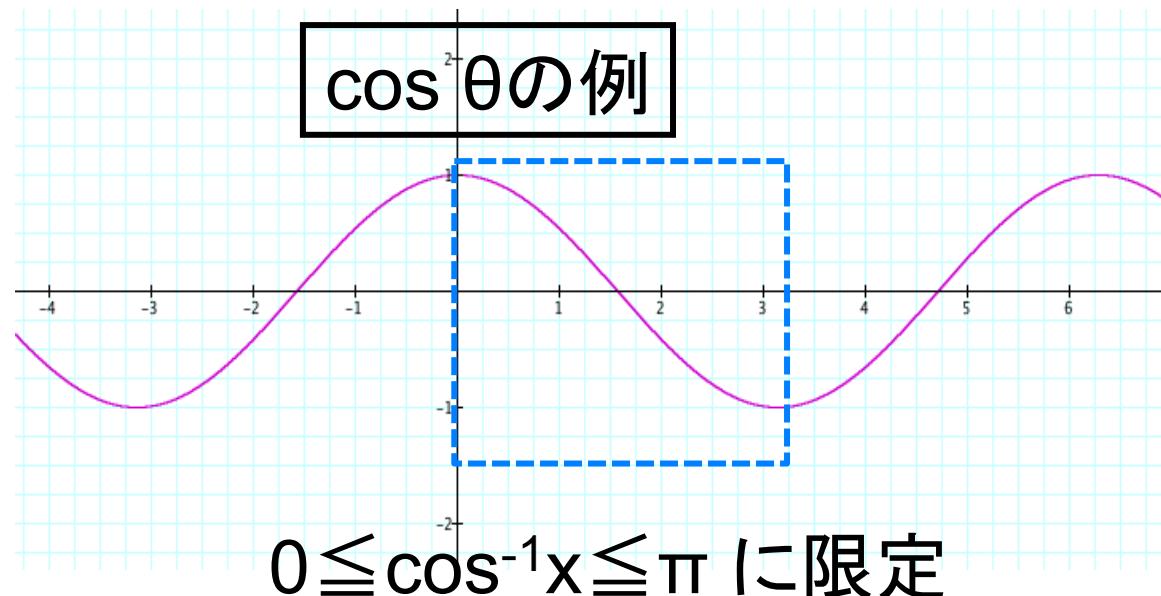
逆三角関数の範囲

逆三角関数は一般に多価関数となる
⇒ 一価で連続になる範囲に制限

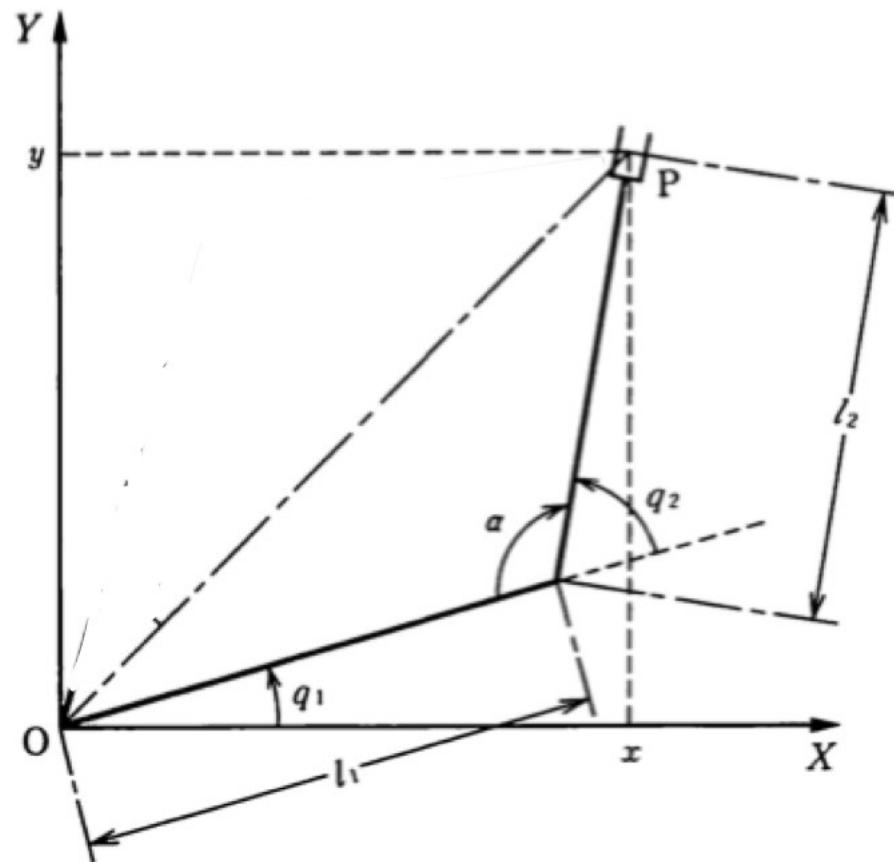
$$0 \leq \cos^{-1} x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \tan^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$



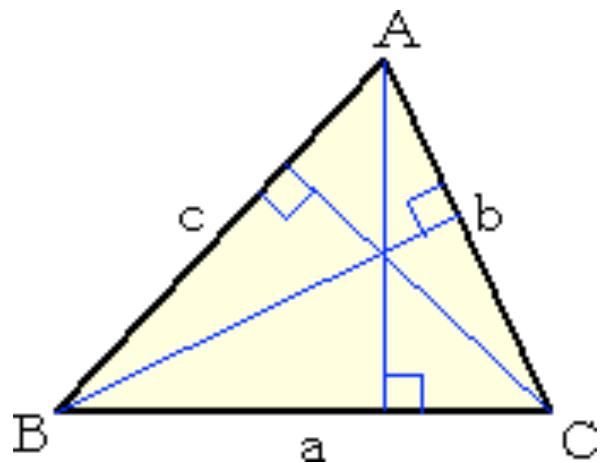
2自由度多関節マニピュレータの逆運動学



余弦定理より

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - x^2 - y^2}{2l_1l_2} \right)$$

補足: 余弦定理

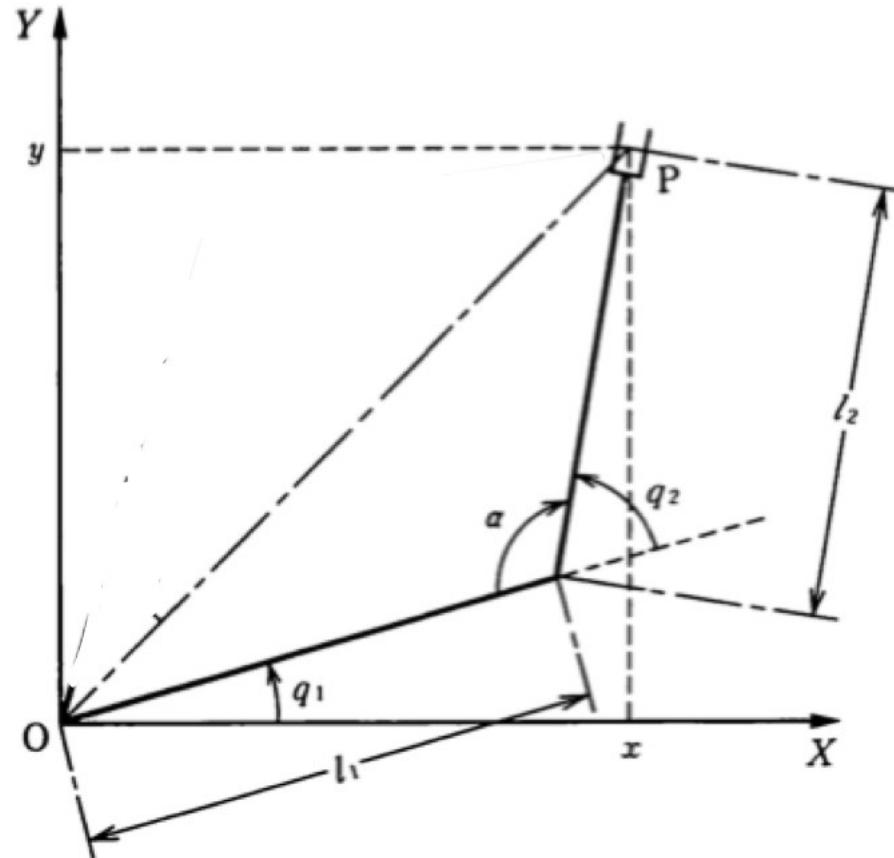


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

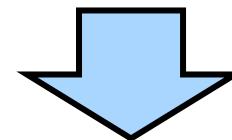
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

2自由度多関節マニピュレータの逆運動学



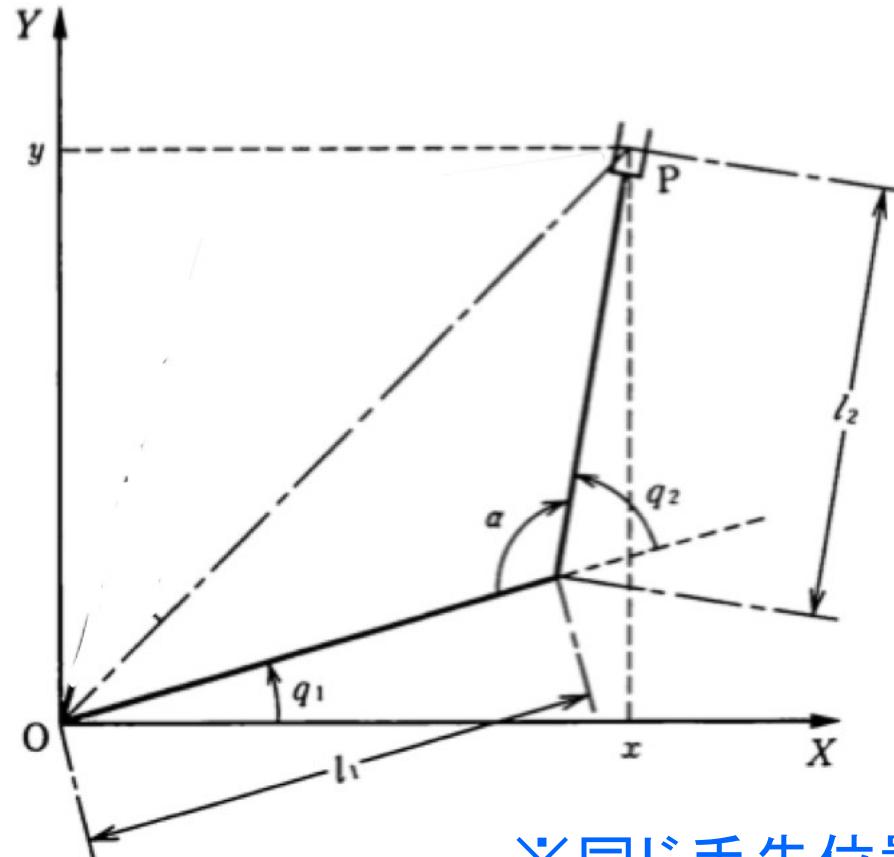
余弦定理より

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - x^2 - y^2}{2l_1l_2} \right)$$



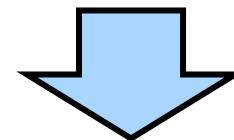
$$q_2 = \pi - \alpha$$

2自由度多関節マニピュレータの逆運動学



余弦定理より

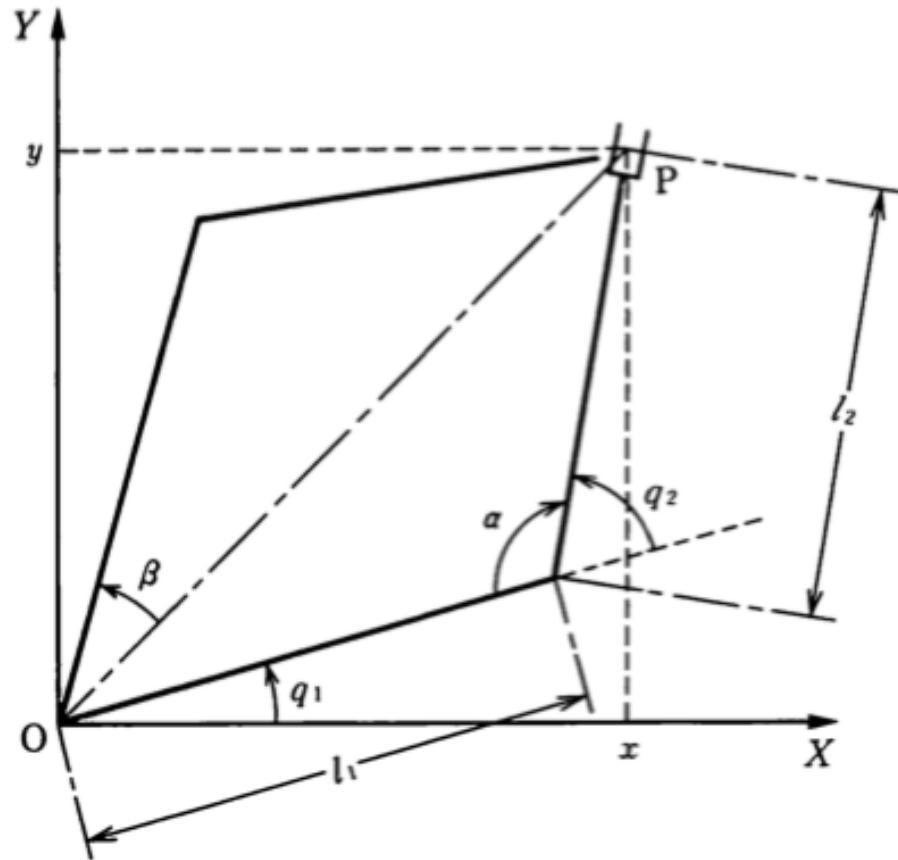
$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{l_1^2 + x^2 + y^2 - l_2^2}{2l_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$



$$q_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) - \beta$$

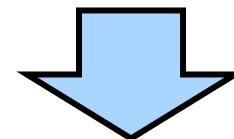
※同じ手先位置を実現する q_1 として2種類ある
⇒ もう1種類を求めてみる

2自由度多関節マニピュレータの逆運動学



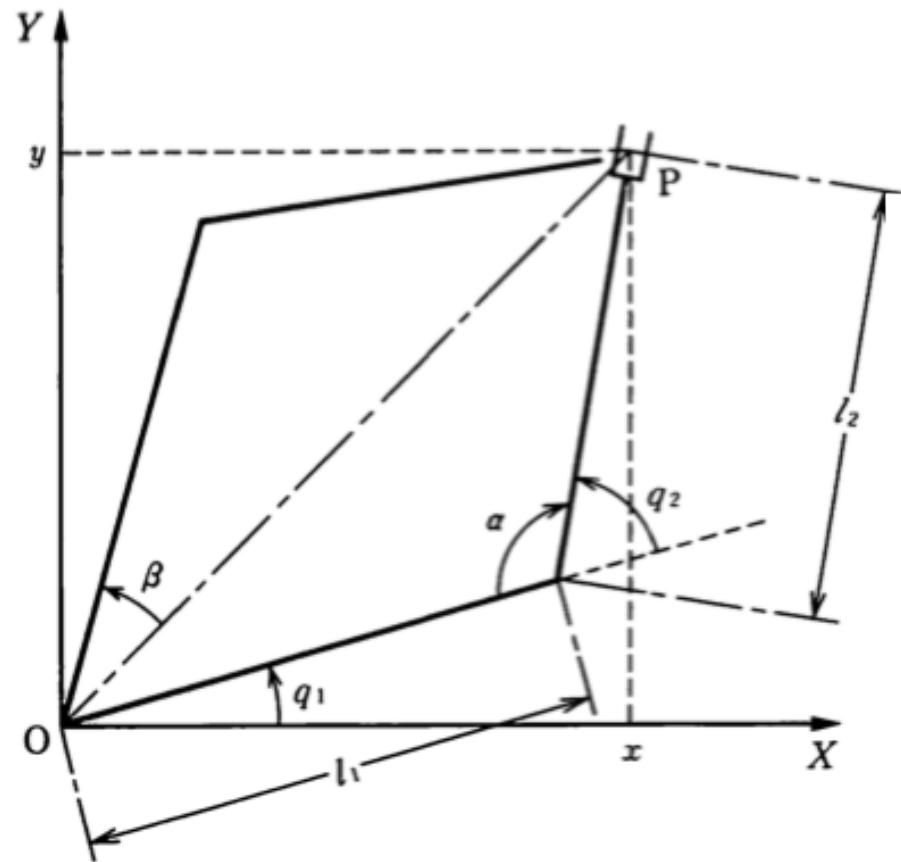
余弦定理より

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - x^2 - y^2}{2l_1l_2} \right)$$



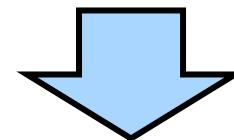
$$q_2 = -(\pi - \alpha)$$

2自由度多関節マニピュレータの逆運動学



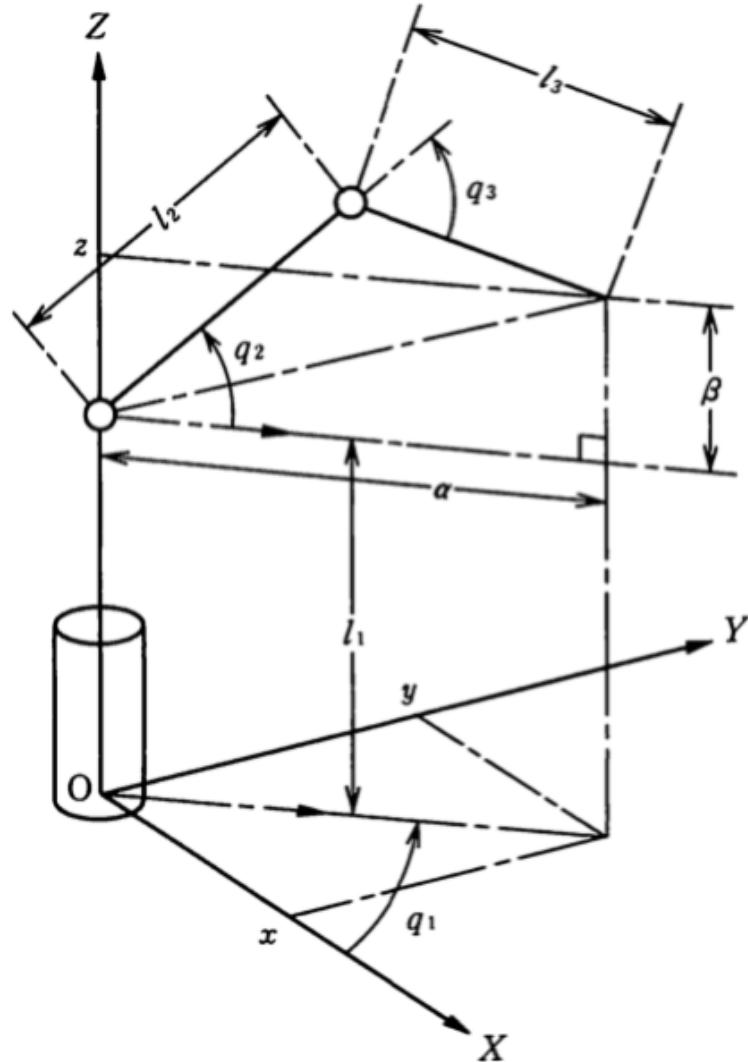
余弦定理より

$$\beta = \cos^{-1} \left(\frac{l_1^2 + x^2 + y^2 - l_2^2}{2l_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$



$$q_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) + \beta$$

レポート問題



右図の3自由度マニピュレータの順運動学・逆運動学を求める過程を示せ.

ヒント

- 第2関節と第3関節の関係
= 2自由度マニピュレータの第1関節と第2関節の関係

3自由度マニピュレータの運動学・逆運動学

運動学

$$x = (l_2 \cos q_2 + l_3 \cos(q_2 + q_3)) \cos q_1$$

$$y = (l_2 \cos q_2 + l_3 \cos(q_2 + q_3)) \sin q_1$$

$$z = l_2 \sin q_2 + l_3 \sin(q_2 + q_3) + l_1$$

逆運動学

$$q_1 = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$q_2 = \sin^{-1} \left(\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) - \eta$$

$$q_3 = \pm \gamma$$

ただし $\alpha = \frac{x}{\cos(\tan^{-1} \frac{y}{x})}$

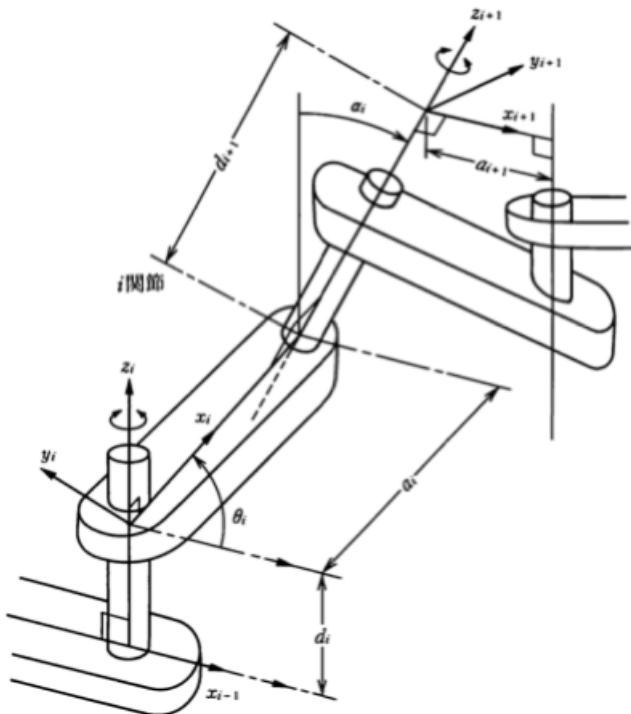
$$\beta = z - l_1$$

$$\gamma = \cos^{-1} \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - l_2^2 - l_3^2}{2l_2l_3} \right)$$

$$\eta = \tan^{-1} \left(\frac{l_3 \sin \gamma}{l_2 + l_3 \cos \gamma} \right)$$

一般の順運動学

4自由度以上のロボットで順運動学が複雑
→ 系統的な座標変換方法: Denavit-Hartenberg法



2関節間の相対的な
位置・姿勢

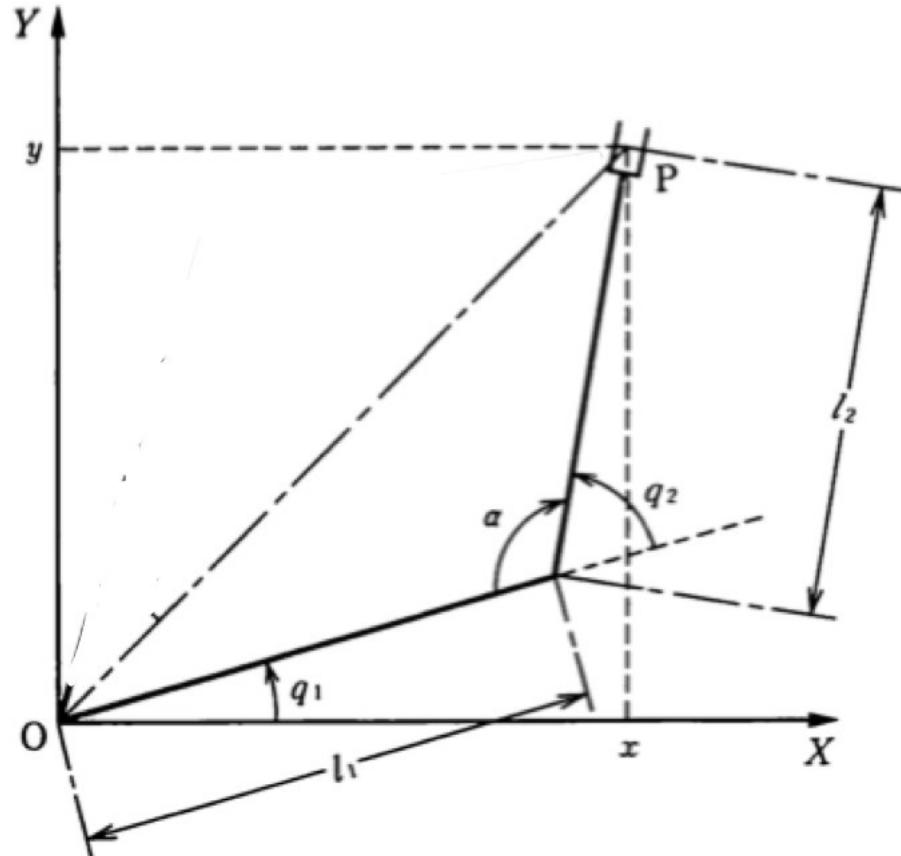
↓
回転・平行移動

↓
回転・平行移動の繰り返しで
順運動学を表現

資料2 手先の位置・姿勢と関節角の関係

ヤコビ行列・逆ヤコビ行列

(前回)2自由度多関節マニピュレータの逆運動学



$$q_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \beta$$

$$q_2 = \pi - \alpha$$

ただし、

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - x^2 - y^2}{2l_1l_2}\right)$$

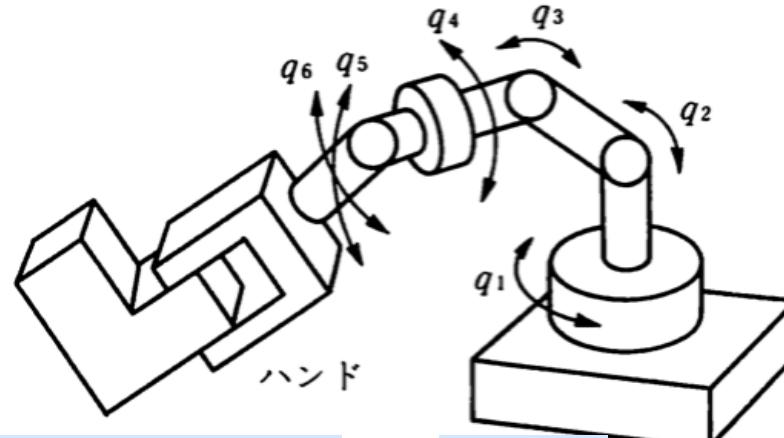
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + x^2 + y^2 - l_2^2}{2l_1 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}\right)$$

一般の逆運動学

■ 4自由度以上の多関節マニピュレータ

- 解析的に求めるのが難しい場合が多い
- 「ヤコビ行列」などを用いて数値的に求める

6自由度マニピュレータの例



先端の位置・姿勢

$$(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

関節角

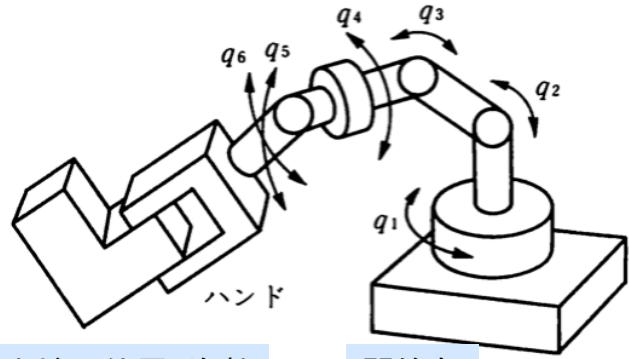
$$(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)$$

対象物体の位置・姿勢 6自由度

→任意の位置・姿勢を実現するには

ロボットマニピュレータにも6自由度以上が必要

順運動学



先端の位置・姿勢

$$\mathbf{P} = (x, y, z)^t$$

$$\Theta = (\alpha, \beta, \gamma)^t$$

関節角

$$\mathbf{Q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6)^t$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \Theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_x(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\ f_y(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\ f_z(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\ f_\alpha(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\ f_\beta(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \\ f_\gamma(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) \end{bmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{Q})$$

f_* : Qが与えられた場合に,
*を求める順運動学の関数

ヤコビ行列 J(ヤコビアン) 途中

両辺を時間tで微分する

xの例)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial q_3} \frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial q_4} \frac{dq_4}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial q_5} \frac{dq_5}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial q_6} \frac{dq_6}{dt}$$

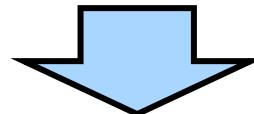
The diagram illustrates the differentiation of the equation with respect to time t. Six arrows originate from the term $\frac{dx}{dt}$ and point to the corresponding terms in the sum, each containing a partial derivative of f_x with respect to one of the variables q_1 through q_6 . The label "偏微分" (partial derivative) is positioned below the arrows.

補足:偏微分ってなんでしたっけ?

2つ以上の変数に依存する関数

$$f(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n)$$

特定の変数 q_i 以外の変数の値を固定して, f を q_i で微分すること



$$\frac{\partial f}{\partial q_i}$$

偏微分の練習

$$f(q_1, q_2) = q_1 + 2q_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} =$$

$$f(q_1, q_2) = q_1 \cdot q_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_2} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_2} =$$

偏微分の練習2

$$f(q_1, q_2) = \sin(q_1 + q_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} =$$

$$f(q_1, q_2) = \cos(q_1 + q_2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_2} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial q_2} =$$

ヤコビ行列 J(ヤコビアン) 途中

q_1 の時間変化分による x の時間変化分

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial f_x}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial q_3} \frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial q_4} \frac{dq_4}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial q_5} \frac{dq_5}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial q_6} \frac{dq_6}{dt}$$

すべての変数の時間変化分の寄与分を加える

xの時間変化

ヤコビ行列 J(ヤコビアン) 最終結果

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \frac{\partial f_x}{\partial q_2} & \frac{\partial f_x}{\partial q_3} & \frac{\partial f_x}{\partial q_4} & \frac{\partial f_x}{\partial q_5} & \frac{\partial f_x}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \frac{\partial f_y}{\partial q_2} & \frac{\partial f_y}{\partial q_3} & \frac{\partial f_y}{\partial q_4} & \frac{\partial f_y}{\partial q_5} & \frac{\partial f_y}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_z}{\partial q_1} & \frac{\partial f_z}{\partial q_2} & \frac{\partial f_z}{\partial q_3} & \frac{\partial f_z}{\partial q_4} & \frac{\partial f_z}{\partial q_5} & \frac{\partial f_z}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\beta}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_6} \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_3} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_4} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_5} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{dq_3}{dt} \\ \frac{dq_4}{dt} \\ \frac{dq_5}{dt} \\ \frac{dq_6}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

ヤコビアンで何が出来るのか

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

関節角速度→先端速度

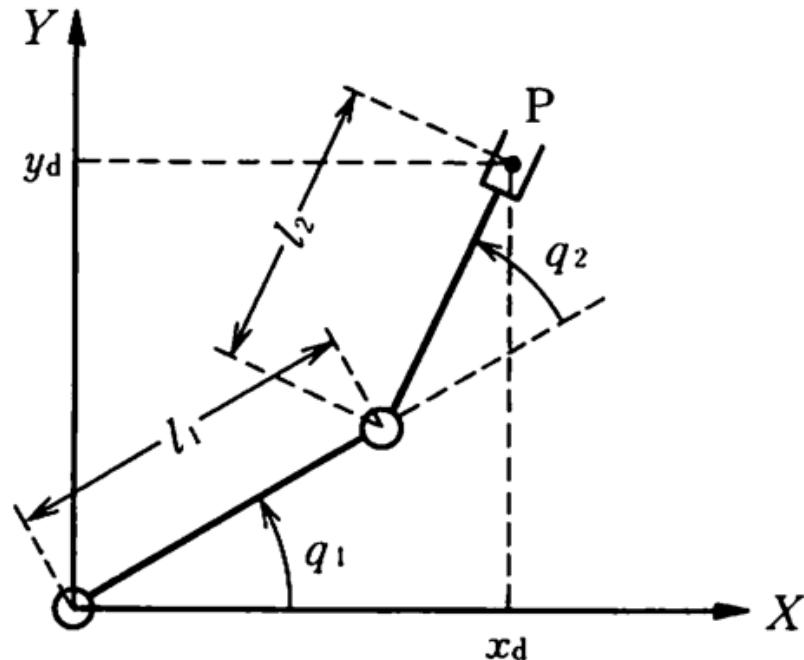


$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{P} \\ \Delta\Theta \end{bmatrix} = \mathbf{J} \cdot \Delta\mathbf{Q}$$

関節角の微少変化
→先端位置・姿勢の微少変化

※手先の動き→ヤコビ行列の大きさで決まる

演習:2自由度アームのヤコビ行列を求める



順運動学

$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

- 位置(x,y)のみを考える

ヤコビ行列を求めて下さい

演習

$$\frac{dx}{dt} =$$

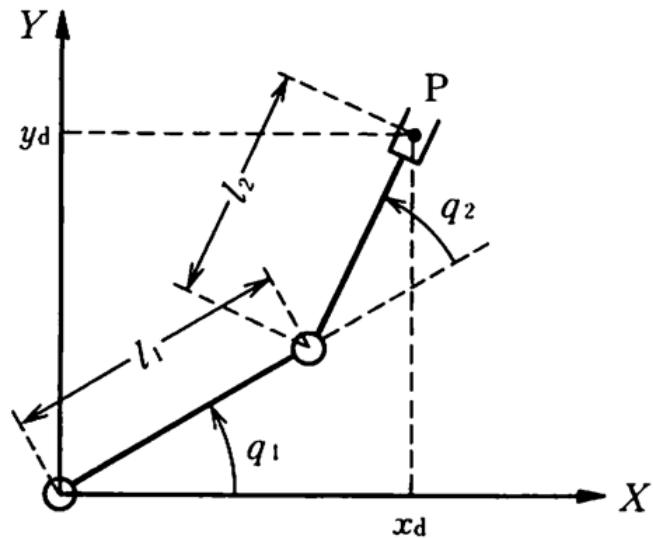
$$\frac{dy}{dt} =$$

よってヤコビ行列は

$$J = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

解答: ヤコビ行列

順運動学



$$x = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

$$y = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

関節角速度と作業空間での速度の関係

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{dq_1}{dt} l_1 \sin q_1 - \left(\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} \right) l_2 \sin(q_1 + q_2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dq_1}{dt} l_1 \cos q_1 + \left(\frac{dq_1}{dt} + \frac{dq_2}{dt} \right) l_2 \cos(q_1 + q_2)$$

解答:ヤコビ行列

行列の形で表現すると

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = J(\mathbf{q}) \frac{d\mathbf{q}}{dt}$$

ただし

$$\mathbf{p} = (x, y)^\top, \mathbf{q} = (q_1, q_2)^\top$$

$$J(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

ヤコビ行列

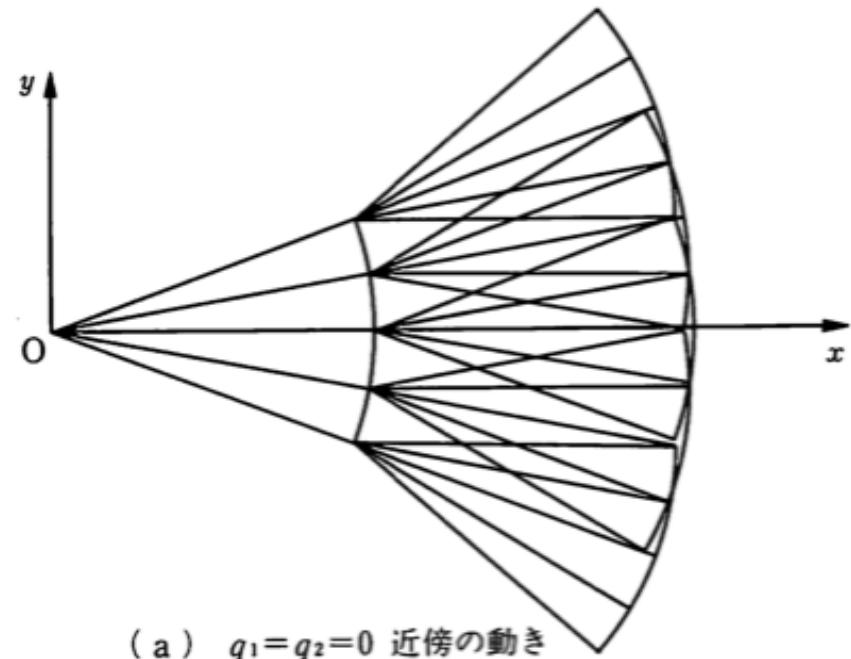
$$s_1 = \sin q_1, s_{12} = \sin(q_1 + q_2), c_1 = \cos q_1, c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$$

ヤコビ行列の性質

$q_1=q_2=0$ を中心として動く場合を考える

ヤコビ行列は

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l_1 + l_2 & l_2 \end{bmatrix}$$



行列式は _____

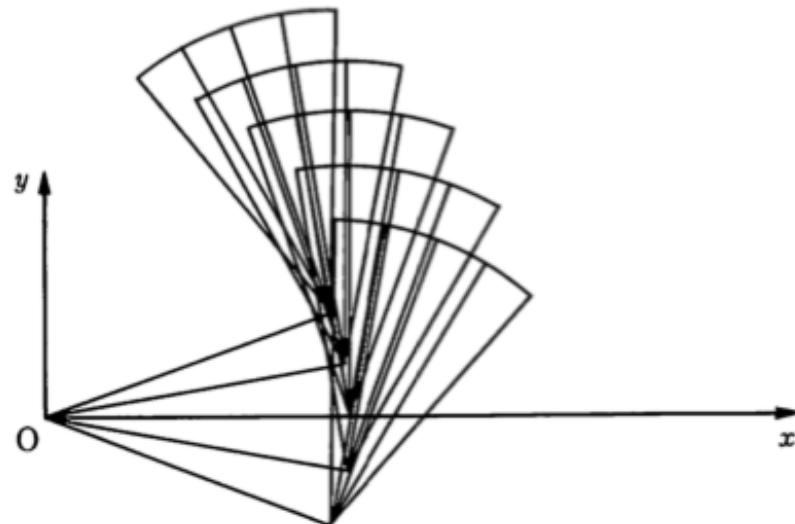
q_1, q_2 を10度ずつ ± 20 度

ヤコビ行列の性質

$q_1=0, q_2=\pi/2$ を中心として動く場合を考える

ヤコビ行列は

$$J = \begin{bmatrix} -l_2 & -l_2 \\ l_1 & 0 \end{bmatrix}$$

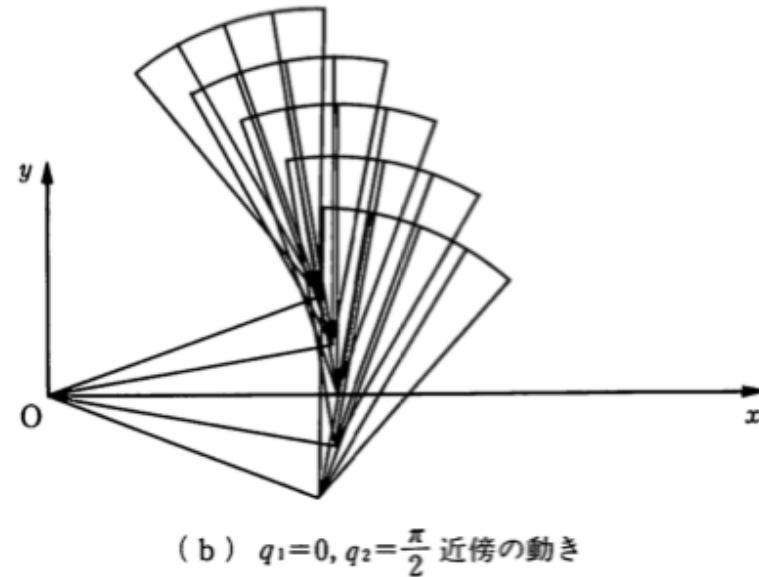
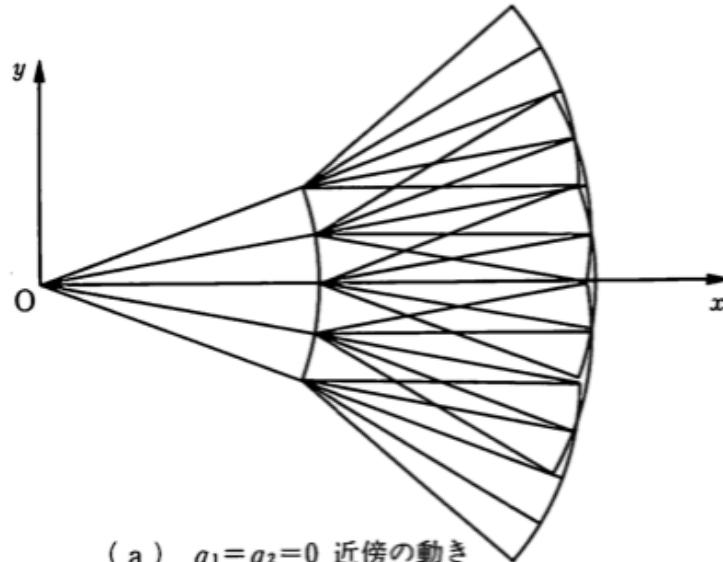


(b) $q_1=0, q_2=\frac{\pi}{2}$ 近傍の動き

行列式は _____

q_1, q_2 を10度ずつ ± 20 度

ヤコビ行列の性質

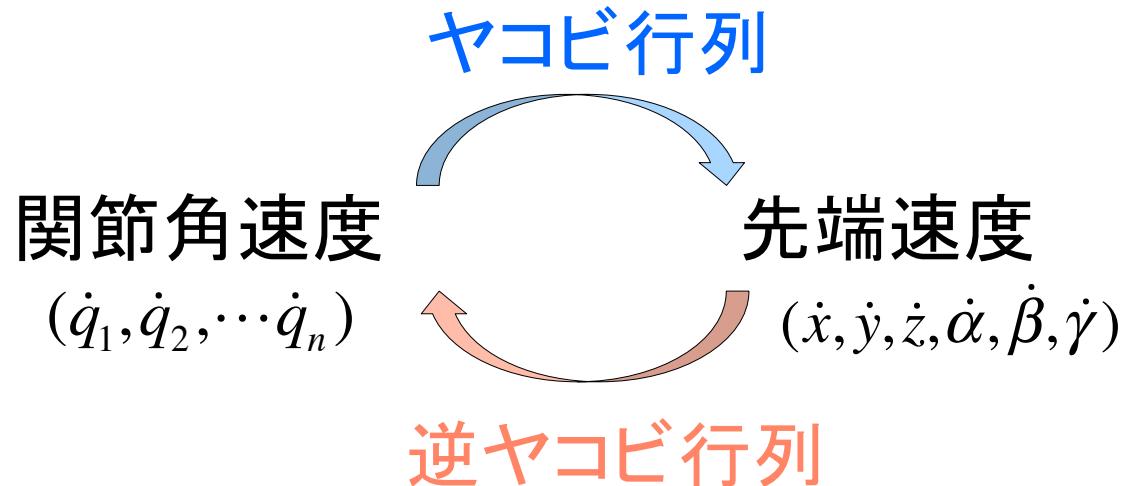


x方向の運動小さい
→ x方向に動きにくい
(自由度が縮退)

“特異点”
(ヤコビ行列が正則でない)

x, y方向に均等
に動くことができる

逆ヤコビ行列



逆運動学計算が難しい,
多自由度ロボットの制御に重要

ヤコビ行列 J(ヤコビアン)

n自由度アームのヤコビアン

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \\ \frac{d\alpha}{dt} \\ \frac{d\beta}{dt} \\ \frac{d\gamma}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial q_1} & \frac{\partial f_x}{\partial q_2} & \frac{\partial f_x}{\partial q_3} & \dots & \dots & \frac{\partial f_x}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_y}{\partial q_1} & \frac{\partial f_y}{\partial q_2} & \frac{\partial f_y}{\partial q_3} & \dots & \dots & \frac{\partial f_y}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_z}{\partial q_1} & \frac{\partial f_z}{\partial q_2} & \frac{\partial f_z}{\partial q_3} & \dots & \dots & \frac{\partial f_z}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_3} & \dots & \dots & \frac{\partial f_\alpha}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_\beta}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_3} & \dots & \dots & \frac{\partial f_\beta}{\partial q_n} \\ \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_1} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_2} & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_3} & \dots & \dots & \frac{\partial f_\gamma}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \\ \frac{dq_3}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dq_n}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{Q}}{dt}$$

$\frac{d\mathbf{Q}}{dt}$ を求めるには?

例) 人間の腕: n=7(肩関節3, 肘2, 手首2)

逆行列の自由度による分類

ケース1: 方程式の数(先端の自由度) > 未知数(関節の自由度)

ケース2: 方程式の数(先端の自由度) = 未知数(関節の自由度)

ケース3: 方程式の数(先端の自由度) < 未知数(関節の自由度)

ケース2. 先端の自由度=関節の自由度

未知数(関節の自由度)と方程式の数(先端の自由度)が等しい

➡ 逆行列が存在すれば、解が1通りに決まる

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{P} \\ \Delta\Theta \end{bmatrix}$$

手先位置・姿勢
の微小変化



関節角
の微小変化

ケース1: (先端の自由度)>(関節の自由度)

未知数(関節の自由度)より、方程式の数(先端の自由度)が多い

→すべての方程式を満たす解は一般には存在しない



「妥当な解: 左辺と右辺の差の2乗和を最小にする解」

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = (\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \mathbf{J}^T \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \end{bmatrix}$$

疑似逆ヤコビ行列

ケース3: (先端の自由度) < (関節の自由度)

未知数(関節の自由度)が、方程式の数(先端の自由度)より多い

➡ 解が無数に存在する

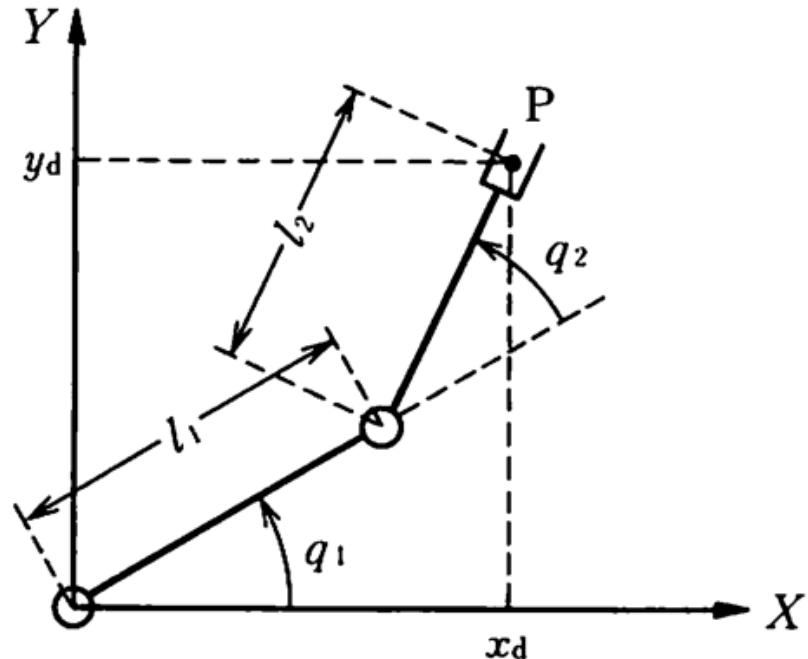
冗長マニピュレータ

「妥当な解: 左辺と右辺の差の2乗和を最小にする解」

$$\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{P}}{dt} \\ \frac{d\Theta}{dt} \end{bmatrix}$$

疑似逆ヤコビ行列
(ケース2とはちょっと形が違う)

演習: 逆ヤコビ行列を求めてみよう



先端速度と関節角速度の関係

ヤコビ行列

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_2 s_{12} & -l_2 s_{12} \\ l_1 c_1 + l_2 c_{12} & l_2 c_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dq_1}{dt} \\ \frac{dq_2}{dt} \end{bmatrix}$$

$$s_1 = \sin q_1, s_{12} = \sin(q_1 + q_2), c_1 = \cos q_1, c_{12} = \cos(q_1 + q_2)$$

求め方は、ケース1? ケース2? ケース3?

補足:逆行列の求め方

逆行列

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad J^{-1} = \frac{1}{\det(J)} \begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix}$$

$$\det(J) = \begin{vmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{vmatrix}$$

まずは行列式を計算

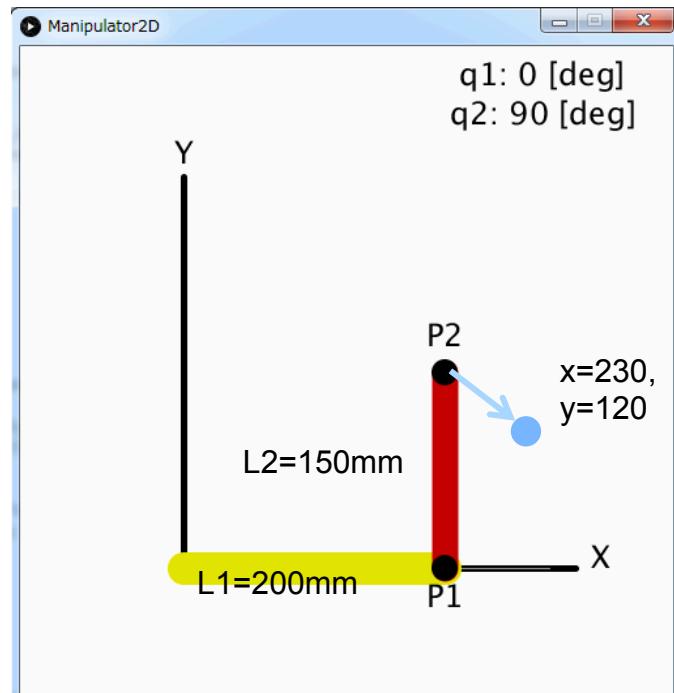
$$\begin{aligned}\det(J) &= J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} \\&= (-l_1S_1 - l_2S_{12})l_2C_{12} - (-l_2S_{12})(l_1C_1 + l_2C_{12}) \\&= -l_1l_2S_1C_{12} - l_2^2S_{12}C_{12} + l_1l_2C_1S_{12} + l_2^2S_{12}C_{12} \\&= l_1l_2(S_{12}C_1 - C_{12}S_1) = l_1l_2S_2\end{aligned}$$

逆行列 J^{-1} は

$$J^{-1} = \frac{1}{l_1 l_2 S_2} \begin{bmatrix} l_2 C_{12} & l_2 S_{12} \\ -l_1 C_1 - l_2 C_{12} & -l_1 S_1 - l_2 S_{12} \end{bmatrix}$$

解析的に手先位置 から角度を求めてみる

初期状態(手先位置 $x=200, y=150$, $q_1=0, q_2=90$)



手先を $x=230, y=120$ へ移動する

前回の逆運動学の式より、
解析的に求めると

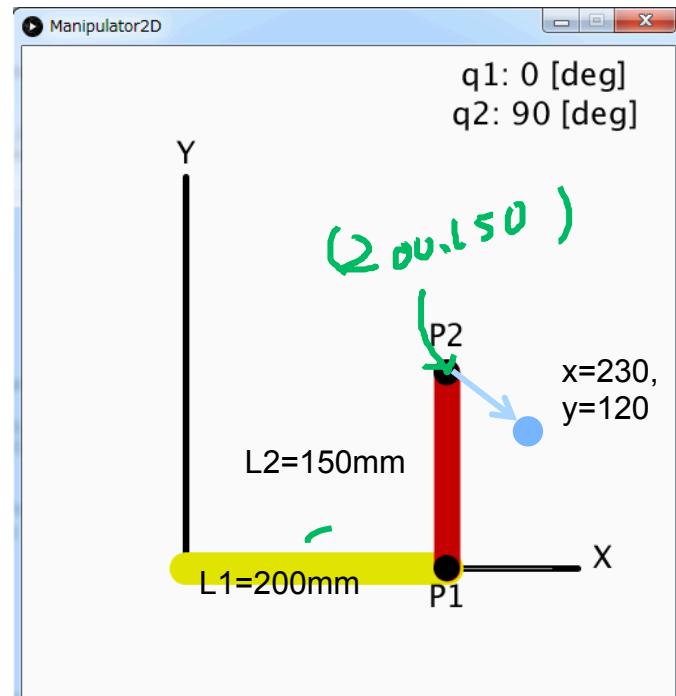
$$q_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + x^2 + y^2 - l_2^2}{2l_1\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \text{ [rad]}$$

$$q_2 = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{l_1^2 + l_2^2 - x^2 - y^2}{2l_1l_2}\right) \text{ [rad]}$$

$q_1 = -7.6417[\text{deg}]$, $q_2 = 85.4114[\text{deg}]$

逆ヤコビを使って手先位置 から角度を求めてみる

初期状態(手先位置 $x=200, y=150$, $q_1=0, q_2=90$)



初期状態のJ_invを計算する

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0050 \\ -0.0067 & -0.0050 \end{bmatrix}$$

移動先は $dx=30, dy=-30$

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix} + J^{-1} \begin{pmatrix} 30 \\ -30 \end{pmatrix} [\text{rad}]$$

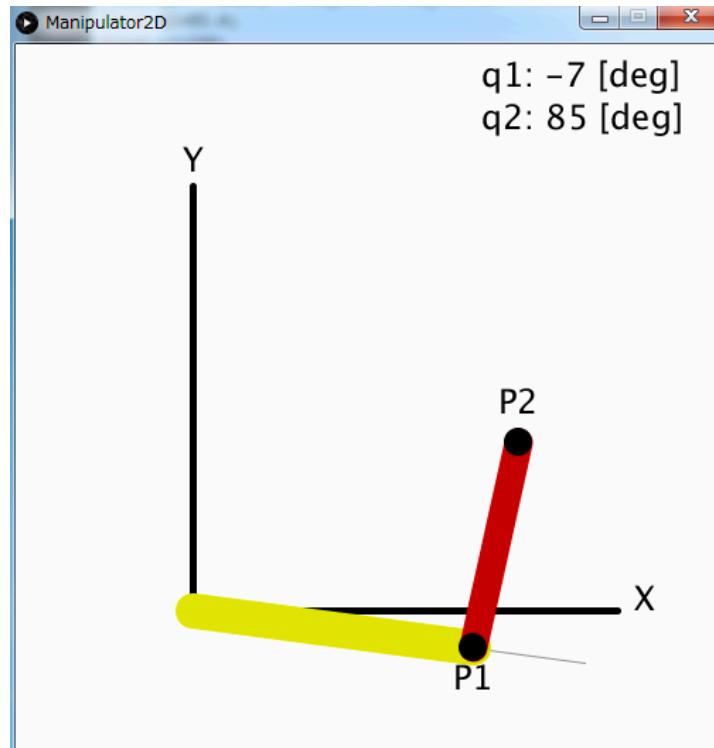
関節角の変化分

$$q_1 = -8.5944 [\text{deg}], q_2 = 87.1352 [\text{deg}]$$

結果

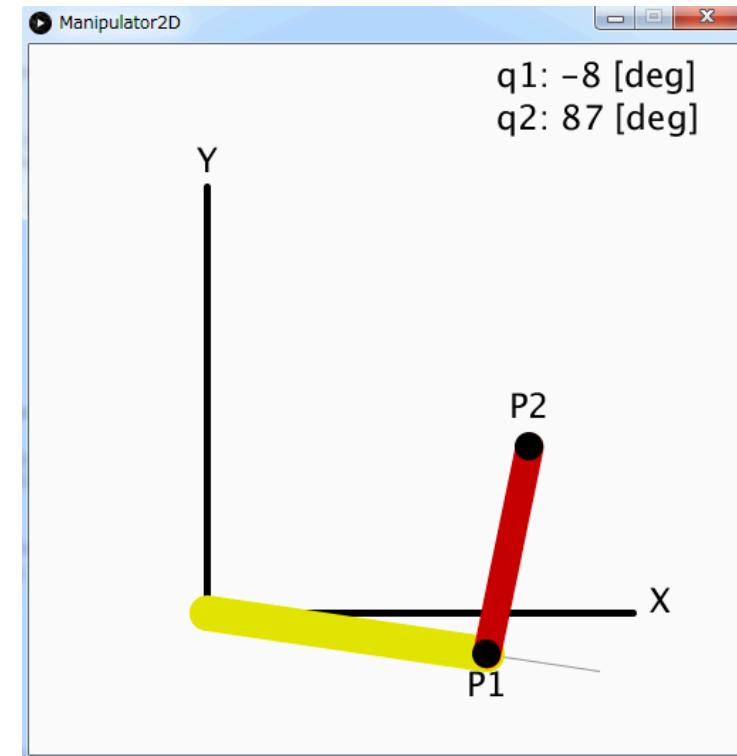
解析式の結果

$q_1 = -7.6417[\text{deg}]$, $q_2 = 85.4114[\text{deg}]$



逆ヤコビを用いた結果

$q_1 = -8.5944[\text{deg}]$, $q_2 = 87.1352[\text{deg}]$



結構あつてゐる

特異姿勢(Singular configuration)

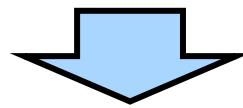
ロボットの持つ自由度を殺してしまう姿勢

➡ ロボットは特定方向に動けなくなる(制御不能)

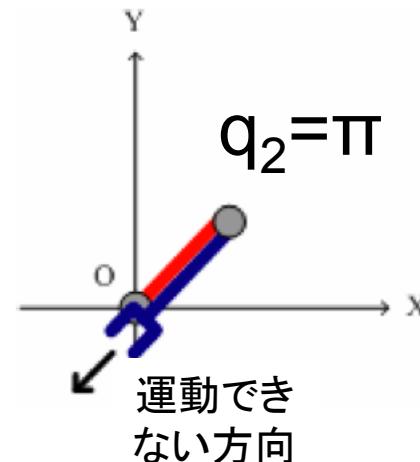
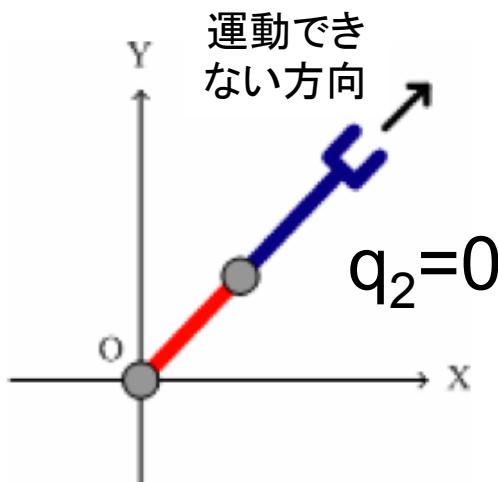
例) 2自由度アームの特異姿勢

逆行列が存在しない関節角
(先端速度と関節角速度の対応がとれなくなる)

$$\det(J) = l_1 l_2 s_2 = l_1 l_2 \sin q_2 = 0$$



$$q_2 = n\pi (n = 0, 1, 2, \dots)$$



物理的意味をもう少し

特異姿勢→ヤコビの行列式=0



角速度無限大

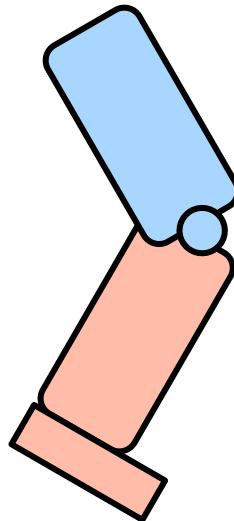


手先を一定速度で移動する制御

- 特異点付近で角速度無限大にする必要あり
- 現実には無理→ 軌道が目標軌道とずれる

考察:なぜヒューマノイドロボットの膝は曲がっているのか?

こんな風に曲がってる 何故?



まっすぐだと不具合がある?

